

# Quelques concepts de renormalisation

Harold Erbin

8 juin 2012

## 1 Introduction

Dès ses débuts, la théorie quantique des champs s'est vue accompagnée de résultats infinis, qui conduisaient les chercheurs à la regarder avec une certaine suspicion. L'un des premiers exemples est celui de la masse de l'électron  $m$ , qui est donnée par la somme de la masse intrinsèque  $m_0$  (ou nue) plus l'énergie  $V$  du champ électrique de l'électron (self-énergie).

Par nature, toute théorie physique est formulée pour être valable dans un domaine précis et délimité : la mécanique classique est correcte pour des vitesses faibles, l'hydrodynamique tant que l'on peut considérer le milieu comme continu, etc. Et heureusement, car sans cela, aucune science ne serait possible. Ainsi nous pouvons imaginer que l'électrodynamique classique qui assimile l'électron à un point n'est plus valable à partir d'une certaine échelle, de l'ordre de grandeur du rayon de l'électron  $a$ . Dans ce cas, la self-énergie est proportionnelle à  $a^{-1}$  et finie pour  $a$  fini (nous retrouvons bien la divergence de la self-énergie pour  $a \rightarrow 0$ ). Toutefois, toutes les expériences actuelles (par exemple la mesure du moment magnétique anormal) laissent penser que l'électron est ponctuel [1].

Un autre exemple d'infini est celui de l'énergie du vide dans n'importe quelle théorie des champs (classique) qui vient de la somme infinie des modes zéros des oscillateurs. La solution habituelle consiste à ordonner normalement les opérateurs, ce qui revient à placer l'origine des énergies à zéro, ce qui ne change rien à la mesure puisque nous n'avons accès qu'à des différences d'énergie (un problème demeure malgré tout : si la gravité est incluse, toutes les sources d'énergie comptent). En fait il s'agit d'une forme de renormalisation primitive, qui revient à demander que la valeur dans le vide du champ est nulle, objectif qui peut être atteint à l'aide d'un contre-terme  $-\delta h \phi$ , pour les tadpoles, et  $-\delta E^0$  pour l'énergie du

vide [2].

En fait, le problème est bien pire en mécanique quantique : en effet, les fluctuations quantiques permettent au système de se trouver dans tous les états qui lui sont accessibles, et ceux quelles que soient leurs énergies ; il est alors impossible de séparer naïvement les échelles. Nous verrons par exemple qu'en présence d'un diagramme à boucle, il faut intégrer sur toutes les positions de l'espace (réel ou des impulsions), ce qui entraîne des divergences dites ultraviolettes, qui émergent à courte distance (grande énergie).

Une introduction historique à ce problème est donnée dans [3]. La renormalisation est un ensemble d'outils qui permettent d'interpréter et, surtout, de prendre en charge les infinis de manière rigoureuse. Dans ce qui suit, nous n'aborderons presque pas la renormalisation du point de vue de la physique statistique, ni la renormalisation constructive.

Tout processus de renormalisation nécessite plusieurs choses, qui sont : une action  $S$  (nous utiliserons toujours un lagrangien dans notre discussion), une échelle de décomposition (c'est-à-dire une unité de masse qui permet de séparer les faibles des hautes énergies), une notion de localité et un théorème de comptage de puissance [4]. Nous allons voir comment tout ceci est implémenté dans les théories des champs usuelles.

## 2 Renormalisation générale et contre-termes

Revenons à notre exemple de l'électron. Plutôt que de modifier la théorie à courte distance, une autre solution est de se rendre compte que, quoi qu'il arrive, il nous sera impossible d'observer un électron nu, c'est-à-dire sans son champ électrique et totalement isolé (sans aucune autre particule dans l'univers). Pour cette raison, la masse nue

de l'électron n'est pas un paramètre observable et peut alors valoir n'importe quoi, et même être infinie : ainsi, si nous écrivons la masse sous la forme  $m_0 = m + \delta m$  — où  $\delta m$  est un *contre-terme* —, nous pouvons choisir  $\delta m = -V$  et ainsi "annuler" la contribution de la self-énergie, nous retrouvant alors avec la masse physique et observée  $m$ .

L'idée se généralise aux théories des champs, où on écrit chaque paramètre nu  $g_{0,i}$  comme la somme de ce paramètre mesuré  $g_i$  plus un contre-terme  $\delta g_i$ . De même en général le champ  $\phi_{0,i}$  sera aussi multiplié par un facteur  $\sqrt{Z_i}$  :

$$g_{0,i} = g_i + \delta g_i, \quad \phi_{0,i} = \sqrt{Z_i} \phi_i. \quad (1)$$

Nous pouvons alors séparer le lagrangien en trois parties :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{ct}}, \quad (2)$$

où  $\mathcal{L}_0$  est le lagrangien libre et  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  celui d'interaction, qui ne dépendent que des champs et des paramètres physiques.  $\mathcal{L}_{\text{ct}}$  contient les différents contre-terme, qui sont traités comme des interactions. Maintenant, lors des calculs des amplitudes, il vaut veiller à prendre en compte les contre-terme, qui peuvent alors être ajustés pour compenser les divergences et laisser un résultat fini.

En fait, la procédure générale de renormalisation procède plutôt par le chemin inverse, car rien n'empêche que nous ayons oublié des termes dans le lagrangien. Pour ce faire prenons une fonction à  $N$  points à l'ordre  $n$ , notée  $G_N^{(n)}(p)$  ( $p$  désigne collectivement l'ensemble des moments externes). Un graphe  $\mathcal{G}_i$  associé à celle-ci peut présenter deux types de divergence :

- une divergence est dite globale lorsque l'amplitude diverge lorsque tous les moments internes tendent vers l'infini ;
- à l'inverse nous parlons de sous-divergence lorsque l'amplitude diverge lorsque seulement une partie des moments internes tendent vers l'infini, les autres étant fixés.

Considérons en premier un graphe sans sous-divergences et dont le degré de divergence est  $\Delta \geq 0$  (ceci revient à dire que l'amplitude est proportionnelle à  $k^\Delta$  pour  $\Delta > 0$  et  $\ln k$  pour  $\Delta = 0$ ). Dans ce cas,  $\Delta + 1$  différentiation de l'amplitude  $A$  par rapport aux moments externes abaissent le degré de divergence à  $\Delta' = -1 < 0$  et le graphe converge [2]. Nous pouvons alors obtenir l'amplitude renormal-

isée  $A_R$  par intégration, qui sera de la forme

$$A_R = A_1 + Q(p) \quad (3)$$

où  $Q$  est un polynôme d'ordre  $\Delta$  en  $p$ , et dont les coefficients sont les constantes d'intégration (l'invariance de Lorentz peut restreindre leur nombre). Ces constantes sont totalement libres et peuvent être ajustées pour compenser les divergences apparaissant dans l'intégrale  $A_1$ . Le fait que les contre-terme soient polynomiaux indique qu'il s'agit d'objets locaux (théorème de Weinberg [1, 2]) qui peuvent être représentés par des graphes de Feynman, et donc être associés à des termes du lagrangien. En fait, dans l'espace des positions, ces divergences proviennent des régions où deux vertex  $x$  et  $y$  se rapprochent jusqu'à coïncider, et les contre-terme sont proportionnels à  $\delta^{(4)}(x - y)$  — c'est ce à quoi nous nous attendons en parlant de *localité*<sup>1</sup>.

Par exemple, pour la théorie  $\phi_4^4$ , l'amplitude du graphe 1a (et de ceux où les moments externes sont permutés) diverge logarithmiquement, donc une différentiation suffit pour la convergence ; le polynôme sera d'ordre 0 :  $Q(p) = -i\delta\lambda$ , et se traduira par un terme  $-\delta\lambda/4! \phi^4$  dans le lagrangien, représenté par le graphe 1b<sup>2</sup>. Notons que dans ce cas le contre-terme est d'ordre 2 en  $\lambda$ .

Prenons maintenant un graphe 1PI à  $n$  boucles qui présente des sous-divergences (non imbriquées), ainsi qu'une divergence globale, e.g. le diagramme 2a [1, 2, 3]. Dans ce cas, l'amplitude du graphe présente typiquement un pôle d'ordre  $n$  avec un coefficient local, ainsi que des pôles d'ordre inférieurs accompagnés de polynômes de logarithmes de  $p^2$ . Il n'est donc pas possible de renormaliser directement ce graphe avec un contre-terme local. En fait, avant de chercher le contre-terme général, il faut renormaliser les sous-divergences en remplaçant tour à tour les sous-graphes par les contre-terme que nous avons déterminés précédemment (toujours avec le même exemple, nous aurons le graphe 2b et son symétrique). En sommant les trois graphes, la partie non-locale s'annule et nous pouvons alors introduire un contre-terme qui aura la même forme que celui sur la figure 1b, mais qui sera d'ordre 3. Ainsi, cette modification ne change

1. Dans certaines théories des champs, ce concept de localité doit être étendu car il n'est plus adapté, par exemple pour les modèles de matrices ou de tenseurs [4].

2. Pour donner un exemple d'ordre non nul, un terme en  $\delta Z p^2$  correspondra à  $\delta Z (\partial\phi)^2$ .

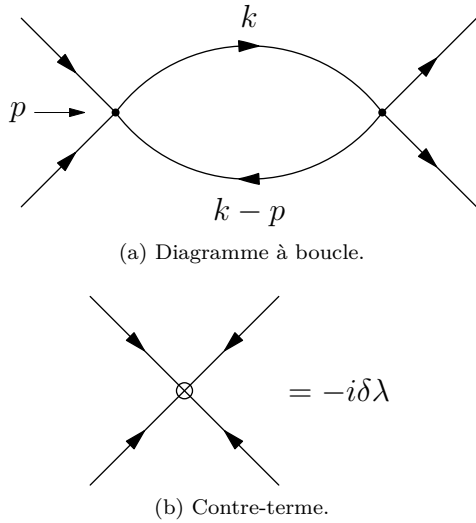


FIGURE 1 – Graphe à une boucle et contre-terme associé pour la théorie  $\phi^4$ .

en rien le calcul qui nous a permis de renormaliser les sous-divergences, car il s'agit de terme d'ordre 4.

Généralement, les termes non singuliers sont multipliés par des puissances de  $\ln p^2$  — qui sont un héritage des sous-divergences —, qui peuvent poser problème quand  $p^2$  est très grand ou très petit, puisque dans ce cas même les termes d'ordres supérieurs peuvent être importants. Nous verrons dans la prochaine section comment les prendre en charge.

Finalement, un graphe peut diverger seulement à cause de ses sous-divergences : dans ce cas, après ajouts de tous les graphes où les sous-graphes ont été remplacés par leurs contre-terme (comme dans le paragraphe précédent), il n'y a plus de divergence et il n'est pas nécessaire d'ajouter un nouveau contre-terme. De plus, si le graphe n'est pas 1PI, alors il suffit de reprendre l'analyse précédente en l'appliquant à ses différentes parties 1PI. Les contre-terme déjà introduits suffisent à rendre fini ce graphe.

Ainsi, en appliquant récursivement ces différents procédés nous pouvons renormaliser n'importe quel graphe. L'opération  $R$  de Bogoliubov implémente cet algorithme récursif de manière formelle [1]. Une solution à cette définition récursive est donnée par la formule des forêts de Zimmermann [2].

Toutefois, une question se pose : sommes-nous assurés de ne pas avoir à continuer le processus

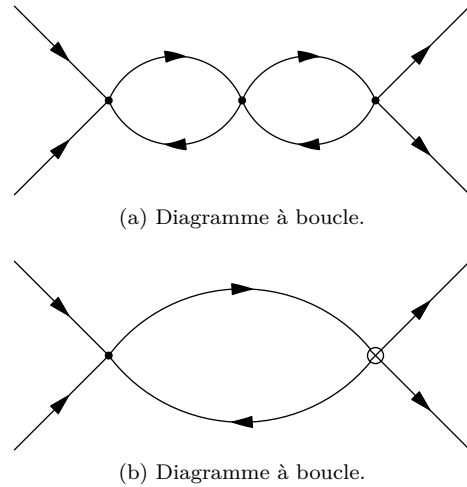


FIGURE 2 – Graphe à deux boucles et sous-contre-terme pour la théorie  $\phi^4$ .

jusqu'à l'infini ? Nous devons alors faire la distinction entre [1, 2, 3] :

- les théories renormalisables ( $\forall i : [g_i] \geq 0$ ) : dans ce cas, il suffit d'ajouter un nombre fini de contre-terme au lagrangien initial pour renormaliser la théorie (en effet, chaque ajout de champs ou de dérivées augmente  $g_i$ , donc le nombre d'interactions est forcément fini [3]) ;
- les théories non renormalisables ( $\exists i : [g_i] < 0$ ) : il faut ajouter une infinité de contre-terme<sup>3</sup>.

Chaque contre-terme doit s'accompagner de l'interaction associée dans le lagrangien (à condition qu'ils respectent tous les deux les symétries du modèle, sans quoi ils doivent être absents). Par exemple, si nous avons besoin d'un contre-terme  $\delta\lambda \phi^4$ , alors nous devons nécessairement inclure l'interaction  $\lambda \phi^4$ , où  $\lambda$  est un nouveau paramètre qui doit être déterminé expérimentalement.

Les deux types de théories donnent des résultats finis. L'inconvénient du deuxième type est le manque de prédictibilité, puisqu'il est nécessaire d'avoir mesurer une infinité de paramètres avant de pouvoir utiliser la théorie. En pratique, une théorie non-renormalisable à basse énergie peut avoir son utilité (les cas classiques sont le modèle de Fermi et la relativité générale) qui sont considérées comme des théories effectives, où nous ne considérons qu'une partie des degrés de liberté (par

3. En réalité, toutes les théories non renormalisables ne se ressemblent pas [2, sec. 5.7.4].

exemple via l'outil de *large-mass expansion* [2] : en effet, les termes non-renormalisables sont supprimés par des puissances inverses du cut-off et sont donc peu importants, même s'ils peuvent être visibles s'ils rendent possibles des interactions non-autorisées par les symétries du lagrangien "normal" (citons la désintégration  $\beta$ ) [3].

Notons que nous n'avons discuté que la renormalisation perturbative et la situation réelle peut être différente ; par exemple, il a été proposé que la relativité générale admet un point fixe ultraviolet non trivial (*asymptotic safety*).

Afin de déterminer si un graphe est potentiellement divergent, il est utile de calculer son degré de divergence superficiel à l'aide d'un *comptage de puissance*. Ce degré superficiel correspond au degré réel après renormalisation des sous-divergences. Il est possible de prouver la formule suivante [3] :

$$\Delta = d - \sum_e \ell_e (s_e + 1) - \sum_i n_i [g_i] \quad (4)$$

où  $\ell_e$ ,  $s_e$  et  $n_i$  sont respectivement le nombre de lignes externes et le spin des particules externes de type  $e$ , et le nombre de vertex de type  $i$ . Ainsi, nous retrouvons bien que si tous les  $[g_i]$  sont positifs, alors en augmentant le nombre de lignes les amplitudes finissent par converger (et nous avons de plus une borne supérieure au degré de divergence, permettant d'identifier les fonctions de Green divergentes). Au contraire, si au moins un  $[g_i]$  est négatif, alors en augmentant le nombre de vertex de type  $i$  viendra un moment où les amplitudes divergeront.

### 3 Groupe de renormalisation et régularisation

Au début de la section précédente, nous demandions à ce que les contre-termes permettent de retrouver les valeurs physiques des paramètres. Par la suite, lorsque nous avons systématisé notre procédure, nous utilisons les contre-termes pour compenser les termes singuliers. Toutefois, cela n'a pas vraiment de sens sans une technique de régularisation des intégrales, qui permet d'extraire les parties singulières. Il existe de nombreuses méthodes de régularisation (le cut-off est indiqué entre parenthèses) : discrétisation sur réseau (taille du réseau  $a$ ), régularisation dimensionnelle ( $\varepsilon = d_0 - d$ , où  $d_0$  est la dimension dans laquelle notre théorie

est définie), régularisation de Pauli-Villars (grande masse  $M$ ), coupure sur les moments (énergie maximale  $\Lambda$ ) [1, 2]. Les parties singulières seront alors des fonctions divergentes des cut-off ; par exemple pour  $\Delta = 0$ , nous aurons  $A \sim a^{-1}, \varepsilon^{-1}, \ln \Lambda$ , etc.

Le point clé est maintenant de se rendre compte que la décomposition (2) n'est pas la seule envisageable : il est toujours possible de déplacer un terme constant de  $\mathcal{L}_0$  ou  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  dans  $\mathcal{L}_{\text{ct}}$ , puisqu'il s'agit d'une simple réécriture du lagrangien (nous parlerons de schéma de renormalisation) ; mais ceci implique une variation des paramètres. Nous pourrions alors craindre de perdre toute prédictibilité avec notre théorie, puisqu'il existe une infinité de manière de séparer le lagrangien. En fait, rien n'oblige à ce que les paramètres qui apparaissent  $\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\text{ct}}$  correspondent aux paramètres physiques, tant qu'ils sont finis ! En effet, s'il est pertinent de travailler avec la masse de l'électron dans le lagrangien, cela l'est beaucoup moins avec celle des quarks, qui ne peuvent pas être observés à cause du confinement. Ainsi, nous en venons au concept d'invariance sous le groupe de renormalisation : la théorie ne dépend pas du schéma choisi et la physique reste inchangée (par exemple, la matrice  $S$  reste invariante) [1, 2, 3].

Quelques schémas populaires sont :

- la soustraction minimale (modifiée), notée MS ( $\overline{\text{MS}}$ ), qui consiste à compenser uniquement les termes singuliers (plus les constantes provenant des développement des fonctions  $\Gamma$ ) ;
- le schéma physique (ou on-shell), où nous imposons aux fonctions de Green certaines conditions afin de retrouver les valeurs physiques.

Les propriétés d'une théorie renormalisée ne dépendent pas du type de régularisation utilisé. Il existe d'ailleurs un schéma — appelé BPHZ, du nom de ses auteurs — indépendant de toute régularisation et de tout cut-off, puisqu'il intervient directement sur l'intégrant des amplitudes [2]. La référence [2, sec. 7.1] détaille la manière de changer explicitement de schéma à l'aide d'une reparamétrisation.

Adoptons maintenant la régularisation précise dimensionnelle. Elle nous oblige à introduire un nouveau paramètre  $\mu$ , qui a la dimension d'une énergie, afin de ne pas modifier la dimension des paramètres initiaux :

$$g_i \longrightarrow \mu b_i (d - d_0) g_i, \quad (5)$$

si la dimension des paramètres devrait être  $[g_i]_d = [g_i]_{d_0} + b_i (d - d_0)$ .  $\mu$  est un nouveau paramètre, mais

en réalité il n'introduit pas une nouvelle indétermination dans la théorie, du fait de l'invariance par reparamétrisation.

Les coefficients non singuliers dont nous avons parlé dans la section précédente seront du type  $\ln(p^2/\mu^2)$ . Une manière de rendre ces logarithmes inoffensifs est de choisir  $\mu$  proche de l'énergie des processus étudiés, dans le cas où tous les moments sont du même ordre (sinon il faut adopter d'autres outils, comme l'expansion du produit d'opérateurs [1, 2]). Le changement de  $\mu$  revient à changer de prescription pour les paramètres renormalisés.

Plutôt que de changer  $\mu$  d'une quantité finie pour atteindre une autre échelle, il est plus intéressant de procéder de manière continue à l'aide d'un grand nombre de pas infinitésimaux. De cette manière nous obtenons des équations différentielles sur les fonctions de Green (dites de Callan–Symanzik) et les paramètres, dont les solutions donnent l'évolution de ceux-ci en fonction de l'échelle  $\mu$ .

Donnons un premier exemple afin de fixer les idées. Puisque le lagrangien (2) est invariant et égal au lagrangien sans contre-termes exprimés à l'aide des paramètres nus, cela signifie que ces derniers doivent être invariants sous le groupe de renormalisation [1]. Dans ce cas, pour la constante de couplage de la théorie  $\phi^4$ , nous avons

$$\mu \frac{d\lambda_0}{d\mu} = \mu^\varepsilon \left( \varepsilon \lambda + \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \lambda} \right), \quad (6)$$

car  $\lambda_0 = \mu^\varepsilon \bar{\lambda}(\lambda(\mu), \varepsilon)$  par analyse dimensionnelle. Après inversion, nous obtenons l'équation d'évolution de  $\lambda$

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \beta(\lambda, \varepsilon), \quad (7)$$

avec la fameuse fonction bêta donnée par

$$\beta(\lambda, \varepsilon) = -\varepsilon \lambda_0 \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0}. \quad (8)$$

Celle-ci encode ainsi tout le comportement de la théorie de l'IR à l'UV. La solution peut s'écrire formellement sous forme d'intégrale, cette dernière pouvant s'effectuer explicitement en perturbation aux ordres de bas.

Selon les caractéristiques de  $\beta$ , quatre comportements sont envisageables pour la constante de couplage [1, 2, 3] :

- liberté asymptotique : si  $\beta < 0$ , alors la valeur de la constante de couplage diminue et la

théorie des perturbations est applicable à haut énergie, tandis qu'au contraire, la constante devient grande à basse énergie et le développement perturbatif n'est plus valable ;

- singularité à une énergie finie (pôle de Landau) ;
- croissance infinie : si  $\beta > 0$  (et non singulière), alors la constante de couplage augmente sans cesse et devient infinie quand  $\mu \rightarrow \infty$  ;
- point fixe : si  $\beta(g^*) = 0$  et si la fonction reste positive pour  $g < g^*$ , alors la constante de couplage tend vers sa limite et ne varie plus quand  $\mu$  augmente.

Le premier cas est celui de la QCD : dans les collisionneur à haute énergie, les quarks et les gluons interagissent directement, tandis qu'à plus basse énergie nous n'observons que les hadrons à cause du confinement. Le deuxième est<sup>4</sup> celui des théories  $\phi^4$  et de QED : afin d'éviter l'explosion de la constante de couplage, celle-ci doit s'annuler auparavant et la théorie devient triviale ; ces théories n'auraient alors un sens qu'en présence d'un cut-off. Ces considérations sont utiles dans la phénoménologie du boson de Higgs qui est censé admettre une telle interaction, et elles donnent une idée de l'échelle à laquelle une nouvelle physique peut entrer en jeu.

De nombreux autres concepts pourraient être abordés, comme la dimension anormale des champs, la transmutation dimensionnelle, la limite de masse nulle, etc., mais le manque de place nous oblige à nous arrêter là.

## Références

- [1] J. Collins, *The problem of scales : renormalization and all that*.
- [2] J. Collins, *Renormalization*.
- [3] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, vol. I and II.
- [4] V. Rivasseau, *Quantum gravity and renormalization : the tensor track*.

---

4. Tout ceci est a priori : comme nous l'avons mentionné plus haut, il faudrait faire une étude non-perturbative avant de se prononcer définitivement. Mais les résultats numériques vont dans cette voie.