Symétries

Harold Erbin

8 février 2012

Table des matières

Version : 8 février 2012
Site : http://harold.e.free.fr/

1 Introduction

1.1 Historique et définitions

Le concept de symétrie a émergé dans la physique au cours du XX^{e}, avant de devenir l'un des piliers de la physique moderne : actuellement, les principes de symétries guident presque entièrement l'élaboration des théories, et les théories les plus spectaculaires par leur précision (par exemple la relativité générale ou le modèle standard des particules) se formulent comme des conséquences des symétries. Toutefois, il a fallu une longue réflexion avant de découvrir les symétries sous-jacentes des lois de la physique, ainsi que leurs conséquences, car elles sont rarement explicites.

Avant de commencer, il convient de clarifier ce que j'entends précisément en utilisant le mot "symétrie", car les mathématiciens et les physiciens l'utilisent dans un sens légèrement différents de celui du dictionnaire ; ainsi, une symétrie est une opération qui transforme un système, et l'ensemble des symétries possibles respecte certaines règles :

- il est toujours possible d'inverser une opération ;
- l'opération qui consiste à ne rien faire est possible (on parle de l'opération identité) ;
- deux opérations successives sont équivalentes à une troisième et unique opération.

L'ensemble des symétries possibles forment ce qu'on appelle un groupe.

Il faut alors distinguer la notion d'invariance de celle de symétrie : si une opération laisse le système inchangé, alors on parle d'invariance (on dit aussi que le système est symétrique). Ainsi, il est tout à fait possible d'effectuer une opération de symétrie qui modifie le système. Concrètement, comment savoir si un système est invariant ?

- Du point de vue du physicien, un système est invariant si les mêmes mesures donnent les mêmes résultats, c'est à dire que le comportement ne doit pas changer.
- Quand on dessine une figure sur un papier, alors elle est invariante sous une opération si on peut superposer l'ancienne à la nouvelle (et ce sans tourner une des figures ! sans quoi il s'agirait d'une nouvelle opération).

Généralement, on regroupe toutes les opérations d'invariance dans ce qui est appelé le groupe d'invariance du système [1].

1.2 Un exemple

Ces définitions peuvent paraitre abstraites, et je vais immédiatement donner un exemple de symétrie : considérons un objet composé d'un triangle d'un côté, d'un rectangle de l'autre (figure 1). On regarde alors le groupe formé des deux opérations suivantes :

- ne rien faire (figure 1a) ;
- faire une symétrie axiale horizontale [2] (figure 1b).

1. Le physicien utilise souvent le terme "groupe de symétries", au même titre que l'on peut dire d'un système est invariant ou symétrique. Mais il ne faut pas confondre ces notions avec celle plus générale de symétrie.

2. Je précise "horizontale", car on pourrait aussi faire une symétrie verticale, qui présente moins d'intérêt dans le cas présent. Dans toute la suite, l'attribut "horizontal" sera sous-entendu.

Le système est évidemment invariant sous la première opération, mais pas sous la seconde, comme il est impossible de superposer les deux figures. Par contre, si on refait une symétrie axiale, alors on retombe sur la figure de départ, et on peut dire que

$$\text{symétrie axiale} + \text{symétrie axiale} = \text{identité} \tag{1}$$

En réfléchissant un instant, on obtient les autres combinaisons possibles d'opérations : on peut toujours ne rien faire deux fois de suite, ce qui revient à ne rien faire, et on peut aussi faire une symétrie axiale puis ne rien faire (ou inversement), ce qui revient au final à une symétrie axiale :

$$\text{identité} + \text{identité} = \text{identité} \tag{2}$$

$$\text{symétrie axiale} + \text{identité} = \text{symétrie axiale} \tag{3}$$

On obtient donc bien un groupe (à deux éléments). Géométriquement, puisqu'il est impossible de superposer toutes les figures obtenues par les différentes opérations, il ne s'agit pas d'un groupe d'invariance. Par contre, si on décide d'interpréter différemment nos figures, par exemple en disant que notre système se comporte de la même manière tant que le triangle pointe à gauche ou à droite, alors le groupe le laisse bien invariant.

Nous voyons déjà ici que la définition même du système est importante lorsque l'on se pose la question de l'invariance.

(a) Opération d'identité sur la figure.

(b) Après l'opération de symétrie axiale, la nouvelle figure n'est pas superposable à l'ancienne.

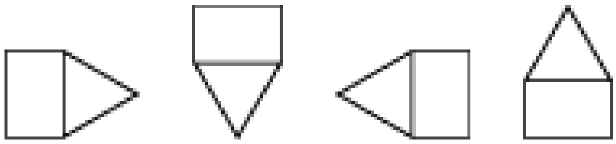
FIGURE 1 – Symétrie axiale d'un objet quelconque.

2 Types de symétries

2.1 Symétries discrètes

Le premier type dont je vais parler — les symétries discrètes — sont les plus intuitives à comprendre, car on en trouve certains exemples dans les mathématiques du collège, et même du primaire : symétrie axiale (renversement d'un objet par rapport à une droite), rotation d'un angle fixé (figure 5, où l'on ajoute une opération "rotation de 90°" à l'exemple précédent), permutations d'objets, etc. Ce type de considérations a permis de classer l'ensemble des cristaux.

En ajoutant la rotation de 90° à l'exemple précédent, nous nous voyons aussi obligés d'ajouter les opérations de rotations de 180° et de 270°, qui s'obtiennent en effectuant respectivement deux et trois rotations de 90°. L'identité correspond à une rotation de 0° ou de 360°. Finalement, nous pouvons remarquer que lorsque le triangle pointe vers la gauche ou la droite, la symétrie axiale est équivalente à une rotation de 180°, tandis que si le triangle pointe vers le haut ou vers le bas, alors la symétrie axiale est identique à l'identité. L'opération de symétrie axiale est donc superflue, et le groupe possède quatre éléments (figure 5). Le système n'est invariant ni géométriquement, ni selon l'autre interprétation que nous avons donné dans l'exemple. Par contre, le carré sans le triangle sera invariant.



(a) 0°. (b) 90°. (c) 180°. (d) 270°.

FIGURE 2 – Rotations multiples de 90°.

Nous allons maintenant jeter un œil au groupe des permutations que j'ai mentionné au début du paragraphe. L'idée est de prendre un ensemble d'objets, et de les échanger : par exemple on pourra échanger les nombres d'une liste, échanger la disposition de boules de billard... Nous choisirons ce dernier cas pour fixer les idées. On dispose quatre balles, numérotées de un à quatre, sur une table. Une permutation consistera pas exemple à décaler chaque balle d'un cran vers la gauche, et de mettre la première à la dernière position (figure 3a). Puisque les boules portent un numéro, le système est maintenant différent puisque la boule 1 est différente de la boule 4, et il en sera de même pour toute permutation, donc il ne s'agit pas d'un groupe d'invariance. Par contre, si l'on prend quatre boules totalement identiques, c'est à dire toutes de la même couleur et ne portant aucun nombre, alors on aura bien une invariance car on ne peut pas discerner les boules (figure 3b). Mais un physicien pourra dire que tout ce qui l'intéresse est que la balle 2 est à côté de la 3, la 3 à côté de la 4, etc., en faisant comme si la première et la dernière boule étaient côte à côte. Dans ce cas, la permutation que nous avons montrée laisse invariant le système (mais d'autres permutations, par exemple échangeant uniquement les boules 1 et 2, ne seront pas des invariances).

Ce groupe joue un rôle extrêmement important dans la mécanique quantique : les particules sont classées en deux catégories (bosons et fermions) selon leur comportement par une permutation avec une autre particule identique.

En physique, on s'intéresse aussi à des symétries discrètes plus abstraites, par exemple celle d'inversion du temps (appelée T) et d'inversion de l'espace (notée P, pour parité). Leur étude est extrêmement intéressante, mais je n'en dirai pas plus dans cet article.

2.2 Symétries continues

Les symétries continues sont bien plus courantes dans la physique théorique, mais aussi beaucoup moins intuitives au premier abord. Dans les exemples précédents, nous n'avions à notre disposition qu'un nombre fini d'opérations distinctes dans un groupe. Au contraire, la particularité des groupes continus (ou groupes de Lie) est justement de rassembler une infinité d'opérations.

(a) Avec numéros.

(b) Sans numéros.

FIGURE 3 – Permutation de quatre boules de billard. Dans le cas sans couleurs, la situation est identique et le système est invariant.

L'exemple le plus simple est celui du groupe des rotations dans le plan, appelé SO(2) par les mathématiciens : il est constitué de toutes les rotations possibles, qui peuvent être très grandes (comme celles de la section précédente), ou aussi petite que l'on veut (si petite que l'œil serait incapable de voir que l'objet a tourné, mais un instrument infiniment précis le pourrait). Nous montrons ce groupe en application sur la figure 4, où plusieurs rotations successives d'un carré sont représentées ; notez que le carré n'est pas invariant : il ne le sera que pour les rotations de $0°, 90°, 180°$ et $270°$, comme nous l'avons vu précédemment. D'ailleurs, pouvez-vous trouver une figure géométrique qui soit invariante ?

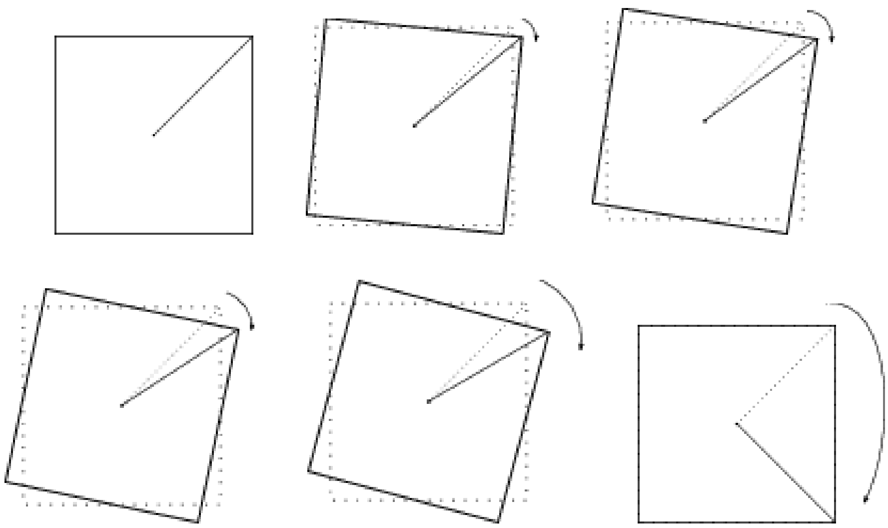


FIGURE 4 – Quelques rotations d'un carré. Rappelons-nous qu'entre chaque rotation dessinée, il est possible d'en obtenir une infinité d'autres.

Il existe de nombreux groupes de Lie, plus ou moins abstraits. Par exemple, le groupe unitaire à une dimension, noté U(1), est très proche de SO(2). Imaginez que chaque objet possède à l'intérieur une sorte de cercle gradué (un petit trait donne la position "zéro"), avec une aiguille donnant une direction. Alors une opération de U(1) consistera à faire tourner cette aiguille de la même quantité pour tous les objets. Le physicien pourra n'être intéressé que par l'écart entre les aiguilles, auquel cas U(1) est bien un groupe d'invariance, puisque déplacer toutes les aiguilles d'une même quantité ne change pas leur différence, d'après la formule simple

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b \tag{4}$$

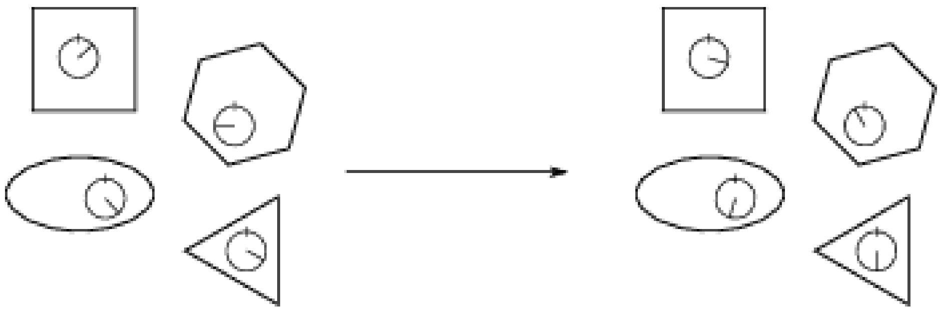


FIGURE 5 – Exemple d'une opération U(1), où nous avons tourné chaque trait d'un sixième du cercle. J'insiste encore sur le fait qu'il ne s'agisse que d'une représentation utile pour permettre à l'esprit de comprendre ce groupe.

Le point étonnant est que l'invariance de la physique par ce groupe conduit à l'existence de la charge électrique ! Et, dans une version un peu plus évoluée, ce groupe est responsable de l'existence du photon et des interactions électromagnétiques.

Je n'en dirai pas plus sur les groupes de Lie, car le sujet est vaste et compliqué.

3 Conclusion

J'ai donné les clés nécessaires à une compréhension basique des notions de symétries et d'invariance, n'ayant fait que pointer du doigt quelques directions de la physique où les groupes interviennent. En fait, à mesure qu'un étudiant plonge dans les entrailles de la physique, il s'aperçoit que les groupes sont partout et que les prendre en compte permet de simplifier les problèmes étudiés, voire de donner des pistes pour une nouvelle théorie.

J'espère pouvoir écrire un autre article abordant quelques conséquences intéressantes, telles que le théorème de Noether, ou encore expliquant pourquoi il est si difficile de trouver des symétries.

Références

[1] Brian Greene, *L'univers élégant.*

[2] Lee Smolin, *Rien ne va plus en physique ! : L'échec de la théorie des cordes.*

[3] David J. Gross, *The role of symmetry in fundamental physics.*