

Tenseurs aléatoires

Harold Erbin

21 mai 2012

Ce texte est publié sous la licence libre

Licence Art Libre :

<http://artlibre.org/licence/lal/>

Contact : harold.erbin@gmail.com

Table des matières

Table des matières	2
1 Introduction	3
2 Matrices aléatoires	4
2.1 Définition du modèle cubique	4
2.2 Comportement critique et limite large N	6
2.3 Triangulation	6
2.4 Équations de Schwinger–Dyson	7
2.5 Gravité $2d$	8
2.6 Modèle de matrices colorées	8
3 Modèle de tenseurs : cas pur	10
3.1 Motivation	10
3.2 Modèle simple	10
3.3 Topologie des graphes colorés	12
3.4 Pavages	12
3.5 Tenseurs non colorés	13
4 Comportement critique	14
4.1 Expansion $1/N$	14
4.2 Équations de Schwinger–Dyson et de consistance	16
4.3 Secteur melonique	17
4.4 Universalité, gravité quantique et renormalisation	19
5 Dimères	19
5.1 Introduction et définitions	19
5.2 Comportement critique	21
5.3 Cas $d = 3$	24
6 Dimère unique	25
6.1 Définition du modèle	25
6.2 Équations de consistance	26
6.3 Équations de Schwinger–Dyson	29
6.4 Exposants critiques	30
6.5 Cas $d = 3$	31
7 Objets durs et règles d’exclusion	32
A Géométrie simpliciale	32
Références	34

1 Introduction

Les modèles de matrices ont connu un grand succès dans l'étude de la gravité $2d$ et de modèles de physique statistique en géométrie aléatoire ('t Hooft, V.A. Kasakov, F. David, J.-B. Zuber, P. Di Francesco...). Naturellement, les chercheurs ont essayé de remplacer les matrices par des tenseurs afin d'étendre les résultats à des dimensions supérieures. Hélas, les outils qui ont fait le succès des matrices — le développement topologique en $1/N$ et les graphes planaires — ne se retrouvent pas dans les modèles de tenseurs et il était impossible d'étudier analytiquement la limite continue. Pour cette raison, plusieurs groupes (R. Loll, J. Ambjørn...) se sont tournés vers la simulation numérique qu'ils ont appelé triangulation dynamique (causale, dans sa version plus évoluée), qui possède des ressemblances avec le calcul de Regge [1, 2, 11, 19]. En lien avec la gravité quantique à boucle, une nouvelle version des modèles de tenseurs — appelée "group field theory" [20] — a émergé, mais elle souffre des mêmes problèmes que sa parente [23].

Toutes ces théories se basent sur l'idée de géométrogénèse, c'est-à-dire d'espace-temps émergent : au niveau microscopique, l'espace-temps serait constitué d'un ensemble d'"atomes" qui, après une transition depuis une phase pré-géométrique, adoptent un comportement collectif afin de redonner notre espace continu dont nous avons l'habitude [21, 22]. L'objectif est alors de construire une théorie des champs pour ces atomes et d'expliquer comment on retrouve la relativité générale comme théorie effective. Dans ces approches, que l'on peut rassembler sous la dénomination de gravité quantique simpliciale, les degrés de liberté sont des d -simplexes décrits de manières purement combinatoire et algébrique, puisque la notion de géométrie n'a plus de sens à ce niveau.

Certains problèmes de physique statistique sont aussi plus simples à aborder sur des réseaux aléatoires plutôt que fixes : par exemple, le modèle d'Ising en $2d$ a été résolu de manière exact par V.A. Kasakov. V. Bonzom, R. Gurau, et V. Rivasseau l'ont étudié pour $D \geq 3$, et ont montré qu'il n'y avait pas de transition de phase [7]. Il est donc intéressant d'étudier à l'aide des tenseurs les nombreux modèles de la physique statistique et des modèles de matrices : le principal objectif du stage était donc d'exhiber un modèle avec un comportement multicritique.

Je commencerai par exposer avec quelques détails les modèles de matrices aléatoires, car de nombreux calculs apparaissant dans les modèles de tenseurs sont similaires, juste plus fastidieux à détailler à cause du plus grand nombre d'indices. Ensuite, après une revue et une motivation des modèles de tenseurs purs, je présenterai deux systèmes statistiques (dimères), dont l'étude aura été au cœur du stage : les résultats indiqués sont entièrement nouveaux et un article est en cours de rédaction ; nous avons commencé l'étude d'un troisième modèle (objets durs) à la fin du stage, mais le temps a manqué pour son étude et nous ne le présenterons pas. Les modèles purs seront exposés de manière assez cavalière, car une démonstration rigoureuse de leurs propriétés auraient nécessité beaucoup de temps et ne faisaient pas partie du projet. De plus, j'ajouterai quelques commentaires sur des points qui n'ont pas été étudiés lors du stage, mais qui permettent de donner une idée des autres développements dans cette branche. À la fin de l'exposé se trouve une annexe rappelant les quelques notions de géométrie simpliciale que nous utiliserons.

Rappelons finalement que le thème principal du stage était les modèles de

tenseurs aléatoires, et non ceux des matrices aléatoires : ainsi, ces derniers n'ont été que peu étudiés, et uniquement lorsqu'il s'agissait de leurs points communs avec les tenseurs. Toutes les techniques propres aux modèles de matrices que l'on ne retrouve pas dans les modèles de tenseurs n'ont pas été utilisés.

Je remercie le Perimeter Institute et ses membres pour leur accueil et l'organisation du stage, Valentin Bonzom pour son encadrement, de même que Joseph Ben Geloun, Razvan Gurau, Sylvain Carrozza et Vincent Rivasseau pour leurs nombreuses discussions sur les tenseurs, ainsi que Marc Geiller pour m'avoir orienté vers ce stage.

2 Matrices aléatoires

Nous rappelons quelques résultats très généraux sur les matrices aléatoires, et reportons le lecteur à la bibliographie pour des détails supplémentaires [12, 18].

2.1 Définition du modèle cubique

Le modèle de matrices aléatoires le plus simple consiste en une seule matrice hermitienne carrée M de taille N dont l'action est [11]

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{tr} M^2 + \frac{\lambda}{3} \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{tr} M^3 \quad (2.1a)$$

$$= \frac{1}{2} \delta_{ad} \delta_{bc} M_{ab} M_{cd} + \frac{\lambda}{3} \frac{1}{\sqrt{N}} \delta_{af} \delta_{bc} \delta_{de} M_{ab} M_{cd} M_{ef}. \quad (2.1b)$$

Chaque composante M_{ab} est une variable aléatoire indépendante. Notons que cette action est invariante par la transformation

$$M \rightarrow U M U^\dagger, \quad U U^\dagger = 1. \quad (2.2)$$

La fonction de partition est alors

$$Z = e^F = \int dM e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} M^2 - \frac{\lambda}{3} \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{tr} M^3} \quad (2.3a)$$

$$= \int dM e^{-N(\frac{1}{2} \operatorname{tr} M^2 + \frac{\lambda}{3} \operatorname{tr} M^3)}, \quad (2.3b)$$

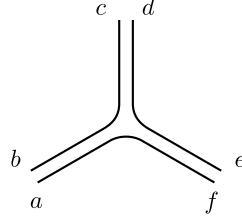
en posant $M \rightarrow \sqrt{N} M$. La mesure d'intégration peut être définie proprement [10, 26]. La seconde forme nous dit que chaque propagateur vient avec un facteur N^{-1} , et chaque vertex avec N .

La seconde écriture de l'action (2.1b) met en évidence la structure des graphes de Feynman : comme chaque matrice possède deux indices, chacune sera associée à deux points (le premier terme aura donc quatre points et le second six) qui portent un indice. Chaque delta s'interprète alors comme un lien — appelé brin — entre deux points ; l'ensemble des brins entre deux vertex forme une ligne. Les graphes de Feynman sont alors appelés graphes de ruban, à cause de leur forme particulière.

Le propagateur est donc donné par

$$\langle M_{ab} M_{cd} \rangle = \frac{a}{b} \frac{d}{c} = \frac{1}{N} \delta_{ad} \delta_{bc}. \quad (2.4)$$

Le calcul peut se faire explicitement avec une intégrale gaussienne. De son côté, le vertex est



$$= N \lambda \delta_{af} \delta_{bc} \delta_{de}. \quad (2.5)$$

On parle de face pour désigner un brin qui se ferme sur lui-même (figure 1). Il faut encore évaluer leur contribution (nous prenons un exemple avec p vertex) :

$$\delta_{a_1 a_2} \delta_{a_2 a_3} \cdots \delta_{a_p a_1} = \delta_{a_1 a_1} = N$$

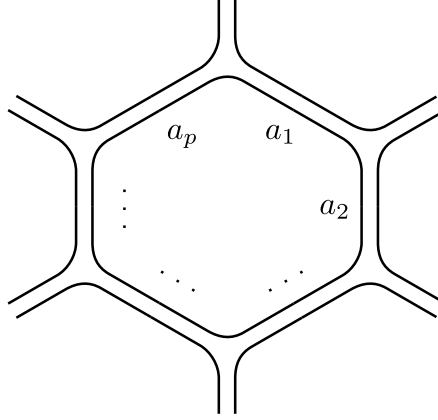


FIGURE 1 – Face dans un graphe de ruban.

Notons V le nombre de vertex, L le nombre de lignes¹ et F le nombre de faces d'un graphe G . Alors l'amplitude d'un graphe est

$$A_n(G) \sim N^{V-L+F} \lambda^V = N^x \lambda^V, \quad (2.6)$$

où la caractéristique d'Euler est reliée au genre g de la surface par la relation

$$\chi = 2 - 2g = V - L + F. \quad (2.7)$$

On peut évaluer la fonction de partition en sommant sur tous les graphes connexes possibles :

$$F = \sum_{\{G\}} A(G) = \sum_n \lambda^n \sum_{\{G|V(G)=n\}} N^{2-2g(G)} A_n(G), \quad (2.8a)$$

où on a décomposé la somme sur tous les nombres n de vertex possibles. D'après ce que l'on vient de voir, on peut récrire F comme une un développement en puissance de N^2 , ce qui est équivalent à une somme sur les topologies des graphes :

$$F = N^2 \sum_{g \geq 0} N^{-2g} F_g(\lambda) \approx N^2 F_0(\lambda), \quad (2.8b)$$

où F_g est l'énergie libre correspondant aux graphes de genre g .

1. Comme chaque vertex est trivalent, $2L = 3V$.

2.2 Comportement critique et limite large N

Les graphes ayant un genre nul $g = 0$ dominant dans la limite $N \rightarrow \infty$. Il est bien connu que ces graphes (dits planaires²) correspondent à des surfaces de topologie sphérique. $F_0(\lambda)$ peut alors être développée en série à son tour :

$$F_0(\lambda) = \sum_n a_n \lambda^n. \quad (2.9)$$

Si λ_c est le rayon de convergence de cette série, alors

$$a_n \sim_{\infty} n^{\gamma-3} \lambda_c^{-n} \quad (2.10)$$

et ainsi

$$F_0(\lambda) \sim \sum_n n^{\gamma-3} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^n \sim (\lambda - \lambda_c)^{2-\gamma}, \quad (2.11)$$

avec γ un exposant critique dépendant des détails du système. Ainsi, la série diverge lorsque la constante de couplage se rapproche de sa valeur critique λ_c , et on obtient la limite continue pour $\lambda = \lambda_c$. En effet, l'aire est proportionnelle au nombre de vertex et

$$\langle n \rangle = F_0^{-1} \sum_n a_n n \lambda^n,$$

donc

$$\langle A \rangle \sim \langle n \rangle = \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln F_0 \sim \frac{1}{\lambda - \lambda_c}. \quad (2.12)$$

Ce résultat s'explique par le fait que, dans la limite continue, les graphes avec une infinité de vertex dominant, et si la surface triangulée a une aire finie, alors l'aire individuelle de chaque triangle est nulle et on obtient une surface continue.

Il s'agit de la limite la plus simple, mais d'autres sont envisageables ("double scaling limit") [26].

2.3 Triangulation

Il est bien connu que les graphes de rubans sont duaux à des surfaces triangulées, avec les correspondances suivantes :

- vertex \rightarrow triangle ;
- ligne \rightarrow côté ;
- face \rightarrow sommet.

Un vertex cubique est donc dual à un triangle (figure 2)³, et l'effet des propagateurs est de coller les triangles selon leurs côtés. Le graphe et son dual possède le même genre car la formule de la caractéristique d'Euler (2.7) est invariante par la permutation $F \leftrightarrow V$.

Si l'espace est plat et les triangles équilatéraux, alors chaque vertex est entouré de six triangles. La courbure de l'espace se traduit alors par un nombre plus grand (courbure négative) ou plus petit (courbure positive) de triangles autour d'un vertex : ainsi, la courbure se concentre au vertex, qui est le $(D-2)$ -simplexe pour $D = 2$.

On remarque que la courbure se concentre au vertex [2, 19] (les deux références expliquent une construction en papier qui met clairement cette propriété en évidence).

². Car ils peuvent être dessinés sur un plan, sans que jamais aucune ligne ne se chevauche.

³. De même, si l'on avait choisi une interaction en $\text{tr } M^4$, on aurait eu des carrés, mais on peut voir ces derniers comme deux triangles collés ensemble.

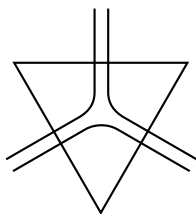


FIGURE 2 – Un vertex et son triangle dual.

2.4 Équations de Schwinger–Dyson

Les équations de Schwinger–Dyson ("loop equations") sont tout simplement les équations du mouvement et expriment l'invariance de l'action sous une variation infinitésimale des matrices (ou encore le fait que l'intégrale d'une dérivée totale est nulle) [18] :

$$\int dM \frac{\delta}{\delta M_{ab}} (F_{ab}(M) e^{-NS}) = 0. \quad (2.13)$$

L'ensemble de ces relations fournit un ensemble d'équations différentielles sur Z :

$$L_n Z = 0, \quad (2.14)$$

et on peut montrer que les opérateurs différentiels L_n satisfont l'algèbre de Virasoro [11] :

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n}. \quad (2.15)$$

Considérons le cas le plus simple $F_{ab} = M_{ab}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int dM \frac{\delta}{\delta M_{ab}} (M_{ab} e^{-NS}) \\ 0 &= N^2 \int dM e^{-NS} - N \int dM M_{ab} \frac{\delta S}{\delta M_{ab}} e^{-NS} \end{aligned}$$

puis, sachant que dériver par rapport à M_{ab} et contracter ensuite par ce même facteur redonne le terme original, fois un coefficient dû à la symétrie :

$$0 = N^2 \int dM e^{-NS} - N \int dM M_{ab} M_{ba} e^{-NS} - N \int dM (\lambda \operatorname{tr} M^3) e^{-NS}$$

et divisant par Z :

$$0 = N^2 - N \langle M_{ab} M_{ba} \rangle + \lambda \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda},$$

soit finalement après simplification :

$$\frac{\lambda}{N^2} \frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{1}{N} \langle \operatorname{tr} M^2 \rangle + 1 = 0. \quad (2.16)$$

2.5 Gravité 2d

L'action euclidienne d'Einstein–Hilbert s'écrit ⁴

$$S_{EH} = \frac{1}{G} \int d^d x \sqrt{-g} \left(- (4\pi)^{-1} R + \Lambda \right), \quad (2.17)$$

où g , R , G et Λ sont respectivement le déterminant de la métrique, le scalaire de Ricci, la constante de Newton et la constante cosmologique. En deux dimensions, le premier terme est un invariant topologique [11] et vaut χ , tandis que l'intégrale sur le "volume" propre donne l'aire : A , d'où

$$S_{EH} = \frac{1}{G} (-\chi + \Lambda A). \quad (2.18)$$

On peut alors écrire la fonction de partition

$$Z = \sum_g \int dg e^{-S_{EH}} \sim \sum_g e^{\frac{1}{G} \chi - \frac{\Lambda}{G} A}, \quad (2.19)$$

où on a aussi sommé sur les topologies car les fluctuations quantiques peuvent changer le genre d'une surface.

L'énergie libre permet de conserver uniquement les diagrammes connectés. En utilisant la fonction de partition (2.8b), on obtient :

$$F = \sum_{g,n} e^{\chi \ln N + n \ln \lambda} \sum_{\left\{ \mathcal{G} \mid \begin{array}{l} g(\mathcal{G})=g, V(\mathcal{G})=n, \\ \mathcal{G} \text{ connecté} \end{array} \right\}} A(\mathcal{G}), \quad (2.20)$$

ce qui permet les identifications suivantes, en se souvenant de la relation $n \sim A$:

$$\ln N \sim \frac{1}{G}, \quad \ln \lambda \sim -\frac{\Lambda}{G}. \quad (2.21)$$

2.6 Modèle de matrices colorées

Considérons maintenant le modèle de matrices colorées introduit dans [13], et repris dans [18], qui consiste en trois matrices — non hermitiennes — M^i ($i = 1, 2, 3$), que nous prendrons carrées (contrairement à l'article) :

$$S = \sum_i \text{tr} M^i (M^i)^\dagger + \sqrt{\lambda} \text{tr} (M^1 M^2 M^3) + \sqrt{\lambda} \text{tr} ((M^3)^\dagger (M^2)^\dagger (M^1)^\dagger). \quad (2.22)$$

Maintenant, chaque ligne se voit attribuer une couleur, tandis que les brins et les faces en ont deux (figure 3b), indiquant à quelles lignes ils appartiennent. Le propagateur ne permet de relier qu'un M^i avec un $(M^i)^\dagger$ de la même couleur, tandis que l'interaction $\text{tr} \prod_i M^i$ et sa conjuguée sont représentées par des vertex trivalents, pour lesquels les couleurs sont respectivement alternées dans le sens horaire et dans le sens antihoraire — on parlera de vertex \oplus et \ominus (figures 3a et 3c). On obtient ainsi des graphes colorés bipartites (puisque'il ne peut y avoir de liens entre deux vertex du même type). Un exemple plus détaillé est donné sur la figure 4.

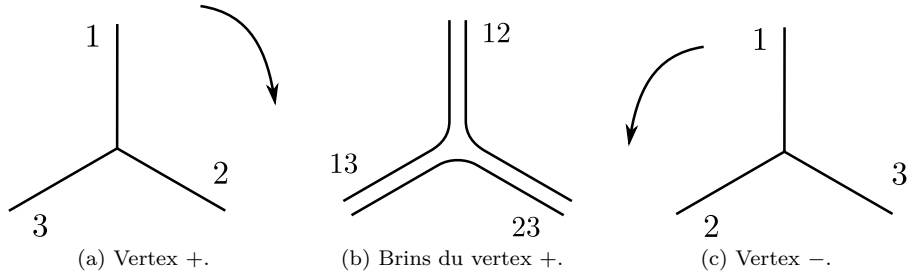


FIGURE 3 – Brins et couleurs des vertex dans le modèle de matrices colorés.

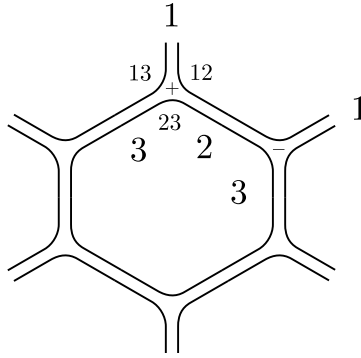


FIGURE 4 – Exemple de graphe coloré avec une face 23.

La représentation en diagrammes colorés contient exactement la même information que les graphes de ruban. Toutefois, ils ont l'avantage d'être plus rapides à utiliser et simplifieront grandement les dessins lorsque nous considérerons les tenseurs et que chaque ligne sera composée de d brins.

Le triangle dual du vertex devient aussi coloré :

- chaque côté possède une couleur ;
- chaque sommet possède deux couleurs.

Le collage de triangles doit alors se faire en respectant les couleurs.

On peut ajouter des termes supplémentaires à l'action afin de modéliser des systèmes différents, par exemple des dimères, des objets durs, Ising, etc. Toutefois, si nous souhaitons conserver les propriétés du modèle pur, il faut que ces termes supplémentaires respectent les mêmes règles que ceux de l'action (2.22) :

1. les couleurs doivent être ordonnées dans les produits de M^i ou de $(M^i)^\dagger$;
2. un produit $M^i(M^j)^\dagger$ est autorisé si $i = j$.

Tout terme construit de blocs respectant les deux conditions précédentes sont acceptables.

Notons qu'en intégrant sur deux des matrices colorées, on obtient une action effective pour une matrice non colorée (du type de celle étudiée dans les sections).

4. En partant de l'action euclidienne, on fait l'hypothèse implicite qu'il est ensuite possible de retrouver l'action lorentzienne [11]. Toutefois, les simulations en triangulation dynamique laissent penser que ces actions sont fondamentalement différentes [2].

3 Modèle de tenseurs : cas pur

Cette section se base principalement sur la revue de R. Gurau [18], ainsi que sur plusieurs séminaires donnés par ce dernier. Le détail des preuves des différentes propriétés peuvent y être trouvées.

3.1 Motivation

L'idée la plus simple pour généraliser les modèles de matrices pour $D > 2$ consisterait à remplacer ces dernières par des tenseurs de rang D . Toutefois, très peu des outils algébriques et analytiques disponibles pour les matrices sont disponibles pour les tenseurs : notion de valeurs propres, développement $1/N$, comptage de puissance, etc. Les progrès ont donc été confinés au domaine du numérique.

Nous allons abandonner ici les modèles de tenseurs non colorés, car ces derniers souffrent d'un autre grave problème, dont le remède se trouve être le même que celui permettant aux modèles de tenseurs colorés d'avoir un bon comportement : aussi étudierons-nous d'abord ces derniers, avant d'en venir sur les premiers à la fin de cette section.

Le majeur problème évoqué des tenseurs (GFT compris) est que les graphes dominants sont équivalents à des pseudo-variétés mal "triangulées", et les outils usuels ne peuvent plus être utilisés (par exemple la formule donnant la caractéristique d'Euler en fonction de la somme alternée des D -cellules du complexe) — c'est d'ailleurs pour cette raison que R. Gurau notait dans ses premiers papiers que ces objets étaient « plus singuliers que des pseudo-variétés », mais M. Smerlak a clarifié la situation [14, 23, 24]. Dans tous les cas, ces graphes sont difficiles à manipuler et l'introduction d'un indice de « couleur » a permis de s'en débarrasser, ainsi que de beaucoup d'autres graphes gênants, par exemple les tadpoles.

Par exemple, le tadpole n'est plus un graphe valide car il ne respecte pas les règles de liens entre les couleurs (figure 5).

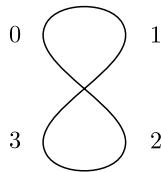


FIGURE 5 – Exemple de tadpole interdit avec les couleurs ($D = 3$).

3.2 Modèle simple

On introduit donc $D + 1$ tenseurs T^i de rang D , où $i = 0, \dots, D$ est l'indice de couleur. De même que dans le modèle de matrices colorées (section 2.6), on souhaite que les graphes générés soient bipartites et les vertex $(D + 1)$ -valent. L'action la plus naturelle est donc

$$S = \text{tr} \sum_i T^i \bar{T}^i + \frac{\sqrt{\lambda}}{N^\alpha} \text{tr} \left(: \prod_i T^i : + : \prod_i \bar{T}^i : \right), \quad (3.1)$$

où λ est la constante de couplage⁵. La puissance de N permet de contrôler la prolifération des vertex, comme nous le verrons un peu plus tard. On définit le symbole d'ordre des couleurs $: \dots :$ qui ordonne les T^i par ordre croissant de couleurs, et les $\bar{\delta} T^i$ dans l'ordre décroissant. Par exemple

$$: T^2 T^0 T^1 := T^0 T^1 T^2, \quad : \bar{T}^2 \bar{T}^0 \bar{T}^1 := \bar{T}^2 \bar{T}^1 \bar{T}^0.$$

Les diagrammes colorés admettent aussi une représentation en terme de brins, où chaque ligne en compte D , mais puisqu'elle est lourde et qu'elle n'apporte rien ici, nous ne l'utiliserons pas.

Les traces indiquent que les indices des tenseurs sont contractés de manière à former les "bons" invariants : dans l'interaction, chaque tenseur possède un indice contracté avec chacun des D autres [15] :

$$S_{\text{int}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{N^\alpha} T_{ijk}^0 T_{klm}^1 T_{mjn}^2 T_{nli}^3 + \text{c.c.} \quad (3.2)$$

La représentation en brins est adaptée pour montrer les contractions (figures 6). La trace de l'unité vaut évidemment N^D :

$$\text{tr } 1 = N^D. \quad (3.3)$$

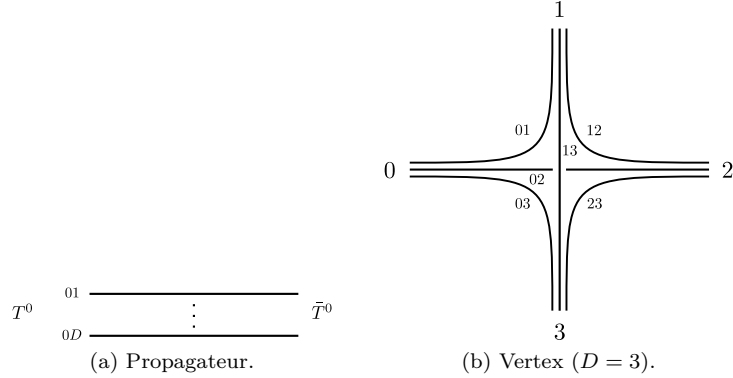


FIGURE 6 – Représentations en brins des termes du lagrangien.

La fonction de partition est simplement

$$Z = e^{N^D F} = \int dT e^{-S}, \quad (3.4)$$

en notant dT la mesure d'intégration sur les T^i et les \bar{T}^i . Cette mesure est purement formelle, et il est (actuellement) impossible d'en donner l'expression exacte.

Rappelons la relation simple à dériver :

$$\sqrt{x} \frac{d}{d(\sqrt{x})} = 2x \frac{d}{dx}. \quad (3.5)$$

⁵. Rappelons que nous n'explicitons pas les contractions des indices.

3.3 Topologie des graphes colorés

Dans cette section uniquement, nous noterons D le nombre de couleurs.

Les graphes colorés possèdent naturellement des propriétés combinatoires, au même titre que les variétés simpliciales. Deux concepts importants sont nécessaires avant d'étudier les graphes colorés :

- Une D -bulle d'un graphe est le sous-graphe maximalelement connecté composé des lignes avec D couleurs fixées.
- Une jacket d'un graphe contient tous les vertex et lignes de ce dernier, mais seulement une partie des faces.

Les jackets d'un graphe possèdent la même structure que des graphes de ruban, et donc leur associer une caractéristique d'Euler. On définit le degré d'un graphe coloré comme la somme des genres de ses jackets :

$$\omega(G) = \sum_{J \in \mathcal{G}} g(J) \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Pour $D = 2$, le graphe est lui-même sa seule jacket et le degré s'identifie au genre. Il est important de noter que pour $D \geq 3$ le degré n'est pas un invariant topologique, comme l'était le genre.

On peut définir des opérations de contractions/créations (appelées réduction de k -dipôle) qui préservent la combinatoire des graphes. À partir de là, on peut démontrer une formule entre le nombre de faces du graphes et le degré : Le nombre de faces d'un graphe D -coloré G avec $2p$ vertex est

$$F = \frac{(D-1)(D-2)}{2} p + (D-1) - \frac{2}{(D-2)!} \omega(G). \quad (3.7)$$

À $D = 3$, comme chaque vertex est trivalent, on a

$$F = p + 2 - 2\omega = 3p - 2p + 2 - 2\omega \longrightarrow 2 - 2\omega = V - L + F,$$

et ici ω est égal au genre.

On peut montrer que si $\omega(G) = 0$, alors G est dual à la D -sphère (la réciproque est valable pour $D = 2$) : plus tard, ces graphes seront associés aux melons.

3.4 Pavages

Pour $D > 2$, la triangulation se fait à partir de D -simplexes, qui sont les généralisations des tétraèdres en dimension supérieure. Le graphe dual est alors une pseudovariété simpliciale à D dimensions.

On peut reprendre l'identification des composantes du graphe avec celles d'un D -simplexe dual :

- vertex $\rightarrow D$ -simplexe ;
- ligne $\rightarrow (D-1)$ -simplexe (une couleur) ;
- face $\rightarrow (D-2)$ -simplexe (deux couleurs), etc.

Les collages des simplexes doivent se faire en respectant les couleurs. Un exemple est donné sur la figure 7.

La courbure se concentrera aussi au niveau des $(D-2)$ -simplexes [2, 11, 19].

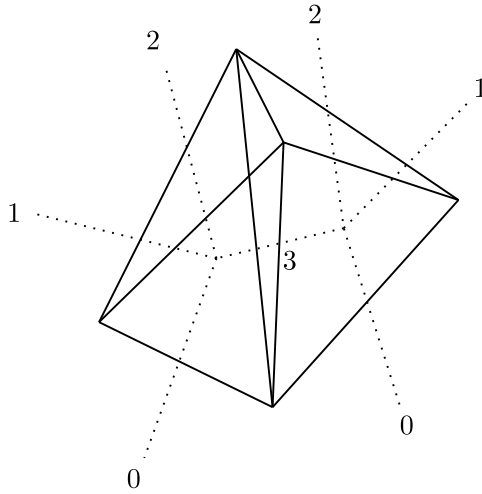


FIGURE 7 – Complexe, formé de deux tétraèdres, dual à deux vertex ($D = 3$). Les triangles sont duaux aux lignes et ont donc une seule couleur, tandis que les arêtes, duales aux faces, en possèdent deux.

3.5 Tenseurs non colorés

Les tenseurs non colorés sont détaillés dans l'article [8]. Nous n'en dirons que quelques mots ici.

On considère un tenseur T de rang D dont les composantes sont des variables aléatoires indépendantes et complexes, et dont chaque indice peut prendre les valeurs de 1 à N :

$$T_{a_1 \dots a_D} \in \mathbb{C} \quad a_i = 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

Lors d'une transformation, chaque indice est transformé indépendamment :

$$T'_{b_1 \dots c_D} = U_{b_1 a_1}^{(1)} \dots U_{b_D a_D}^{(D)} T_{a_1 \dots a_D}, \quad (3.9)$$

où les matrices $U^{(i)}$ sont toutes indépendantes. Et le tenseur conjugué \bar{T} sera transformé par les $\bar{U}^{(i)}$. Ainsi, pour qu'une combinaison de tenseurs soit invariante, il faut que chaque index en position i d'un T soit contracté avec un indice à la position i d'un \bar{T} : en effet, si deux indices en positions différentes sont contractés, alors une transformation amènera une multiplication de deux matrices différentes, par exemple $U_{ac}^{(i)} \bar{U}_{cb}^{(j)}$, qui ne donnera δ_{ab} que si $i = j$. De fait, les interactions ne sont plus locales, au sens de la théorie des champs habituelles, mais les invariants que nous avons décrits en donnent une généralisation adaptée.

À chaque invariant il est possible d'associer un graphe D -coloré : on représente les facteurs T et \bar{T} respectivement par un cercle vide (vertex blanc) et un cercle plein (vertex noir), et on associe D lignes à chaque vertex, numérotées de 1 à D . Par exemple

$$T\bar{T} = \delta_{a_1 b_1} \dots \delta_{a_D b_D} T_{a_1 \dots a_D} \bar{T}_{b_1 \dots b_D} \quad (3.10)$$

est représenté par un vertex noir et un blanc reliés par D lignes. Un tel ensemble de vertex et de lignes forme une bulle, et l'action consiste à la somme sur l'ensemble des bulles envisageables, chacune associée à une constante de couplage.

De même, le terme $T\bar{T}\bar{T}$ possède deux représentations différentes. Les propagateurs permettent alors de coller les bulles ensemble. Ces graphes sont en fait colorés et on peut réutiliser tous les outils que nous avons pour les modèles de tenseurs colorés.

Un modèle de tenseurs non colorés peut s'obtenir soit en intégrant toutes les couleurs sauf une du modèle coloré, soit en cherchant à écrire une action directement avec les invariants expliqués dans la première section.

4 Comportement critique

Cette section se base sur [6, 18].

4.1 Expansion $1/N$

Évaluons la contribution à la fonction de partition (4.4) d'un graphe G avec $V = 2p$ vertex et F faces. Chaque vertex vient avec un vacteur $\sqrt{\lambda}N^{-\alpha}$ et les faces avec un facteur N :

$$A(G) \sim \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{N^\alpha}\right)^V N^F \sim N^{F-2\alpha p}. \quad (4.1)$$

Si $\alpha = 0$, alors les diagrammes possédant un grand nombre de faces contribuent beaucoup et la somme sera divergente. À l'opposé, si $\alpha = \infty$, les graphes avec un grand nombre de vertex sont supprimés, et ce n'est pas non plus ce que nous souhaitons. Finalement nous pouvons nous attendre à ce que la bonne valeur dépende de la dimension. La valeur correcte est

$$\alpha = \frac{D(D-1)}{4}, \quad (4.2)$$

et nous montrerons a posteriori quelle convient. Dans ce cas la partie d'interaction de l'action (c'est-à-dire sans termes quadratiques) s'écrit (3.1) s'écrit

$$S_{\text{int}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{N^{\frac{D(D-1)}{4}}} \text{tr} \left(: \prod_i T^i : + : \prod_i \bar{T}^i : \right). \quad (4.3)$$

En effectuant le changement d'échelle $T \rightarrow N^{D/4}T$, la fonction de partition (3.4) s'écrit

$$Z = e^{N^D F} = \int dT e^{-N^{D/2} \left(\text{tr} \sum_i T^i \bar{T}^i + \sqrt{\lambda} \text{tr} : \prod_i T^i : + \sqrt{\lambda} \text{tr} : \prod_i \bar{T}^i : \right)}. \quad (4.4)$$

En utilisant la formule (3.7) reliant le nombre de faces et le degré⁶ :

$$N^{F - \frac{D(D-1)}{2}p} = N^{D - \frac{\omega}{(D-1)!}}.$$

Comme le degré est un entier positif et grâce au signe moins qui le précède, il s'agit d'un bon paramètre pour obtenir une expansion en $1/N$ de l'énergie libre :

$$N^D F = \sum_{\omega \geq 0} N^{D - \frac{\omega}{(D-1)!}} F_\omega(\lambda) \approx N^D F_0(\lambda). \quad (4.5)$$

6. Rappelons que pour obtenir le bon résultat, il faut faire le remplacement $D \rightarrow D + 1$.

où la somme est restreinte aux graphes connexes. En réalité, nous avons affaire à deux développements distincts : l'un topologique (qui a un sens même si ω n'est pas un invariant), l'autre combinatoire. Heureusement, l'ordre dominant est donné par $\omega = 0$ dans les deux cas : on obtient les D -sphères pour le premier ⁷, et les melons pour le second.

Les melons constituent une sous-classe des graphes duaux à la sphère S^D . Les graphes meloniques sont composés d'un melon primaire, qui est le graphe le plus simple que l'on puisse avoir : il s'agit de deux vertex reliés par les $(D + 1)$ lignes colorées (figure 8a). À partir de là, les autres graphes meloniques s'obtiennent en insérant des melons sur les lignes internes (figures 8c et 8b). Les graphes meloniques peuvent être mappés à des arbres, ce qui permet de les compter et de déterminer certaines de leurs propriétés.

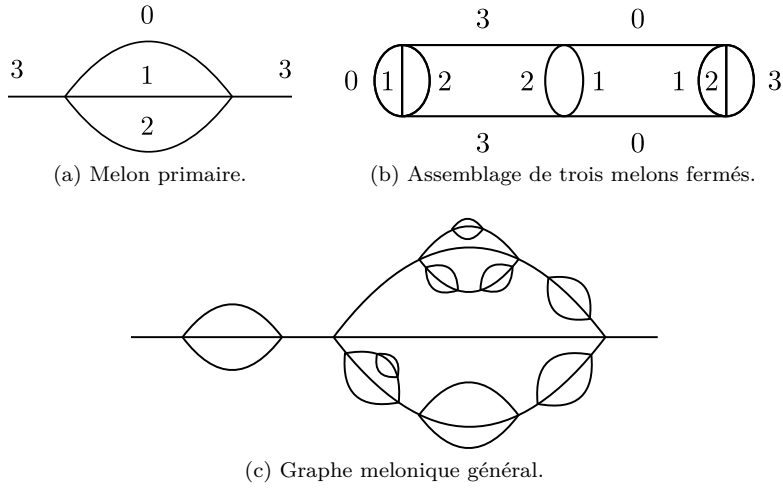


FIGURE 8 – Graphes à topologie sphérique ($D = 3$).

Donnons quelques pistes pour justifier les melons. Si $\omega = 0$, alors

$$D + \frac{D(D-1)}{4}V - F = 0, \quad (4.6)$$

et on se ramène à un problème de combinatoire qui consiste à maximiser le nombre de faces à V fixé. Soit F_2 le nombre de faces pour deux vertex, alors on peut montrer que

$$F_2 \geq 0 \quad D = 2, \quad F_{2V} > 0 \quad D \geq 3. \quad (4.7)$$

Cette différence de comportement est consistante avec le fait que l'on obtient des graphes planaires pour $D = 2$ (même si cette seule inégalité ne permet pas de conclure à elle seule que l'on obtient bien les graphes planaires), et un autre type de graphe pour $D \geq 3$. En fait, il est même possible d'obtenir une formule explicite : cette dernière contient un terme en $D(D-3)V$, plus uniquement des termes positifs [6].

⁷ Il s'agit d'une implication et non d'une équivalence : par exemple, certains graphes ayant $\omega = 1$ sont aussi topologiquement équivalents à la D -sphère.

Maintenant, deux vertex seront connectés par D lignes, et on détermine facilement le nombre de faces (chacune ayant deux couleurs) :

$$F = \frac{D(D-1)}{2}. \quad (4.8)$$

Nous retrouvons le graphe de la figure 8a.

4.2 Équations de Schwinger–Dyson et de consistance

Avant de continuer, nous allons déterminer la fonction à deux points

$$\langle T_{m_1 \dots m_D}^c \bar{T}_{n_1 \dots n_D}^c \rangle = N^{-D/2} U \prod_i \delta_{m_i n_i} \quad (4.9)$$

grâce aux équations de Schwinger–Dyson :

$$\text{tr} \int dT \frac{\delta}{\delta T^c} \left(F^c(T^{c'}) e^{-N^{D/2} S} \right) = 0 \quad (4.10)$$

(l'indice de couleur c n'est pas sommé et n'importe pas puisque l'action est invariante par changement de couleur). En prenant $F^c(T^{c'}) = T^c$, on procède à un calcul similaire au cas matriciel :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{Z} \text{tr} \int dT \frac{\delta}{\delta T^c} \left(T^c e^{-N^{D/2} S} \right) \\ &= N^D - N^{D/2} \text{tr} \langle T^c \bar{T}^c \rangle - N^{D/2} \sqrt{\lambda} \text{tr} \left\langle : \prod_i T^i : \right\rangle \end{aligned}$$

puis en ajoutant l'équation conjuguée, en divisant par N^D et en utilisant la définition de U :

$$= 1 - U + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \frac{dF}{d\sqrt{\lambda}}.$$

Ainsi, en utilisant la relation (3.5), on obtient

$$\lambda \frac{dF}{d\lambda} = U - 1. \quad (4.11)$$

En fait, les équations de Schwinger–Dyson permettent de relier une fonction à n points aux fonctions de plus de n points, et il n'est pas toujours possible de fermer le système obtenu. Nous pouvons le faire dans le secteur melonique (qui est étudié plus bas) car toute fonction à n points s'exprime selon des puissances de la fonction à deux points. L'ensemble de ces équations généralise l'algèbre de Virasoro [16].

Si F se comporte comme

$$F \sim (\lambda_c - \lambda)^{2-\gamma}, \quad (4.12)$$

alors

$$U \sim (\lambda_c - \lambda)^{1-\gamma}. \quad (4.13)$$

En notant C le propagateur et Σ la self-énergie, alors la fonction à deux points est donnée par

$$U = \sum_{n \geq 0} C(\Sigma C)^n = \frac{C}{1 - \Sigma C}, \quad (4.14)$$

car la somme est géométrique, d'où

$$U(1 - \Sigma C) = C,$$

et en multipliant à droite par C^{-1} (en fait, cela n'a pas d'importance ici comme il n'y a qu'un champ, mais de cette manière nous prenons en compte le cas où les différents objets sont des matrices, c'est-à-dire quand il y a plusieurs champs) :

$$U(C^{-1} - \Sigma) = 1. \quad (4.15)$$

4.3 Secteur melonique

Nous avons vu que l'ordre dominant $\omega = 0$ était constitué de ce que l'on appelle des melons. À cet ordre, la self-énergie s'obtient alors simplement en insérant la fonction à deux points (au même ordre) sur toutes les couleurs sauf une :

$$\Sigma = \overset{D}{\text{---}} \textcircled{\Sigma} \overset{D}{\text{---}} = \overset{D}{\text{---}} \textcircled{\begin{array}{c} U \\ \vdots \\ U \end{array}} \overset{D}{\text{---}} = \lambda U^D. \quad (4.16)$$

En combinant cette équation avec (4.15), on obtient l'équation primordiale

$$1 - U + \lambda U^{D+1} = 0 \quad (4.17)$$

pour $C = 1$. Il s'agit d'une équation très connue en combinatoire. Elle apparaît dans un problème de comptage d'arbres, et elle peut être résolue dans ce cadre-là. La solution est

$$U = \sum_{p=0} C_p^{(D+1)} \lambda^p, \quad (4.18)$$

où

$$C_p^{(D+1)} = \frac{1}{(D+1)p+1} \binom{(D+1)p+1}{p} \quad (4.19)$$

sont les $(D+1)$ -nombres de Catalan.

Le comportement asymptotique de U est

$$U \sim_{\infty} A g_c^{-p} p^{-3/2}, \quad (4.20)$$

avec

$$\lambda_c = \frac{D^D}{(D+1)^{D+1}}, \quad (4.21a)$$

$$A = \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{D+1}}{D^{3/2}}. \quad (4.21b)$$

λ_c correspond ainsi à la valeur critique de la constante de couplage, qui permet d'atteindre la limite continue. Ces valeurs s'obtiennent simplement en prenant le développement limité de $C_p^{(D+1)}$. Au voisinage de λ_c , U se comporte comme

$$U_c \sim (\lambda_c - \lambda)^{1/2}. \quad (4.22)$$

L'équation (4.13) nous donne l'exposant critique d'entropie

$$\gamma = \frac{1}{2}. \quad (4.23)$$

Nous avons trouvé $\gamma = -1/2$ dans le cas des matrices, et les deux modèles se trouvent dans des classes d'universalité différentes. Cette différence de 1 est due à l'intégration qui nous a permis d'obtenir F à partir de U .

Une autre méthode consiste à considérer l'équation (4.17) comme définissant une fonction implicite $U = U(\lambda)$. Le théorème des fonctions implicites nous dit que cela n'est plus vrai lorsque la dérivée de λ par rapport à U est nulle :

$$\left. \frac{d\lambda}{dU} \right|_{U_c, \lambda_c} = 0. \quad (4.24)$$

Ainsi, en annulant cette dérivée, on peut obtenir les valeurs critiques désirées :

$$\lambda = \frac{U-1}{U^{D+1}} \implies \frac{d\lambda}{dU} = \frac{1}{U^{D+2}}(-DU + (D+1)) = 0,$$

d'où

$$U_c = \frac{D+1}{D}. \quad (4.25)$$

En injectant cette valeur dans (4.17), on retrouve la valeur critique du couplage (4.21a). De plus, nous pouvons développer λ en puissance de U :

$$\lambda(U) = \lambda(U_c) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\lambda}{dU^2} \right|_{\lambda_c} (U - U_c)^2, \quad (4.26)$$

car la dérivée première est nulle. On peut inverser cette relation pour obtenir

$$U - U_c \sim (\lambda_c - \lambda)^{1/2}. \quad (4.27)$$

Cette approche permet d'aller plus loin : en effet, on apprend ainsi que si la dérivée seconde s'annule aussi, alors il est nécessaire de pousser le développement à l'ordre 3 et on aura un exposant γ différent, ce qui peut se produire uniquement pour un sous-domaine de la variété critique. Ce genre de comportement — appelé multicritique — peut apparaître dès que nous disposons de plusieurs variables, comme nous le verrons dans les sections suivantes. Dans ce cas, l'exposant critique sera donné par

$$\gamma = 1 - \frac{1}{m} \quad (4.28)$$

si toutes les dérivées k^e ($k < m$) sont nulles. Avec les matrices, nous aurions obtenu $\gamma = -1/m$. Notons que dans le cas libre $\lambda = 0$, l'équation de consistance (4.17) donne

$$\lambda = 0 \implies U = 1. \quad (4.29)$$

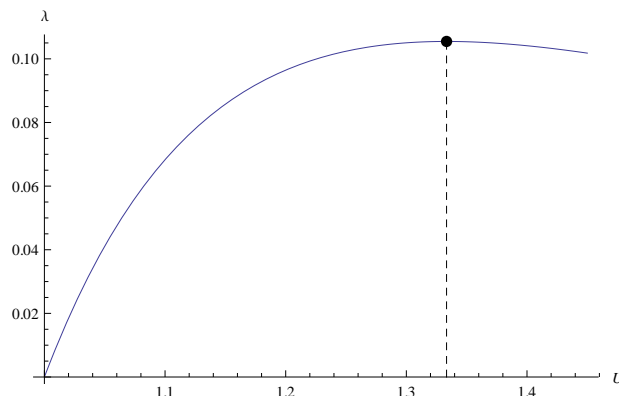


FIGURE 9 – Graphe de la constante de couplage $U(\lambda)$ ($D = 3$). Le point critique est situé au maximum de la courbe, pour $U_c = 4/3$ et $\lambda_c = 3^3/4^4 \approx 0.105$. On a bien $U = 1$ pour $\lambda = 0$.

Ces informations sont résumées sur le graphe 9.

Finalement, notons que toutes les fonctions de corrélation peuvent s'exprimer à partir de la fonction à deux points (corrélation gaussienne) : toutefois cette dernière présente n'est pas triviale (comportement singulier, etc.) et apporte toute la richesse au modèle.

4.4 Universalité, gravité quantique et renormalisation

Le lien avec la gravité quantique et les triangulations dynamiques est discuté dans [18]. Notons seulement que la limite continue semble coïncider avec la phase de polymères branchés des triangulations dynamiques [5, 18].

Les modèles de tenseurs tels que nous les décrivons ne possèdent pas de flots de renormalisation, du fait de l'absence de dérivées dans le propagateur. Toutefois, comme nous l'avons vu, il reste possible de se positionner au point critique.

Un modèle non coloré (pour $D = 4$) doté d'un propagateur non trivial $-\nabla^2 + m^2$ est étudié dans [4] : cette théorie est renormalisable à tous les ordres.

La question de l'universalité est soulevée dans [22] et étudiée dans [17].

5 Dimères

5.1 Introduction et définitions

Dans cette section, nous allons reprendre le modèle de dimères de V. Bonzom [5], en modifiant légèrement les couplages afin d'obtenir une limite thermodynamique plus naturelle. Nous nous baserons sur l'action (3.1).

On cherche à introduire, sur certains liens du réseaux, des dimères : on cherche à remplacer $n_k = d + 1 - k$ liens internes par des liens durs (les dimères) — qui ne peuvent plus se lier à autre chose —, laissant alors k couleurs à l'extérieur, notées $\{c_1, \dots, c_k\}$. Par exemple sur la figure 10, on a remplacé les liens 2 et 3 par des dimères ; du point de vue extérieur, on aura seulement des liens avec les couleurs 0 et 1, correspondant à un opérateur $T^0 \bar{T}^0 T^1 \bar{T}^1$.

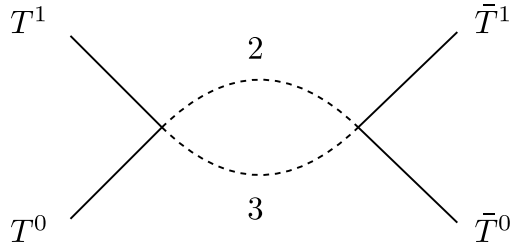


FIGURE 10 – Graphe effectif pour une interaction avec des dimères sur les couleurs 2 et 3. Ces derniers sont indiqués par les traits discontinus.

Ce graphe effectif donne une idée quant à la manière de construire l'action : représenté de cette manière, on peut voir l'interaction comme deux vertex S_+ et S_- , ce qui nous conduit à adopter un facteur

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{N^{\frac{d(d-1)}{4}}} \right)^2 = \frac{1}{g} \frac{1}{N^{\frac{d(d-1)}{2}}}.$$

En l'absence de dimère, chaque face contribue aussi à un facteur N , et on est donc conduit à rajouter un facteur N^F si l'on souhaite obtenir le même comportement. Le nombre de faces est $F = n_k(n_k - 1)/2$ (toutes les manières possibles d'associer deux dimères). Dans ce cas, on aura une puissance de N

$$\frac{(d+1-k)(d-k)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = -\frac{(k-1)(2d-k)}{2}.$$

Ensuite, un facteur g pour chacun des n_k dimères permet de mimer les facteurs dûs aux propagateurs⁸. Finalement, on ajoute une constante de couplage z_{d-k} , appelée activité. On peut ainsi écrire l'action pour laquelle on a n_k polymères internes de couleurs $\{0, \dots, d\} - \{c_1, \dots, c_k\}$:

$$S_d^{\{c_1, \dots, c_k\}} = \frac{g^{d-k} z_{d-k}}{N^{\frac{(k-1)(2d-k)}{2}}} \prod_{c=1}^k T^c \bar{T}^c. \quad (5.1)$$

Avec cette notation, le graphe dessiné correspond à $S_d^{\{0,1\}}$.

Chaque ligne et chaque vertex contribuent donc respectivement par un facteur g et $g^{-1/2}$ à l'amplitude du graphe, soit

$$A(G) \sim g^L g^{-\frac{V}{2}} = g^{dn}, \quad (5.2)$$

où on a noté $n = V/2$. En effet, un vertex est $(d+1)$ -valent, et une ligne appartient à deux vertex, donc

$$2L = (d+1)V \quad (5.3)$$

Notons que g et g^d ont le même comportement critique : sachant que $g/g_c \rightarrow 1$, on a

$$g_c^d - g^d = g_c^d \left(1 - \left(\frac{g}{g_c} \right)^d \right) \approx g_c^{d+1} d (g_c - g),$$

⁸. Ce facteur était omis dans le papier [5], d'où les conclusions différentes que nous aurons.

et donc

$$(g_c^d - g^d)^{2-\gamma} \sim (g_c - g)^{2-\gamma}. \quad (5.4)$$

On peut donc considérer aussi bien g que g^d .

Des "dimères" plus compliqués peuvent être imaginés (figure 11), mais on s'attend à ce qu'ils appartiennent à la même classe d'universalité.

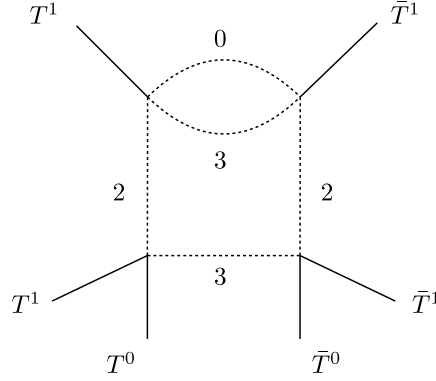


FIGURE 11 – Graphe effectif un dimère plus complexe, avec une interaction du type $T^0\bar{T}^0T^1\bar{T}^1T^1\bar{T}^1$.

On posera $z_1 = 0$, car les interactions associées peuvent conduire à l'apparition de melons supplémentaires (figure 12), qui rendraient la combinatoire plus compliquées, sans changer fondamentalement le résultat.

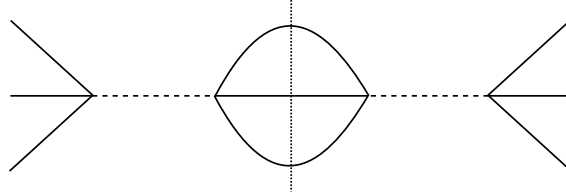


FIGURE 12 – Deux graphes avec un dimère, par exemple correspondant à $S_d^{\{0,1,2\}}$, conduisent à la formation de melon en reliant les lignes extérieures.

5.2 Comportement critique

Afin de déterminer la fonction à deux points, nous allons utiliser la même méthode que précédemment : à la somme géométrique (4.14)

$$(1 - g\Sigma)U = g \quad (5.5)$$

on adjoint l'expression explicite de la self-énergie Σ

$$\Sigma = \frac{1}{g}U^d + \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} z_{d-k} g^{d-k-1} U^k, \quad (5.6)$$

que l'on obtient en remplaçant par des dimères $2, \dots, d$ des lignes internes, et en insérant la fonction à deux points complètes sur les lignes restantes. Les deux

vertex donnent un facteur g , tandis que que les dimères internes donnent chacun un facteur g . Le binôme tient en compte les différentes manières de disposer les dimères.

En insérant la première équation dans la seconde, on obtient

$$U - U^{d+1} - g \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} z_{d-k} g^{d-k-1} U^{k+1} = g$$

$$U - U^{d+1} - g^{d+1} \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} z_{d-k} \left(\frac{U}{g}\right)^{k+1} = g,$$

soit, après un changement de variable et simplification :

$$\tilde{U} - g^d \tilde{U}^{d+1} - g^d \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} z_{d-k} \tilde{U}^{k+1} = 1, \quad U = g\tilde{U}. \quad (5.7)$$

On peut alors isoler

$$h = g^d = \frac{\tilde{U} - 1}{\tilde{U}^{d+1} + \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} z_{d-k} \tilde{U}^{k+1}}. \quad (5.8)$$

Remarquons que l'on retrouve la valeur usuelle pour $z_k = 0, \forall k$.

On obtient alors une équation implicite pour (\tilde{U}, h) , en apparence plus compliquée que celle obtenue dans [5]. On obtient la valeur critique de U lorsque la dérivée de g s'annule. Or le changement de variable $(U, g) \rightarrow (\tilde{U} = h^{-1/d}U, h = g^d)$ implique que les dérivées de g par rapport à g et de \tilde{U} par rapport à h sont toutes les deux nulles, si une l'est :

$$\frac{dg}{dU} = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial U}}_{=0} \frac{\partial g}{\partial h} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial U} \frac{\partial g}{\partial \tilde{U}} = \frac{1}{h^{1/d}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{U}} \sim \frac{\partial h}{\partial \tilde{U}}.$$

De plus, comme

$$\frac{\partial h^{-1}}{\partial \tilde{U}} = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \tilde{U}},$$

nous nous contenterons de calculer la dérivée de h^{-1} par rapport à \tilde{U} :

$$\frac{\partial h^{-1}}{\partial \tilde{U}} = \frac{1}{(\tilde{U} - 1)^2} \left[\left((d+1)\tilde{U}^d + \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} z_{d-k} (k+1) \tilde{U}^k \right) (\tilde{U} - 1) - \tilde{U}^{d+1} - \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} z_{d-k} \tilde{U}^{k+1} \right],$$

soit

$$d\tilde{U}^{d+1} - (d+1)\tilde{U}^d + \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} z_{d-k} (k\tilde{U}^{k+1} - (k+1)\tilde{U}^k) = 0,$$

puis, en sortant le premier terme et en renommant les indices :

$$d\tilde{U}^{d+1} - (d+1)\tilde{U}^d - z_d + \binom{d}{d-2}(d-2)z_2\tilde{U}^{d-1} - 2dz_{d-1}\tilde{U} \\ + \sum_{k=2}^{d-2} \tilde{U}^k \left[\binom{d}{k-1}(k-1)z_{d-k-1} - \binom{d}{k}(k+1)z_{d-k} \right] = 0.$$

On remarque que l'on peut isoler z_d sans faire apparaître de fraction rationnelle, contrairement à ce que l'on aurait pu s'attendre :

$$z_d = d\tilde{U}^{d+1} - (d+1)\tilde{U}^d + \frac{d(d-1)(d-2)}{2}z_2\tilde{U}^{d-1} - 2dz_{d-1}\tilde{U} \\ + \sum_{k=2}^{d-2} \tilde{U}^k \left[\binom{d}{k-1}(k-1)z_{d-k-1} - \binom{d}{k}(k+1)z_{d-k} \right]. \quad (5.9)$$

z_d s'exprime ainsi en fonction de \tilde{U} et des autres activités, tant que la dérivée est différente de zéro. Dans ce dernier cas, on peut alors exprimer z_{d-1} en fonction des autres activités, et ce sans faire apparaître de fraction rationnelle puisque le terme est linéaire en \tilde{U} (ceci sera d'ailleurs vrai pour tout z_i). Sachant que

$$\frac{\partial z_d}{\partial \tilde{U}} \sim \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{U}^2} = 0, \quad (5.10)$$

on obtient un comportement multicritique, car on a

$$h(U) = h(\tilde{U}_c) + \frac{1}{3} \frac{d^3 h}{d\tilde{U}^3} \Big|_{\tilde{U}_c} (\tilde{U} - \tilde{U}_c)^3, \quad (5.11)$$

soit, en notant $h_c = h(\tilde{U}_c)$:

$$(\tilde{U} - \tilde{U}_c) \sim (h - h_c)^{1/3}. \quad (5.12)$$

Plus généralement, si les dérivées de h à partir de la m^e sont non nulles :

$$\frac{\partial^k h}{\partial \tilde{U}^k} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m-1 \quad \frac{\partial^m h}{\partial \tilde{U}^m} \neq 0, \quad (5.13)$$

cela signifie qu'il y a $m-1$ relations entre les activités (donc $m = 2, \dots, d$). Dans ce cas, le développement de Taylor de h donne, après inversion :

$$(U - U_c) \sim (g - g_c)^{1/m}. \quad (5.14)$$

L'exposant critique d'entropie défini par (4.13) vaut ainsi :

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{m-1}{m}. \quad (5.15)$$

Nous retrouvons bien le résultat annoncé à la fin de la section précédente.

5.3 Cas $d = 3$

Dans le cas $d = 3$, on obtient les relations suivantes :

$$h^{-1} = \frac{\tilde{U}(\tilde{U}^3 + 3z_2\tilde{U} + z_3)}{\tilde{U} - 1}, \quad (5.16a)$$

$$z_3 = -4\tilde{U}^3 + 3\tilde{U}^4 + 3z_2(\tilde{U}^2 - 2\tilde{U}), \quad (5.16b)$$

$$z_2 = -2\tilde{U}^2. \quad (5.16c)$$

En observant le polynôme (5.16b), on remarque que seules des valeurs négatives de z_2 permettront d'obtenir un comportement intéressant, c'est à dire de pouvoir créer des minima et maxima, ou de les faire fusionner (figure 13).

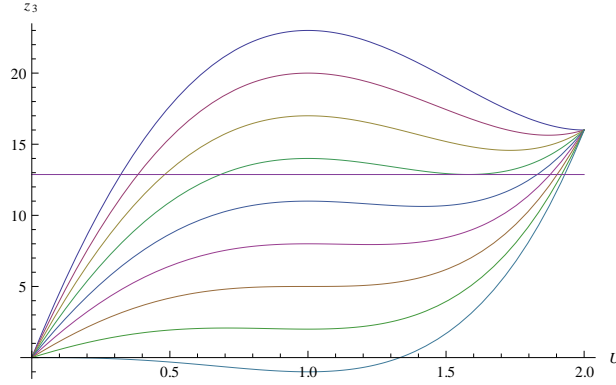


FIGURE 13 – Courbes $z_3(\tilde{U})$ pour $z_2 = -8, \dots, 0$. Pour une valeur z_2 comprise entre -3 et -4 , le minimum disparaît, avant de laisser place à un maximum suivi d'un minimum. La ligne donne la valeur $z_{3c} = 12.87$.

Nous nous plaçons sur la ligne critique où la dérivée de h s'annule. Notre objectif est de déterminer un chemin qui nous emmène de l'origine $(z_2, z_3) = (0, 0)$ ($\tilde{U} = 4/3$ en ce point, d'après la formule (4.25)) à un point (z_{2c}, z_{3c}) qui est multicritique :

1. Se déplacer de $z_3 = 0$ à $z_{3c} = 12.87$, en gardant $z_2 = 0$. À la fin, on a $\tilde{U} = 1.93$.
2. La résolution numérique de (5.16b) permet d'obtenir \tilde{U} comme une fonction de z_2 , et donc des chemins qui vont de $z_2 = 0$ à $z_2 = -5$ (figure 14), point où la dérivée seconde s'annule à son tour : cela se voit en remarquant que deux racines se rejoignent.
3. Au delà de ce point, les deux racines développent une partie imaginaire et il n'est pas possible de continuer.

En faisant des développements limités des différentes équations autour du point critique, on peut déterminer différents exposants critiques :

$$U - U_c \sim (z_2 - z_{2c})^{1/2}, \quad U - U_c \sim (z_3 - z_{3c})^{1/2}. \quad (5.17)$$

Ce chemin est prometteur mais nous sommes face à un épineux problème : si z_2 est négatif, alors la valeur de la constante de couplage devient nécessairement

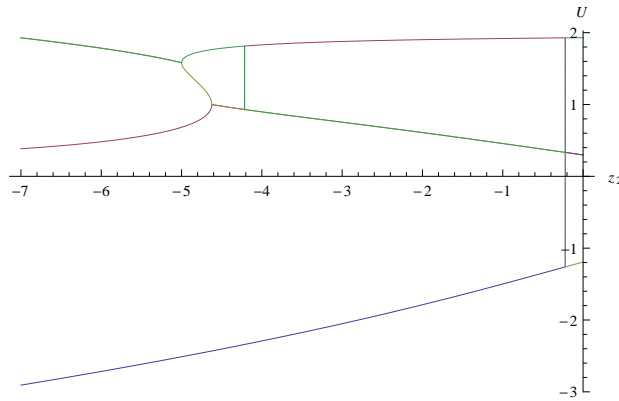


FIGURE 14 – Tracé du chemin $\tilde{U}(z_2)$ pour atteindre le point tricritique $z_2 = -5$. z_3 reste fixé à sa valeur z_{3c} . Les traits verticaux et les changements de couleurs sont des artefacts numériques ; la ligne physique est la plus haute, qui part de $\tilde{U} = 1.93$ et qui alterne vert-rouge-vert.

infinie, ce qui posera problème pour retourner à la variable initiale $U = h^{1/d}\tilde{U}$ (figure 15). Au final, il ne sera jamais possible d'atteindre le point multicritique. L'étude n'a pas été poussée pour les dimensions supérieures à 3, mais le comportement ne doit pas être fondamentalement différent de ceux qui étaient observés dans [5] (un modèle avec un chemin menant à un point multicritique était présenté pour $d = 6$).

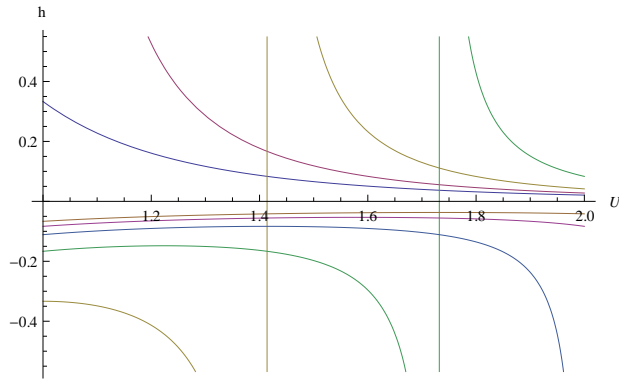


FIGURE 15 – Valeur de la constante de couplage $h(\tilde{U})$ pour $z_2 = -6, \dots, -1$.

6 Dimère unique

6.1 Définition du modèle

Dans ce projet, nous considérons l'ajout d'un seul et unique dimère sur chaque lien, nous rapprochant ainsi des systèmes étudiés plus traditionnellement avec les modèles de matrices (par exemple [25]). En ce sens, l'analyse se

rapproche plus de celle du modèle d'Ising [7]. On notera d la dimension des tenseurs.

Afin de représenter les dimères, on ajoutera un ensemble de champs tensoriels χ^i supplémentaires à l'action habituelle (3.1), avec l'interaction suivante :

$$S_d = \sqrt{\lambda z} : \sum_i \chi^i \prod_{c \neq i} T^c : + \text{h.c.}, \quad (6.1)$$

avec une généralisation évidente du symbole d'ordre des couleurs. Par exemple, pour $d = 3$, on aura

$$S_d = \sqrt{\lambda z} \left(T^0 T^1 T^2 \chi^3 + T^0 T^1 \chi^2 T^3 + T^0 \chi^1 T^2 T^3 + \chi^0 T^1 T^2 T^3 + \text{h.c.} \right).$$

On utilisera aussi le propagateur trivial $\sum_i \chi^i \bar{\chi}^i$. On notera S_{int} l'action sans terme quadratique, c'est-à-dire

$$S_{\text{int}} = S_{\text{int}}^0 + S_d, \quad (6.2)$$

où S_{int}^0 est l'interaction dans le modèle pur (4.3).

On considère la forme (4.4) de la fonction de partition avec un champ supplémentaire :

$$Z = e^{N^d F} = \int dT d\chi e^{-N^{d/2} S}. \quad (6.3)$$

L'énergie libre se développe comme

$$N^d F(\lambda, z) = \sum_{n>0} \lambda^n \sum_{\{G_n\}} N^{d - \frac{2}{(d-1)!} \omega(G_n)} \sum_{\{D(G_n)\}} z^{|D|}, \quad (6.4)$$

où n est le nombre de vertex divisé par deux, $\{D(G_n)\}$ l'ensemble des configurations possibles de dimères sur le graphe G_n et $|D|$ leur nombre. On peut réécrire

$$N^d F(\lambda, z) = \sum_{\omega \geq 0} N^{d - \frac{2}{(d-1)!} \omega} f_\omega \approx N^d f_0, \quad (6.5)$$

avec

$$f_\omega = \sum_{n \geq 0} \sum_{\{G_n | \omega(G_n) = \omega\}} \sum_{\{D(G_n)\}} z^{|D|}. \quad (6.6)$$

6.2 Équations de consistance

Il sera donc nécessaire de considérer la matrice des fonctions à deux points (propagateurs effectifs)

$$G = \frac{1}{N^{d/2}} \begin{pmatrix} U & W \\ W & V \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} U &\sim \langle T^c \bar{T}^c \rangle, V \sim \langle \chi^c \bar{\chi}^c \rangle, \\ W &\sim \langle T^c \bar{\chi}^c \rangle = \langle \chi^c \bar{T}^c \rangle, \end{aligned} \quad (6.7)$$

où l'on fait apparaître explicitement la dépendance en N , où \sim signifie que l'on a extrait les D symboles de Kronecker qui identifient l'indice i du premier tenseur à l'indice i du second. La self-énergie Σ est

$$\Sigma = N^{d/2} \begin{pmatrix} \Sigma_U & \Sigma_W \\ \Sigma_W & \Sigma_V \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Elle est donnée par la somme géométrique usuelle (4.15) :

$$\Sigma(C^{-1} - G) = \text{id}, \quad (6.9)$$

où la covariance inverse est

$$C^{-1} = N^{d/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Déterminons explicitement ces relations :

$$\frac{1}{N^{d/2}} \begin{pmatrix} U & W \\ W & V \end{pmatrix} \left[N^{d/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - N^{d/2} \begin{pmatrix} \Sigma_U & \Sigma_W \\ \Sigma_W & \Sigma_V \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U & W \\ W & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \Sigma_U & -\Sigma_W \\ -\Sigma_W & 1 - \Sigma_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne l'ensemble d'équations

$$U(1 - \Sigma_U) - W\Sigma_W = 1, \quad (6.11a)$$

$$V(1 - \Sigma_V) - W\Sigma_W = 1, \quad (6.11b)$$

$$W(1 - \Sigma_V) - U\Sigma_W = 0, \quad (6.11c)$$

$$W(1 - \Sigma_U) - V\Sigma_W = 0. \quad (6.11d)$$

Notons que l'une des deux dernières équations est redondante par rapport à l'autre.

Le calcul des self-énergies se fait aisément avec la méthode diagrammatique, et nous allons commencer par faire le calcul pour $d = 3$:

$$\Sigma_U = \lambda \begin{array}{c} \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \end{array} + 3\lambda\sqrt{z} \left[\begin{array}{c} \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{W} \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{V} \end{array} \right]$$

$$+ 3\lambda z \begin{array}{c} \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{V} \end{array} + 3 \times 2\lambda z \begin{array}{c} \textcircled{W} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{W} \end{array} .$$

De même pour Σ_V

$$\Sigma_V = \lambda z \dots \begin{array}{c} \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \end{array} \dots ,$$

et Σ_W :

$$\Sigma_W = \lambda\sqrt{z} \dots \begin{array}{c} \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \end{array} \dots + 3\lambda z \dots \begin{array}{c} \textcircled{W} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \\ \text{---} \\ \textcircled{U} \end{array} \dots .$$

La généralisation à D dimension est immédiate :

$$\Sigma_U = \lambda U^d + 2d\lambda\sqrt{z}WU^{d-1} + d\lambda zVU^{d-1} + d(d-1)\lambda zW^2U^{d-2}, \quad (6.12a)$$

$$\Sigma_V = \lambda zU^d, \quad (6.12b)$$

$$\Sigma_W = \lambda\sqrt{z}U^d + d\lambda zWU^{d-1}. \quad (6.12c)$$

Puisque Σ_V ne contient pas V , l'équation (6.11b) permet de déterminer V en fonction de U et W :

$$V = \frac{1 + W\Sigma_W}{1 - \lambda zU^d}. \quad (6.13)$$

Comme Σ_W est linéaire en W , l'équation (6.11c) permet cette fois d'obtenir W en fonction de U :

$$W = \frac{\lambda\sqrt{z}U^{d+1}}{1 - (d+1)\lambda zU^d}. \quad (6.14)$$

Finalement, en remplaçant V et W dans l'équation (6.11c), on obtient une équation polynomiale en U après simplification :

$$\begin{aligned} & -1 + U - \left(U - (2+d)z + 2(d+1)zU \right) U^d \lambda \\ & + z \left(U + z(d+1)(-1+d+(d+1)U) \right) U^{2d} \lambda^2 \\ & - dz^2 \left(-2U + U^3 + (d+1)^2 z \right) U^{3d} \lambda^3 = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Notons que pour $z = 0$, on retrouve bien l'équation des tenseurs purs (4.17). Le changement de variable

$$\tilde{U} = U^d \lambda \quad (6.16)$$

permet de simplifier l'équation, qui devient linéaire en λ , d'où

$$\lambda = \frac{\tilde{U}^{1/d} (1 + d\tilde{U}^3 z^2 - \tilde{U} (1 + 2(1+d)z) + \tilde{U}^2 z (1 + (1+d)^2 z))}{(1 + d\tilde{U} z) (-1 + (1+d)\tilde{U} z)^2}. \quad (6.17)$$

On calcule alors la dérivée par rapport à \tilde{U} que l'on annule :

$$\begin{aligned} 0 = & -1 + (1+d+3z+2dz+d^2z)\tilde{U} - (1+d)(2-d+3z+3d^2z)\tilde{U}^2 z \\ & + (1-2d-3d^2+z+3d^4z+d^3(2+4z))\tilde{U}^3 z^2 \\ & + d(2+d-2d^2+z+2dz-2d^3z-d^4z)\tilde{U}^4 z^3 \\ & + d^2(1+d)\tilde{U}^5 z^4. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Le nouveau changement de variable

$$\mathcal{U} = \tilde{U} z \quad (6.19)$$

permet de rendre cette équation linéaire en z :

$$\begin{aligned} 0 = & \mathcal{U} \left((-1+\mathcal{U})^2 + d^3\mathcal{U}^2(2-2\mathcal{U}+\mathcal{U}^2) \right. \\ & \left. + d^2\mathcal{U}(1-3\mathcal{U}+\mathcal{U}^2+\mathcal{U}^3) + d(1-\mathcal{U}-2\mathcal{U}^2+2\mathcal{U}^3) \right) \\ & - z(-1+\mathcal{U}+d\mathcal{U})^3(-1-d\mathcal{U}+d^2\mathcal{U}). \end{aligned} \quad (6.20)$$

On peut alors isoler z et annuler la dérivée pour obtenir la position du point critique :

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + d + 2(-1 + d + 2d^2)\mathcal{U} + (1 - 8d - 5d^2 + 6d^3 - 4d^4)\mathcal{U}^2 \\
&\quad - 2d(-3 + 2d + 2d^2 - 6d^3 + 3d^4)\mathcal{U}^3 \\
&\quad - d(1 - 6d + d^2 + 3d^3 - 9d^4 + 2d^5)\mathcal{U}^4 \\
&\quad - 2(d^2 + d^4 + 2d^5)\mathcal{U}^5 + (-1 + d)d^3(1 + d)^2\mathcal{U}^6.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Il existe une racine évidente :

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{d}. \tag{6.22}$$

La détermination des autres doit être faite numériquement :

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + d + (-2 + d + 3d^2)\mathcal{U} + (1 - 6d - 6d^2 + 3d^3 - 4d^4)\mathcal{U}^2 \\
&\quad + d(5 + 2d + 2d^2 + 9d^3 - 2d^4)\mathcal{U}^3 \\
&\quad + d(-1 + d - 3d^2 - 5d^3)\mathcal{U}^4 + (-1 + d)d^2(1 + d)^2\mathcal{U}^5.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

6.3 Équations de Schwinger–Dyson

Considérons maintenant l'équation de Schwinger–Dyson avec une insertion de T^i :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{N^d Z} \text{tr} \int dT d\chi \frac{\delta}{\delta T^i} \left(T^i e^{-N^{d/2} S} \right) \\
0 &= \frac{1}{N^d} \left(\text{tr} 1 - N^{d/2} \text{tr} \langle T^i \bar{T}^i \rangle - N^{d/2} \sqrt{\lambda} \text{tr} \left\langle \prod_i T^i \right\rangle \right. \\
&\quad \left. - N^{d/2} \sqrt{\lambda z} \sum_{k \neq i} \text{tr} \left\langle : \chi^k \prod_{c \neq k} T^c : \right\rangle \right).
\end{aligned}$$

En remplaçant les traces de nombres par (3.3) et $\langle T^i \bar{T}^i \rangle$ par son expression (4.9), en ajoutant l'équation conjuguée et en divisant par 2 :

$$0 = 1 - U - \frac{N^{-d/2}}{2} \langle S_{\text{int}} \rangle + \frac{N^{-d/2}}{2} \sqrt{\lambda z} \text{tr} \left\langle : \chi^i \prod_{c \neq i} T^c : \right\rangle + \text{c.c.}$$

et, sommant sur les couleurs et divisant par leur nombre :

$$\begin{aligned}
0 &= 1 - U - \frac{N^{-d/2}}{2} \langle S_{\text{int}} \rangle - \frac{N^{-d/2}}{2(d+1)} \langle S_d \rangle \\
0 &= 1 - U - \frac{\sqrt{\lambda}}{2N^d Z} \frac{\partial Z}{\partial(\sqrt{\lambda})} + \frac{\sqrt{z}}{2N^d(d+1)Z} \frac{\partial Z}{\partial(\sqrt{z})}.
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la relation entre l'énergie libre et la fonction de partition (4.4), on obtient une première équation :

$$1 - U - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \frac{\partial F}{\partial(\sqrt{\lambda})} + \frac{\sqrt{z}}{2(d+1)} \frac{\partial F}{\partial(\sqrt{z})} = 0. \tag{6.24}$$

Et de même en insérant χ^i :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{N^d Z} \text{tr} \int dT d\chi \frac{\delta}{\delta \chi^i} \left(\chi^i e^{-N^d S} \right) \\ 0 &= 1 - V - \sqrt{z} \text{tr} \left\langle : \chi^i \prod_{c \neq i} T^c : \right\rangle. \end{aligned}$$

En sommant sur les couleurs, puis en ajoutant l'équation conjuguée, et en divisant par $2(d+1)$, on obtient :

$$0 = 1 - V - \frac{N^{-d/2}}{2(d+1)} \langle S_d \rangle,$$

soit une deuxième équation :

$$1 - V - \frac{\sqrt{z}}{2(d+1)} \frac{\partial F}{\partial(\sqrt{z})} = 0. \quad (6.25)$$

Comme U et V ne dépendent que de λ , il en va de même pour F et on peut remplacer la dérivée par rapport à la racine en utilisant (3.5). De plus, en substituant la deuxième équation dans la première, on trouve on récrit finalement

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2 - U - V, \quad (6.26a)$$

$$z \frac{\partial F}{\partial z} = (d+1)(1 - V). \quad (6.26b)$$

6.4 Exposants critiques

On note l'équation de consistance $\lambda = h(U, z)$ et $z = f(U)$ l'équation de la ligne critique, obtenue en annulant la dérivée première de λ .

En général, pour $\lambda = \lambda_c$ et z quelconque, le système se trouve sur la ligne critique et la première dérivée de λ par rapport à U est nulle : les résultats sont identiques au modèle pur. Toutefois, lorsque l'activité atteint sa valeur critique z_c , c'est-à-dire

$$f'(U) = 0, \quad (6.27)$$

le système atteint un point tricritique⁹. Ceci étant équivalent à annuler la dérivée seconde de h par rapport à U , car

$$\frac{\partial^2 h}{\partial U^2} \sim f'(U) = 0. \quad (6.28)$$

Dans ce cas, le développement de λ s'inverse pour donner

$$(U - U_c) \sim (\lambda_c - \lambda)^{1/3}, \quad (6.29)$$

soit l'exposant critique

$$\gamma = \frac{2}{3}. \quad (6.30)$$

9. Ceci est équivalent à résoudre l'équation (6.23)

Considérons maintenant le point multicritique. Dans ce cas, la dérivée de z par rapport à U est nulle, donc

$$z = \underbrace{f(U_c)}_{=z_c} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial U^2} \right|_{U_c} (U - U_c)^2,$$

d'où

$$U - U_c \sim \sqrt{z - z_c}. \quad (6.31)$$

Enfin, en remplaçant cette dernière relation dans celle obtenue plus haut, on obtient

$$\lambda - \lambda_c \sim (z - z_c)^{3/2}. \quad (6.32)$$

6.5 Cas $d = 3$

Encore une fois, nous considérons le cas $d = 3$. Dans ce cas, nous allons exhiber un chemin où toutes les quantités se comportent bien, et qui aboutit à un point multicritique (toutefois il n'est pas possible de continuer le chemin au-delà encore une fois).

Il est nécessaire de prendre des valeurs négatives de z , pour les mêmes raisons que dans le modèle précédent¹⁰. L'analyse permet de déterminer un point tricritique pour les valeurs suivantes (figure 16) :

$$U_c = 1.610, \quad \lambda_c = 0.1980, \quad z_c = -0.0904. \quad (6.33)$$

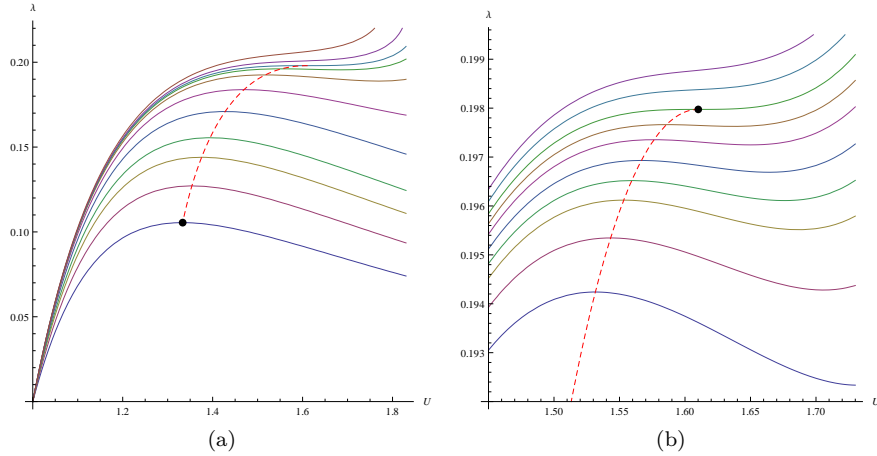


FIGURE 16 – Graphes $\lambda(U)$ pour différentes valeurs de z négatives. La trajectoire du système physique suit les maxima et est indiquée par la courbe pointillée en partant du cas correspondant à $z = 0$.

10. Cela implique que l'action est imaginaire à cause des facteurs \sqrt{z} , de même concernant W . Par contre, U et V sont réels car les racines viennent par paires.

7 Objets durs et règles d'exclusion

L'article [9] étudie les objets durs avec les matrices aléatoires.

L'action de ce modèle est :

$$S = \sum_c \left(-A^c \bar{A}^c + A^c \bar{B}^c + B^c \bar{A}^c \right) - z\sqrt{\lambda} \prod_c A^c - \sqrt{\lambda} \prod_c B^c. \quad (7.1)$$

D'où

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

On note les fonctions à deux points

$$G = \begin{pmatrix} U & W \\ W & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle AA \rangle & \langle BA \rangle \\ \langle AB \rangle & \langle BB \rangle \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Les self énergies sont

$$\Sigma_U = \lambda z^2 \text{ (diagram) }, \quad \Sigma_V = \lambda \text{ (diagram) },$$

$$\Sigma_W = \lambda z \text{ (diagram) }.$$

On obtient donc

$$\Sigma_U = \lambda z^2 U^d, \Sigma_V = \lambda V^d, \Sigma_W = \lambda z W^d. \quad (7.4a)$$

La somme géométrique (4.14)

$$G(C^{-1} - \Sigma) = 1. \quad (7.5)$$

donne alors le système

$$-U - \lambda z^2 U^{d+1} + W - \lambda z W^{d+1} = 1, \quad (7.6a)$$

$$W - \lambda z W^{d+1} - \lambda V^{d+1} = 1, \quad (7.6b)$$

$$U - \lambda z U W^d - \lambda W V^d = 0, \quad (7.6c)$$

$$-W - \lambda z^2 W U^d + V - \lambda z V W^d = 0. \quad (7.6d)$$

Rappelons que, du fait de la symétrie des matrices, l'une des deux dernières équations est redondante.

A Géométrie simpliciale

Cette annexe s'inspire de [3, 11].

Une variété de dimension d peut être discrétisée en utilisant un réseau qui est construit à partir de d -simplexes. Un d -simplexe est constitué de $(d + 1)$

points tous liés entre eux. Ainsi, pour $d = 0, 1, 2, 3$, on a respectivement le point, la ligne (ou le côté), le triangle (ou la face) et le tétraèdre (figure 17). Un sous-simplexe est un sous-ensemble de points d'un simplexe ; par exemple une ligne est un sous-simplexe d'un triangle. Un complexe est composé de plusieurs simplexes (qui peuvent être de dimensions différentes) collés ensemble en faisant coïncider leurs sous-simplexes.

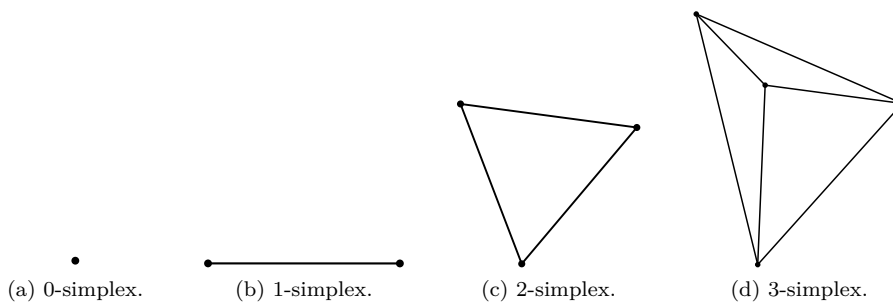


FIGURE 17 – Simplexes pour $d = 0, 1, 2, 3$.

On obtient une variété simpliciale de dimension d à partir d'un complexe pour lequel le voisinage de tout point est homéomorphe à la d -boule. Nous utiliserons souvent le terme "triangulation" même si $d \neq 2$. En collant ensemble des d -simplexe selon leurs $(d-1)$ -simplexes jusqu'à ce que le complexe n'ait plus de frontières, nous obtiendrions généralement des pseudo-variétés, c'est-à-dire qu'il y aura au moins un point dont le voisinage ne sera pas homéomorphe à la boule ; il s'agit donc d'un objet plus singulier qu'une variété simpliciale. Généralement, une triangulation n'est pas unique, et tout variété fermée peut être triangulée.

Bien qu'une variété simpliciale corresponde à la discrétisation d'une variété usuelle, il n'y a aucune notion de métrique, et donc ni de distance, de volume... Toutefois, certaines règles permettent de définir une métrique "discrète", dont la signature peut éventuellement être lorentzienne [19]. Mais avant cela, nous ne disposons que d'informations topologiques et combinatoires sur nos variétés.

Il est possible de construire le complexe dual d'une variété en associant un $(d-p)$ -simplexe à chaque p -simplexe de celle-ci (figure 18).

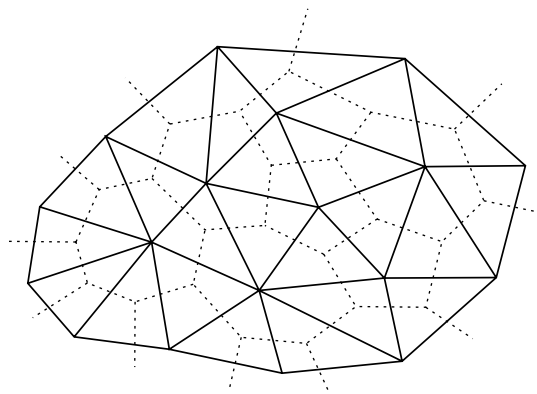


FIGURE 18 – Exemple de variété avec son complexe dual.

Références

- [1] J. Ambjørn. Simplicial Euclidean and Lorentzian quantum gravity. 2002.
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0201028>.
- [2] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. The universe from scratch. *Contemporary Physics*, 47(2) :103–117, 2006.
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0509010>.
- [3] M.A. Armstrong. *Basic topology*, volume 26. Springer, 1983.
- [4] J. Ben Geloun and V. Rivasseau. A Renormalizable 4-Dimensional Tensor Field Theory. *arxiv :1111.4997*, January 2012.
<http://arxiv.org/abs/1111.4997v3>.
- [5] V. Bonzom. Multicritical tensor models and hard dimers on spherical random lattices. 2012.
<http://arxiv.org/abs/1201.1931>.
- [6] V. Bonzom, R. Gurau, A. Riello, and V. Rivasseau. Critical behavior of colored tensor models in the large N limit. *Nuclear Physics B*, 2011.
<http://arxiv.org/abs/1105.3122>.
- [7] V. Bonzom, R. Gurau, and V. Rivasseau. The Ising Model on Random Lattices in Arbitrary Dimensions. 2011.
<http://arxiv.org/abs/1108.6269>.
- [8] V. Bonzom, R. Gurau, and V. Rivasseau. Random tensor models in the large N limit : Uncoloring the colored tensor models. February 2012.
<http://arxiv.org/abs/1202.3637v1>.
- [9] J. Bouttier, P. Di Francesco, and E. Guitter. Critical and Tricritical Hard Objects on Bicolorable Random Lattices : Exact Solutions. *J.Phys.A35 :3821-3854,2002*, January 2002.
<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0201213v1>.
- [10] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber. Planar Diagrams. *Commun. Math. Phys.*, 59 :35, 1978.
- [11] F. David. Simplicial quantum gravity and random lattices. 1993.
<http://arxiv.org/abs/hep-th/9303127>.

- [12] P. Di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin. 2D gravity and random matrices. *Physics Reports*, 254(1) :1–133, 1995.
<http://arxiv.org/abs/hep-th/9306153>.
- [13] P. Di Francesco. Rectangular matrix models and combinatorics of colored graphs. *Nuclear Physics B*, 648(3) :461–496, 2003.
<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0208037>.
- [14] R. Gurau. Lost in translation : topological singularities in group field theory. *Classical and Quantum Gravity*, 27 :235023, 2010.
<http://arxiv.org/abs/1006.0714>.
- [15] R. Gurau. The $1/N$ expansion of colored tensor models. 2010.
<http://arxiv.org/abs/1011.2726>.
- [16] R. Gurau. A generalization of the Virasoro algebra to arbitrary dimensions. *Nuclear Physics B*, 2011.
<http://arxiv.org/abs/1105.6072>.
- [17] R. Gurau. Universality for Random Tensors. 2011.
<http://arxiv.org/abs/1111.0519>.
- [18] R. Gurau and J.P. Ryan. Colored Tensor Models — A Review. 2011.
<http://arxiv.org/abs/1109.4812>.
- [19] R. Loll. PSI Lectures on Quantum Gravity, 2012.
<http://pirsa.org/C12003>.
- [20] D. Oriti. The group field theory approach to quantum gravity. 2006.
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0607032>.
- [21] D. Oriti. A quantum field theory of simplicial geometry and the emergence of spacetime. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 67, page 012052. IOP Publishing, 2007.
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0612301>.
- [22] V. Rivasseau. Quantum Gravity and Renormalization : The Tensor Track. 2011.
<http://arxiv.org/abs/1112.5104>.
- [23] V. Rivasseau. Towards renormalizing group field theory. 2011.
<http://arxiv.org/abs/1103.1900>.
- [24] M. Smerlak. Comment on 'Lost in translation : topological singularities in group field theory'. *Classical and quantum gravity*, 28 :178001, 2011.
<http://arxiv.org/abs/1102.1844>.
- [25] M. Staudacher. The Yang-Lee edge singularity on a dynamical planar random surface. *Nuclear Physics B*, 336(3) :349–362, 1990.
- [26] J. B. Zuber. *Lectures on random matrices*, January 2012.
<http://www.icts.res.in/program/details/287>.