

Introduction à la magnéto-hydrodynamique

Harold Erbin

27 avril 2011

Ce texte est publié sous la licence libre

Licence Art Libre :

<http://artlibre.org/licence/lal/>

Table des matières

1	Introduction	4
2	Équations de la MHD	5
2.1	Équations électromagnétiques	5
2.1.1	Simplification des équations de Maxwell	5
2.1.2	Énergie électromagnétique	6
2.1.3	Loi d'Ohm	6
2.2	Équations du fluide	7
2.2.1	Équation de continuité	7
2.2.2	Forces et accélération convective	7
2.2.3	Équation du mouvement	8
2.3	Équations thermodynamiques	8
2.4	Récapitulatif	9
3	Propriétés des vecteurs	11
3.1	Décomposition poloidale/azimutale	11
3.2	Partie poloidale des vecteurs à divergence nulle et fonctions de flux	11
3.2.1	Définition	11
3.2.2	Potentiel vecteur	12
3.2.3	Lignes de champ	12
3.2.4	Lien avec le flux	13
3.3	Partie azimutale	13
3.4	Calcul du produit vectoriel d'un vecteur par son rotationnel	14
3.4.1	Calcul des rotationnels	14
3.4.2	Calcul des produits vectoriels	15
3.5	Récapitulatif	15
4	Intégrales du mouvement	16
4.1	Quantités remarquables	16
4.1.1	Fonctions de flux : champ magnétique, courant électrique, vitesse	16
4.1.2	Potentiel électrique	17
4.2	Invariance du rapport des flux massique et magnétique	17
4.3	Loi de Ferraro d'isorotation	18
4.4	Moment angulaire	20
4.5	Constante adiabatique	20
4.6	Énergie	21
4.7	Récapitulatif	21
5	Utilisation des quantités conservées	22
5.1	Nouvelles expressions des quantités	22
5.1.1	Masse volumique	22
5.1.2	Champ magnétique	22
5.1.3	Vitesse	23
5.1.4	Pression	23
5.1.5	Récapitulatif	24
5.2	Équations	24
5.2.1	Projection parallèle à l'écoulement	24

5.2.2	Projection perpendiculaire à l'écoulement	25
6	Interprétation	26
6.1	Surface d'Alven	26
6.2	L'équation de Bernoulli	26
7	Simulations	27
7.1	Adimensionnement	27
7.2	Choix des intégrales	28
Annexes		29
A	Relations vectorielles	29
B	Dérivée convective	29
C	Lignes de champ et quantités conservées	30
D	Démonstrations	32
D.1	Équation du mouvement dans le plan poloidal	32
D.2	Projection de l'équation du mouvement selon le gradient	34
Références		37

L'essentiel de ces notes est inspiré de l'article *Output from MHD Models* de Nektarios Vlahakis [5].

1 Introduction

On considère un écoulement axisymétrique non-relativiste en régime permanent (bien que nous obtiendrons les équations dans le cas général) en présence d'un objet central de masse \mathcal{M} . On choisit de se placer en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'objet central étant situé à l'origine, et l'axe z étant l'axe de rotation.

On appelle plan poloïdal le plan (r, z) . La direction $\hat{\theta}$ est dite azimutale. Du fait de l'axisymétrie, les fonctions ne dépendent pas de θ et en général $\partial_\theta = 0$.

Les quantités associées aux ions seront dénotées par un indice $+$ tandis que celles associées aux électrons auront un signe $-$.

On définit les différentes quantités suivantes : la masse m_i , la quantité de particules n_i , la charge portée q_i , la vitesse \mathbf{v}_i (avec $i = \pm$). Si on considère un plasma quasi-neutre composé d'ions positifs et d'électrons, on a les relations suivantes :

$$n_- \approx n_+ \approx n \quad (1.1a)$$

$$m_- \ll m_+ \quad (1.1b)$$

On peut alors définir plusieurs propriétés du fluide :

– masse volumique :

$$\rho = n_+ m_+ + n_- m_- \approx n_+ m_+ \quad (1.2)$$

– vitesse du centre de masse :

$$\mathbf{v} = \frac{n_+ m_+ \mathbf{v}_+ + n_- m_- \mathbf{v}_-}{\rho} \approx \mathbf{v}_+ \quad (1.3)$$

– densité de charge :

$$\rho_e = n_+ q_+ + n_- q_- \quad (1.4)$$

– densité de courant :

$$\mathbf{j} = n_+ q_+ \mathbf{v}_+ + n_- q_- \mathbf{v}_- \approx en(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) \quad (1.5)$$

Les champs électrique et magnétique seront respectivement notés \mathbf{E} et \mathbf{B} .

Les quantités thermodynamiques par unité de masse seront notées par une minuscule (par exemple h pour l'enthalpie massique, e pour l'énergie interne massique...). On note p la pression et T la température.

2 Équations de la MHD

2.1 Équations électromagnétiques

2.1.1 Simplification des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell régissent les évolutions des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} :

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1b)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.1d)$$

L'ordre de grandeur du rapport E/B est donné par l'équation de Maxwell–Faraday (2.1b) :

$$\frac{|\nabla \times \mathbf{E}|}{\left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|} = \frac{E}{L} \times \frac{\tau}{B} = 1 \implies \frac{E}{B} = \frac{L}{\tau} = v_0$$

où τ et L représentent une durée et une longueur caractéristique. On obtient donc une vitesse caractéristique des champs.

Comparons maintenant les ordres de grandeur des termes de l'équation de Maxwell–Ampère (2.1d) :

$$\frac{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} = \frac{E}{\tau c^2} \times \frac{L}{B} = \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \ll 1$$

où l'on a utilisé l'expression de E/B .

Ainsi, le second terme de l'équation (2.1d) est négligeable et on obtient

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}}$$

ce qui revient à considérer que les champs sont toujours à l'équilibre et qu'il n'y a pas d'évolution temporelle de la densité de charge, et on déduit immédiatement l'équation de conservation du courant

$$\nabla \mathbf{j} = 0 \quad (2.2)$$

Les équations de Maxwell se réduisent donc à

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (2.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3b)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (2.3c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.3d)$$

2.1.2 Énergie électromagnétique

L'équation de conservation de l'énergie électromagnétique s'écrit

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2.4)$$

où W représente la densité d'énergie électromagnétique

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (2.5)$$

et $\mathbf{\Pi}$ le vecteur de Poynting

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (2.6)$$

En effet, les équations de Maxwell (2.1) et la relation (A.16) donnent :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \varepsilon_0 E^2}{\partial t} \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_0 E^2}{\partial t} \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial B^2}{\partial t} \frac{1}{2\mu_0} - \frac{\partial \varepsilon_0 E^2}{\partial t} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le rapport des énergies électrique et magnétique donne

$$\frac{U_e}{U_m} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{B^2/\mu_0} = \frac{v_0^2}{c^2} \ll 1$$

donc la contribution du champ électrique est négligeable.

2.1.3 Loi d'Ohm

Cette loi va nous permettre de relier le champ électrique au champ magnétique et à leurs sources. Pour ce faire, on va écrire l'équation du mouvement des électrons, en considérant que ces derniers sont toujours à l'équilibre, car leur temps caractéristique d'évolution est très inférieur à celui des champs et des ions, et en négligeant le potentiel gravitationnel :

$$-\nabla p_- - en_-(\mathbf{E} + \mathbf{v}_- \times \mathbf{B}) + m_+ n_+ \nu (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) = 0 \quad (2.7)$$

où ν représente la fréquence de collision ions-électrons. Un peu d'algèbre donne :

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla p_- - en_-(\mathbf{E} + \mathbf{v}_- \times \mathbf{B}) + m_+ n_+ \nu (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) \\ 0 &\approx -\nabla p_- - en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_- \times \mathbf{B}) + m_+ n \nu (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) \\ en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_- \times \mathbf{B}) &= -\nabla p_- + \frac{m_+}{e} \nu \mathbf{j} \\ en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_- \times \mathbf{B}) &= -\nabla p_- + \frac{m_+}{e} \nu \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} + \mathbf{v}_- \times \mathbf{B} &= \frac{-1}{ne} \nabla p_- + \frac{m_+ \nu}{ne^2} \mathbf{j} + \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

car

$$\mathbf{v}_- = (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) + \mathbf{v}_+ \approx \frac{\mathbf{j}}{ne} + \mathbf{v}$$

On pose

$$\eta_m = \frac{m_+ \nu}{ne^2} \quad (2.8)$$

qui est la résistivité ohmique due aux collisions.

On obtient donc finalement l'équation

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta_m \mathbf{j} + \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{-1}{ne} \nabla p_- \quad (2.9)$$

où le premier terme correspond au terme de résistance ohmique (nulle dans le cadre de la MHD idéale), le deuxième est l'effet Hall et le dernier un terme de champ dû à la pression électronique. Dans le cas d'un plasma parfait et très ionisé, tous ces termes sont négligeables :

$$\boxed{\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \quad (2.10)$$

En injectant cette expression dans l'équation de Maxwell–Ampère (2.1b), on obtient l'équation d'induction du champ magnétique

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})} \quad (2.11)$$

2.2 Équations du fluide

2.2.1 Équation de continuité

Si on considère un volume V , alors la variation de la masse dm/dt est égale à l'opposé du débit massique sortant, c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \\ &= - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{S} \\ &= - \int_V \nabla(\rho \mathbf{v}) \, dV \end{aligned}$$

en utilisant le théorème d'Ostrogradski. On obtient finalement l'équation de conservation locale de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0} \quad (2.12)$$

2.2.2 Forces et accélération convective

Le fluide est soumis à différentes forces :

- le gradient de pression : $-\nabla p$;
- la force de Lorentz volumique, qui est composée de deux termes :
 - la force électrique

$$\mathbf{F}_e = (n_+ q_+ + n_- q_-) \mathbf{E} = \rho_e \mathbf{E} \quad (2.13)$$

– la force magnétique

$$\mathbf{F}_m = (n_+ q_+ \mathbf{v}_+ + n_- q_- \mathbf{v}_-) \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.14)$$

qui correspond à la force de Laplace.

– la force gravitationnelle : $-\rho \nabla \Phi$ où Φ est le potentiel gravitationnel

$$\Phi = -\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (2.15)$$

où \mathcal{G} est la constante de gravitation.

2.2.3 Équation du mouvement

En utilisant l'expression (B.20) de la dérivée convective, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit alors

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.16)$$

La force électrique peut être négligée comme le milieu est quasi-neutre. De plus, en remplaçant \mathbf{j} grâce à l'équation de Maxwell–Ampère (2.3d), on obtient l'équation simplifiée

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}} \quad (2.17)$$

2.3 Équations thermodynamiques

La température est reliée à la pression grâce à la loi des gaz parfaits

$$p = N k_b T = (n_+ + n_-) k_b T$$

que l'on récrit

$$k_b T \approx \frac{p}{2n} = \frac{m_+}{2} \frac{p}{\rho} \quad (2.18)$$

où k_b est la constante de Boltzmann et en utilisant l'équation (1.2).

L'énergie interne massique d'un gaz possédant f degrés de libertés est

$$e = \frac{f}{2} \frac{k_b T}{m}$$

ou encore

$$e = \frac{f}{2} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.19)$$

en définissant l'index polytropique par

$$\gamma = 1 + \frac{2}{f} \quad (2.20)$$

L'enthalpie massique vaut

$$h = e + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.21)$$

Le premier principe de la thermodynamique permet d'écrire

$$de + p d\frac{1}{\rho} = \frac{qdt}{\rho}$$

où q représente les variations d'énergie par unité de temps. On obtient donc l'équation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) + p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = \frac{q}{\rho} \quad (2.22)$$

qui se simplifie :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) + p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} &= \frac{q}{\rho} \\ \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{q}{\rho} \\ \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{dp}{dt} - \gamma \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) &= q \\ \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{1}{\rho^\gamma} \frac{dp}{dt} - \gamma \frac{p}{\rho^{\gamma+1}} \frac{d\rho}{dt} \right) &= q \end{aligned}$$

qui donne enfin

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1} \frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\gamma} = q \quad (2.23)$$

Dans le cas adiabatique, cette équation se simplifie en

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0} \quad (2.24)$$

qui est connue comme la loi de Laplace.

Sinon, on peut réarranger l'équation (2.23) en introduisant un index polytropic effectif γ_{eff} et en posant

$$q = \frac{\gamma - \gamma_{eff}}{\gamma - 1} \rho p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} \quad (2.25)$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^{\gamma_{eff}}} = 0 \quad (2.26)$$

On aurait aussi pu choisir d'utiliser l'enthalpie :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{q}{\rho} \quad (2.27)$$

2.4 Récapitulatif

Le problème se compose de sept variables indépendantes : ρ , p , \mathbf{v} et \mathbf{B} , ce dernier vecteur n'ayant que deux composantes indépendantes selon (2.3c).

Les équations du problème en régime permanent sont :

$$\nabla(\rho v) = 0 \quad (2.28a)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.28b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \quad (2.28c)$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2.28d)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (2.28e)$$

L'équation (2.28e) portant sur la divergence de $\nabla \mathbf{B}$ n'importe pas d'information sur la dynamique du système mais constitue une contrainte.

On pourra retrouver les autres grandeurs intéressantes : T , \mathbf{E} , \mathbf{j} grâce aux équations

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.29a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.29b)$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.29c)$$

$$\nabla \mathbf{j} = 0 \quad (2.29d)$$

$$k_b T = \frac{m_+}{2} \frac{p}{\rho} \quad (2.29e)$$

Les orientations des vecteurs sont résumés sur la figure 1 (certaines orientations seront prouvées dans les sections suivantes).

L'orientation de \mathbf{B}_θ est cohérente avec l'expression du vecteur de Poynting

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}_p + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}_\theta$$

Le premier terme est parallèle à $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et correspond à de l'énergie qui reste dans le système, tandis que le second membre est dans la direction de $+\mathbf{v}_p$ ce qui correspond à de l'énergie qui quitte le système (emportée par la matière).

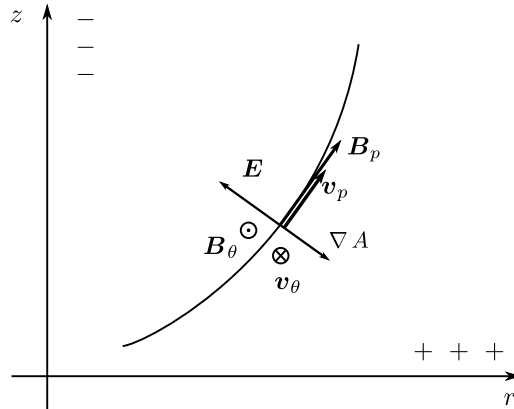


FIGURE 1 – Orientations des vecteurs (plan poloidal).

3 Propriétés des vecteurs

Pour alléger les notations, nous utiliserons parfois la relation

$$\nabla \theta = \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \quad (3.1)$$

grâce à l'expression du gradient en coordonnées cylindriques (A.11).

Dans toute cette section \mathbf{V} sera un vecteur quelconque répondant à la symétrie du problème.

3.1 Décomposition poloidale/azimutale

On choisit de décomposer chaque vecteur \mathbf{V} en une partie poloidale et une partie azimutale :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \mathbf{V}_\theta \quad (3.2)$$

avec $\mathbf{V}_p = V_r \hat{\mathbf{r}} + V_z \hat{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{V}_\theta = V_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Dans ce cas, on a

$$(\nabla \times \mathbf{V}_p) \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (3.3a)$$

$$(\nabla \times \mathbf{V}_\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (3.3b)$$

c'est à dire que $\nabla \times \mathbf{V}_p$ est dans la direction de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (et donc orthogonal au plan poloidal) et que, au contraire, $\nabla \times \mathbf{V}_\theta$ appartient au plan poloidal et est donc perpendiculaire à $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

3.2 Partie poloidale des vecteurs à divergence nulle et fonctions de flux

3.2.1 Définition

On considère que \mathbf{V} est à divergence nulle, c'est à dire :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.4)$$

Dans ce cas, en utilisant l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques (A.10) et en tenant compte de l'axisymétrie, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \nabla \cdot \mathbf{V}_p = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Il existe donc une fonction f , que l'on appellera fonction de flux, telle que

$$\begin{cases} B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial z} \\ B_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \end{cases} \quad (3.5)$$

que l'on peut récrire plus commodément sous la forme

$$\mathbf{V}_p = \nabla f \times \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} = \nabla \times \left(f \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \right) \quad (3.6)$$

en remarquant que

$$\mathbf{V}_p = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) = \frac{1}{r} \nabla f \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

et en utilisant la formule (A.14), puisque l'on a $\nabla \times (\hat{\boldsymbol{\theta}}/r) = 0$.

Finalement on adoptera l'écriture allégée (3.1) :

$$\boxed{\mathbf{V}_p = \nabla f \times \nabla \theta = \nabla \times (f \nabla \theta)} \quad (3.7)$$

3.2.2 Potentiel vecteur

La fonction de flux f est reliée au potentiel vecteur \mathbf{F} défini par

$$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.8)$$

car \mathbf{V} est à divergence nulle. En effet, on a

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\frac{\partial F_\theta}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} \hat{\mathbf{z}}$$

Par identification, on trouve que

$$f = r F_\theta \quad (3.9)$$

3.2.3 Lignes de champ

Nous allons chercher à montrer que les surfaces $f = cste$ correspondent aux lignes de champ, définies par

$$\mathbf{V}_p \times d\mathbf{r} = 0 \quad (3.10)$$

c'est à dire les surfaces tangentes en tout point au champ de vecteurs \mathbf{V} .

Pour ce faire, écrivons la différentielle de f :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= -r V_z dr + r V_r dz \\ &= -r (\mathbf{V}_p \times d\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

que l'on peut récrire dans un cas plus général

$$df = -r (\mathbf{V} \times d\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.11)$$

comme $(\mathbf{V}_\theta \times d\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$. Ainsi, si \mathbf{V} et $d\mathbf{r}$ sont parallèles, on a $df = 0$ d'où $f = cste$.

On obtient aussi une relation pour calculer f :

$$f - f_0 = - \int r(\mathbf{V} \times d\mathbf{r}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.12)$$

Une autre manière de parvenir à ce résultat est de montrer que ∇f et \mathbf{V} sont orthogonaux en utilisant la définition de f (3.7) :

$$\mathbf{V} \cdot \nabla f = (\nabla f \times \nabla \theta + g \nabla \theta) \cdot \nabla f = 0$$

car $\nabla \theta \perp \nabla f$. Par définition du gradient, ∇f est orthogonal aux surfaces $f = cste$, ce qui prouve le résultat.

Géométriquement, on peut imaginer que si l'on prend une ligne de courant et qu'on lui fait faire une rotation autour de l'axe z , on obtient alors un tube de champ dans lequel le flux est constant (car le champ magnétique ne peut pas traverser les lignes de champ). De plus, en chaque point à r et z fixés, f doit être constant (axisymétrie). Ainsi, pour que le flux soit constant il faut que f soit constant sur chaque ligne de courant. Ceci est tout à fait en accord avec la relation (3.13) que l'on obtient dans la partie suivante.

3.2.4 Lien avec le flux

La fonction de flux f est reliée au flux du vecteur \mathbf{V}_p à travers une surface S par la relation

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_S \mathbf{V}_p \cdot d\mathbf{S} \quad (3.13)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{V}_p \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \nabla \times (f \nabla \theta) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\partial S} \frac{f}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial S} \frac{f}{r} r d\theta \\ &= 2\pi f \end{aligned}$$

3.3 Partie azimutale

On considère la partie azimutale \mathbf{V}_θ d'un vecteur \mathbf{V} , alors on peut écrire :

$$\mathbf{V}_\theta = V_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = (rV_\theta) \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}$$

que l'on écrit

$$V_\theta = g \nabla \theta \quad (3.14)$$

avec

$$g = rV_\theta \quad (3.15)$$

Un vecteur à divergence nulle peut donc s'écrire

$$\boxed{\mathbf{V} = \nabla f \times \nabla \theta + g \nabla \theta} \quad (3.16)$$

3.4 Calcul du produit vectoriel d'un vecteur par son rotationnel

On fait l'hypothèse que \mathbf{V} est à divergence nulle et peut donc se décomposer selon (3.16), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} &= \left(\nabla \times (\mathbf{V}_p + \mathbf{V}_\theta) \right) \times (\mathbf{V}_p + \mathbf{V}_\theta) \\ &= (\nabla \times \mathbf{V}_p + \nabla \times \mathbf{V}_\theta) \times (\mathbf{V}_p + \mathbf{V}_\theta) \\ &= (\nabla \times \mathbf{V}_p) \times \mathbf{V}_p + \underbrace{(\nabla \times \mathbf{V}_p) \times \mathbf{V}_\theta}_{=0} + (\nabla \times \mathbf{V}_\theta) \times (\mathbf{V}_p + \mathbf{V}_\theta) \\ &= (\nabla \times \mathbf{V}_p) \times \mathbf{V}_p + (\nabla \times \mathbf{V}_\theta) \times \mathbf{V}_\theta + (\nabla \times \mathbf{V}_\theta) \times \mathbf{V}_p \end{aligned}$$

ce qui donne la relation

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = (\nabla \times \mathbf{V}_p) \times \mathbf{V}_p + (\nabla \times \mathbf{V}_\theta) \times \mathbf{V}_\theta + (\nabla \times \mathbf{V}_\theta) \times \mathbf{V}_p \quad (3.17)$$

Les deux premiers membres appartiennent au plan poloidal, tant que le dernier est dans la direction de $\hat{\theta}$.

3.4.1 Calcul des rotationnels

Commençons par calculer $\nabla \times \mathbf{V}_p$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V}_p &= \nabla \times (\nabla f \times \nabla \theta) \\ &= \nabla \times \left(\frac{\nabla f}{r^2} \times (r^2 \nabla \theta) \right) \\ &= -r^2 \nabla \theta \nabla \left(\frac{\nabla f}{r^2} \right) \end{aligned}$$

en utilisant la relation (A.17) et en tenant compte du fait que

$$\frac{\nabla A}{r^2} \nabla r \hat{\theta} + \left(\frac{\nabla A}{r^2} \cdot \nabla \right) (r \hat{\theta}) + (r \hat{\theta} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla A}{r^2} \right) = 0$$

On définit l'opérateur

$$\Delta^* f = r^2 \nabla \left(\frac{1}{r^2} \nabla f \right) = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.18)$$

ce qui permet de récrire l'équation

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V}_p = -\nabla \theta \Delta^* f} \quad (3.19)$$

qui est un vecteur azimutal.

De même on calcule $\nabla \times \mathbf{V}_\theta$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V}_\theta &= \nabla \times (g \nabla \theta) \\ &= g \underbrace{\nabla \times \nabla \theta}_{=0} + \nabla g \times \nabla \theta \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V}_\theta = \nabla g \times \nabla \theta} \quad (3.20)$$

qui correspond à un vecteur poloidal, d'où finalement

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \theta \Delta^* f + \nabla g \times \nabla \theta} \quad (3.21)$$

3.4.2 Calcul des produits vectoriels

On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{V}_p) \times \mathbf{V}_p &= (-\nabla \theta \Delta^* f) \times (\nabla f \times \nabla \theta) \\
 &= -\nabla f \Delta^* f |\nabla \theta|^2 + \Delta^* f \underbrace{(\nabla f \cdot \nabla \theta)}_{=0} \nabla \theta \\
 &= -\frac{1}{r^2} \nabla f \Delta^* f
 \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{V}_\theta) \times \mathbf{V}_\theta &= (\nabla g \times \nabla \theta) \times g \nabla \theta \\
 &= -g \nabla g |\nabla \theta|^2 + g \underbrace{(\nabla g \cdot \nabla \theta)}_{=0} \nabla \theta \\
 &= -\frac{1}{r^2} g \nabla g
 \end{aligned}$$

ce qui donne les parties poloidales du produit vectoriel :

$$\boxed{\hat{\mathbf{r}}_p \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = -\frac{1}{r^2} \nabla f \Delta^* f - \frac{1}{r^2} g \nabla g} \quad (3.22)$$

Le terme azimutal est donné par

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{V}_\theta) \times \mathbf{V}_p &= \nabla \times (f \nabla \theta) \times \mathbf{V}_p \\
 &= \underbrace{(f \nabla \times \nabla \theta)}_{=0} \mathbf{V}_p + (\nabla f \times \nabla \theta) \times \mathbf{V}_p \\
 &= (\mathbf{V}_p \cdot \nabla f) \nabla \theta - \underbrace{(\mathbf{V}_p \cdot \nabla \theta)}_{=0} \nabla f
 \end{aligned}$$

d'où après simplification

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = (\mathbf{V}_p \cdot \nabla f) \nabla \theta} \quad (3.23)$$

En additionnant les trois termes précédents on obtient l'expression finale :

$$\boxed{(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = -\frac{1}{r^2} \nabla f \Delta^* f - \frac{1}{r^2} g \nabla g + (\mathbf{V}_p \cdot \nabla f) \nabla \theta} \quad (3.24)$$

3.5 Récapitulatif

Soit \mathbf{V} un vecteur à divergence nulle, alors nous avons les relations suivantes :

$$\mathbf{V} = \nabla f \times \nabla \theta + g \nabla \theta \quad (3.25a)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \theta \Delta^* f + \nabla g \times \nabla \theta \quad (3.25b)$$

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = -\frac{1}{r^2} \nabla f \Delta^* f - \frac{1}{r^2} g \nabla g + (\mathbf{V}_p \cdot \nabla f) \nabla \theta \quad (3.25c)$$

4 Intégrales du mouvement

4.1 Quantités remarquables

4.1.1 Fonctions de flux : champ magnétique, courant électrique, vitesse

Les équations de Maxwell–flux (2.28e), de conservation de la charge (2.29d) et de continuité (2.28a) indiquent que trois vecteurs du problème sont à divergence nulle : \mathbf{B} , $\mu_0 \mathbf{j}$ et $\rho \mathbf{v}$. On peut donc les décomposer en une partie poloidale et une partie azimutale selon (3.16) :

$$\rho \mathbf{v} = \nabla \psi \times \nabla \theta + \zeta \nabla \theta \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla A \times \nabla \theta + F \nabla \theta \quad (4.1b)$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla F \times \nabla \theta + \chi \nabla \theta \quad (4.1c)$$

où ψ est la fonction de courant, A la fonction de flux magnétique, F la fonction de flux de courant. F , ζ et χ sont donc définies par

$$F = r B_\theta \quad (4.2a)$$

$$\zeta = r \rho v_\theta \quad (4.2b)$$

$$\chi = \mu_0 r j_\theta \quad (4.2c)$$

Les fonctions ζ et χ ne seront pratiquement pas utilisées par la suite. Il convient de faire le remplacement $\nabla f \rightarrow 1/\rho \nabla \psi$ lorsque l'on souhaite travailler avec la vitesse poloidale (et non avec le vecteur de flux massique)¹.

Le champ magnétique poloidal est

$$\mathbf{B}_p = \nabla A \times \nabla \theta \quad (4.3)$$

La présence de F dans les deux relations (4.1b) et (4.1c) est due au fait que $\mu_0 \mathbf{j}$ et \mathbf{B} sont reliés par l'équation de Maxwell–Ampère (2.29c). L'équation (3.3b) indique que la partie poloidale de $\mu_0 \mathbf{j}$ est $\nabla \times \mathbf{B}_\theta$, d'où :

$$\mu_0 \mathbf{j}_p = \nabla \times \mathbf{B}_\theta = \nabla F \times \nabla \theta$$

en utilisant la relation (3.20). F est donc relié au flux du courant électrique :

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_S \mathbf{j}_p \cdot d\mathbf{S} \quad (4.4)$$

On remarquera enfin que F intervient dans les expressions du moment angulaire (4.25d) et de l'énergie (4.25e).

Les lignes $A = cste$ correspondent donc aux lignes du champ magnétique, tandis que les lignes $\psi = cste$ et $F = cste$ correspondent respectivement aux lignes de champ des vitesses et des courants électriques.

Finalement, l'orientation de ∇A montré sur la figure 1 est cohérente avec l'expression (3.13) : cette dernière montre que le flux de \mathbf{B} croît lorsque A augmente, ce qui revient à prendre un tube de courant plus large.

On s'attend à ce que $A(r=0) = 0$ car il n'y a aucun flux, et que

$$\frac{\partial A}{\partial r} > 0 \quad \frac{\partial A}{\partial z} < 0 \quad (4.5)$$

car le flux croît avec r et diminue avec z .

1. Il n'est pas besoin de procéder à une manœuvre similaire pour v_θ comme on utilise sa norme dans ζ , et non une expression alternative.

4.1.2 Potentiel électrique

L'équation de Maxwell–Faraday (2.29b) indique qu'il existe une fonction ϕ , appelée potentiel électrique, telle que

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (4.6)$$

L'équation d'induction (2.28d) couplée à la loi d'Ohm (2.29a) permet donc d'écrire :

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \phi$$

d'où

$$\boxed{\nabla \phi = \mathbf{v} \times \mathbf{B}} \quad (4.7)$$

Déterminons les composantes poloidale et azimutale de $\nabla \phi$:

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_\theta + \mathbf{v}_\theta \times \mathbf{B}_p + \underbrace{\mathbf{v}_\theta \times \mathbf{B}_\theta}_{=0} \\ &= \mathbf{v}_\theta \times \mathbf{B}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_\theta + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p \end{aligned}$$

et alors :

$$\nabla \phi \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p \quad (4.8a)$$

$$\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{r}}_p = \mathbf{v}_\theta \times \mathbf{B}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_\theta \quad (4.8b)$$

car $\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_\theta = 0$ et $\mathbf{v}_\theta \times \mathbf{B}_p = 0$ n'ont pas de composantes selon $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

4.2 Invariance du rapport des flux massique et magnétique

Du fait de l'axisymétrie du problème, $E_\theta = 0$ car

$$E_\theta = \nabla \phi \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$$

d'où, en utilisant l'équation (4.8) :

$$(\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (4.9)$$

donc \mathbf{v}_p et \mathbf{B}_p sont parallèles, et :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p &= \frac{1}{\rho} (\nabla \psi \times \nabla \theta) \times (\nabla A \times \nabla \theta) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\nabla \theta \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta) \right) \nabla A - \nabla \theta \left(\nabla A \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta) \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \nabla \theta \left(\nabla \theta \cdot (\nabla \psi \times \nabla A) \right) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot (\nabla \psi \times \nabla A) = 0$$

c'est à dire

$$\nabla \psi \times \nabla A = 0 \quad (4.10)$$

donc $\nabla \psi$ et ∇A sont parallèles, et de l'équation (C.22) on conclue que $\psi = \psi(A)$.

On a donc

$$\begin{aligned}\rho \mathbf{v}_p &= \nabla \psi \times \nabla \theta \\ &= \frac{d\psi}{dA} \nabla A \times \nabla \theta \\ &= \frac{d\psi}{dA} \mathbf{B}_p\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de changement de variable (C.23), et on récrit l'équation

$$\boxed{\mathbf{v}_p = \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} \mathbf{B}_p} \quad (4.11)$$

en posant

$$\boxed{\psi_A(A) = \mu_0 \frac{d\psi}{dA}} \quad (4.12)$$

ou encore

$$\boxed{\frac{v_p}{B_p} = \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho}} \quad (4.13)$$

Finalement, on peut écrire ψ_A comme le rapport des flux massique et magnétique :

$$\psi_A = \frac{\rho v_p dS}{B_p / \mu_0 dS} \quad (4.14)$$

4.3 Loi de Ferraro d'isrotation

En partant de l'équation (4.7) et en utilisant les expressions de la composante poloidale du champ électrique (4.8), de la vitesse poloidale (4.11) et du champ poloidal (4.3), on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla \phi &= \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{v}_\theta \times \mathbf{B}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_\theta \\ &= \mathbf{v}_\theta \times \mathbf{B}_p - \mathbf{B}_\theta \times \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} \mathbf{B}_p \\ &= \left(\mathbf{v}_\theta - \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} \mathbf{B}_\theta \right) \times \mathbf{B}_p \\ &= \left(\mathbf{v}_\theta - \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} \mathbf{B}_\theta \right) \times (\nabla A \times \nabla \theta) \\ &= \frac{1}{r} \left(v_\theta - \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} B_\theta \right) \nabla A\end{aligned}$$

L'équation précédente devient alors :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dA} \nabla A &= \frac{1}{r} \left(v_\theta - \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} B_\theta \right) \nabla A \\ \frac{d\phi}{dA} &= \frac{1}{r} \left(v_\theta - \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} B_\theta \right)\end{aligned}$$

et on pose

$$\boxed{\Omega(A) = \frac{d\phi}{dA}} \quad (4.15)$$

car $\phi = \phi(A)$.

Une analyse dimensionnelle simple ($\Omega \propto v\theta/r$) montre que cette quantité correspond à une vitesse angulaire. Cela correspond à une rotation de type corps rigide des surfaces magnétiques $A = cste$. Il est important de noter que les différentes surfaces ont des vitesses de rotation différentes.

On obtient alors l'expression de la vitesse azimutale :

$$\boxed{v_\theta = r\Omega + \frac{\psi_A}{\mu_0\rho} B_\theta} \quad (4.16)$$

connue sous le nom de loi de Ferraro d'isorotation.

L'expression de la vitesse en fonction du champ magnétique est, compte tenu des expressions des vitesses poloidale (4.11) et azimutale (4.16) :

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\psi_A}{\mu_0\rho} \mathbf{B} + r\Omega \hat{\boldsymbol{\theta}}} \quad (4.17)$$

Cette expression signifie que l'écoulement se fait en direction du champ magnétique, auquel s'ajoute une contribution due à la rotation des surfaces magnétiques.

La vitesse angulaire du fluide est

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega + \frac{\psi_A}{r\mu_0\rho} B_\theta \quad (4.18)$$

Le champ électrique est alors

$$\mathbf{E} = -\Omega \nabla A \quad (4.19)$$

car

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = \frac{d\phi}{dA} \nabla A$$

en utilisant les relations (4.6) et (4.15).

Comparons les ordres de grandeurs des deux membres de l'expression de la vitesse azimutale :

$$\left| \frac{\psi_A}{\mu_0\rho} B_\theta \right| = \left| \frac{v_p B_\theta}{B_p} \right| \ll |r\Omega|$$

si la densité près de l'objet central est grande ou si le champ poloidal est fort, et alors

$$v_\theta \approx r\Omega \quad (4.20)$$

Ω correspond donc à la vitesse de rotation angulaire près de la base de l'écoulement.

4.4 Moment angulaire

L'invariance par rotation entraîne l'existence d'une constante du mouvement. Cette dernière est obtenue en projetant l'équation du mouvement (2.28b) sur l'axe $\hat{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\rho \hat{\theta}(\mathbf{v} \cdot \nabla)v &= \frac{\hat{\theta}}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)B \\
\rho \hat{\theta}(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} &= \frac{\hat{\theta}}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\
\rho(\mathbf{v}_p \cdot \nabla(rv_\theta)) \nabla \theta \cdot \hat{\theta} &= \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}_p \cdot \nabla F) \nabla \theta \cdot \hat{\theta} \\
\rho \frac{\psi_A}{\rho \mu_0} \mathbf{B}_p \cdot \nabla(rv_\theta) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_p \cdot \nabla F \\
\psi_A \mathbf{B}_p \cdot \nabla(rv_\theta) &= \mathbf{B}_p \cdot \nabla(rB_\theta) \\
\mathbf{B}_p \cdot \nabla(r\psi_A v_\theta) &= \mathbf{B}_p \cdot \nabla(rB_\theta) \\
\mathbf{B}_p \cdot \nabla(r\psi_A v_\theta - rB_\theta) &= 0
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations (3.23) et (A.12), en prenant en compte le fait que les gradients n'ont pas de composante selon $\hat{\theta}$ (axisymétrie) et que $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \psi_A = 0$. On obtient alors une nouvelle intégrale du mouvement :

$$\boxed{L(A) = rv_\theta - \frac{rB_\theta}{\psi_A}} \quad (4.21)$$

qui correspond au moment angulaire total, c'est à dire à la somme du moment angulaire du fluide et de celui du champ magnétique. Le moment du champ peut donc être transféré au fluide, et inversement, puisque le champ exerce un moment sur le fluide. Lorsque le champ est fort, près de la source, le terme magnétique est dominant, tandis qu'à longue distance, une grande partie du moment se trouve dans la matière.

Le moment angulaire peut être réécrit

$$L = rv_\theta - r\mu_0 \frac{B_p B_\theta}{rv_p}$$

et le second terme représente le rapport du moment magnétique sur le flux massique.

4.5 Constante adiabatique

La loi de Laplace (2.28c) donne, après intégration, une nouvelle constante du mouvement :

$$\boxed{Q(A) = \frac{p}{\rho^\gamma}} \quad (4.22)$$

Q reste constant pour une même particule de fluide et est relié à son entropie spécifique. Ainsi, puisqu'une particule suit les surfaces magnétiques, Q doit être constant sur une telle surface. Toutefois, l'entropie spécifique dépend de la surface, d'où le fait que Q dépende de A .

4.6 Énergie

La projection de l'équation du mouvement (2.28b) dans le plan poloidal est :

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} \right) &= \frac{1}{\mu_0 \rho} \left(\psi_A \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) - \frac{1}{r^2} \Delta^* A \right) \nabla A \\ + \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} Q' - \frac{r B_\theta}{\psi_A} \Omega' - \left(\Omega - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \right) L' - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right) \nabla A \end{aligned}} \quad (4.23)$$

Le calcul détaillé est donné dans l'annexe D.1.

La projection de l'équation précédente dans la direction du champ poloidal \mathbf{B}_p donne, compte du fait que $\mathbf{B}_p \cdot \nabla A = 0$:

$$\mathbf{B}_p \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \Phi - \frac{r\Omega}{\psi_A} B_\theta \right) = 0$$

ce qui fournit l'énergie comme nouvel invariant :

$$\boxed{\mathcal{E}(A) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \Phi - \frac{r\Omega}{\psi_A} B_\theta} \quad (4.24)$$

Il s'agit de l'équation de Bernoulli.

Le troisième terme correspond à la partie poloidale du vecteur de Poynting.

Près de l'objet central, le terme magnétique sera prédominant, tandis qu'à grande distance le terme d'énergie cinétique devient important.

4.7 Récapitulatif

Les différentes quantités conservées obtenues sont

$$\psi_A(A) = \mu_0 \frac{d\psi}{dA} \quad (4.25a)$$

$$\Omega(A) = \frac{d\phi}{dA} \quad (4.25b)$$

$$Q(A) = \frac{p}{\rho^\gamma} \quad (4.25c)$$

$$L(A) = r v_\theta - \frac{r B_\theta}{\psi_A} \quad (4.25d)$$

$$\mathcal{E}(A) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \Phi - r \frac{\Omega}{\psi_A} B_\theta \quad (4.25e)$$

et elles permettent de réduire le nombre de variables de sept à deux.

La vitesse s'exprime comme

$$\mathbf{v} = \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} \mathbf{B} + r \Omega \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.26)$$

et on écrit aussi

$$\frac{v_p}{B_p} = \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} \quad (4.27)$$

Le champ électrique est donné par

$$\mathbf{E} = -\Omega \nabla A \quad (4.28)$$

5 Utilisation des quantités conservées

5.1 Nouvelles expressions des quantités

À l'aide des intégrales du mouvement obtenues, nous pouvons récrire les équations de la MHD (2.28).

On définit le nombre d'Alven comme le rapport de la force de convection sur la force de Laplace :

$$M^2 = \frac{v_p^2}{B_p^2} \mu_0 \rho = \frac{\psi_A^2}{\mu_0 \rho} \quad (5.1)$$

en utilisant l'expression (4.27) (il s'agit de notre seconde inconnue, avec A).

5.1.1 Masse volumique

Du nombre d'Alven on obtient la masse volumique :

$$\rho = \frac{\rho_A}{M^2} \quad (5.2)$$

en définissant la densité d'Alven par

$$\rho_A = \frac{\psi_A^2}{\mu_0} \quad (5.3)$$

5.1.2 Champ magnétique

En utilisant l'expression (4.26), on peut exprimer la composante azimutale de \mathbf{B} en fonction des intégrales premières :

$$\begin{aligned} L &= r v_\theta - \frac{r B_\theta}{\psi_A} \\ &= r \left(\frac{\psi_A}{\mu_0 \rho} B_\theta + r \Omega \right) - \frac{r B_\theta}{\psi_A} \\ &= B_\theta \left(\frac{r \psi_A}{\mu_0 \rho} - \frac{r}{\psi_A} \right) + r^2 \Omega \\ &= B_\theta \left(\frac{r M^2}{\psi_A} - \frac{r}{\psi_A} \right) + r^2 \Omega \\ &= B_\theta \frac{r}{\psi_A} (M^2 - 1) + r^2 \Omega \\ \implies B_\theta &= -\frac{\psi_A}{r} \frac{L - r^2 \Omega}{1 - M^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$B_\theta = -\frac{L \psi_A}{r} \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \quad (5.4)$$

en posant

$$G = \frac{r}{r_A} \quad (5.5)$$

$$r_A^2 = \frac{L}{\Omega} \quad (5.6)$$

où r_A est le rayon d'Alven.

En utilisant l'expression de la densité d'Alven, on peut récrire B_θ comme :

$$B_\theta = \frac{\Omega \psi_A \rho}{r} \frac{r^2 - r_A^2}{\rho - \rho_A} \quad (5.7)$$

Si $\rho = \rho_A$, alors le dénominateur est nul et B_θ tend vers l'infini, ce qui est impossible physiquement, donc le numérateur doit lui aussi tendre zéro :

$$\rho = \rho_A \implies r = r_A \quad (5.8)$$

On peut alors exprimer le champ \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \nabla A \times \nabla \theta - L \psi_A \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \nabla \theta \quad (5.9)$$

5.1.3 Vitesse

On déduit l'expression de la vitesse azimutale à partir du champ magnétique :

$$\begin{aligned} v_\theta &= r\Omega - \frac{M^2 L \psi_A}{\psi_A r} \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \\ &= r\Omega - \frac{LM^2}{r} \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \\ &= \frac{L}{r} \left(\frac{r^2 \Omega}{L} - \frac{M^2 - M^2 G^2}{1 - M^2} \right) \\ &= \frac{L}{r} \left(\frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} \right) \end{aligned}$$

ce qui permet d'exprimer la vitesse poloidale :

$$v_\theta = \frac{L}{r} \frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} \quad (5.10)$$

et la vitesse (4.26) devient

$$\mathbf{v} = \frac{M^2}{\psi_A} \nabla A \times \nabla \theta + L \left(\frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} \right) \nabla \theta \quad (5.11)$$

5.1.4 Pression

La pression (2.28c) devient

$$p = Q \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^\gamma \quad (5.12)$$

5.1.5 Récapitulatif

Les variables écrites en fonction des invariants sont :

$$\rho = \frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \quad (5.13a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla A \times \nabla \theta - L \psi_A \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \nabla \theta \quad (5.13b)$$

$$\mathbf{v} = \frac{M^2}{\psi_A} \nabla A \times \nabla \theta + L \left(\frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} \right) \nabla \theta \quad (5.13c)$$

$$p = Q \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^\gamma \quad (5.13d)$$

en notant

$$M^2 = \frac{\psi_A^2}{\mu_0 \rho} \quad (5.14a)$$

$$r_A^2 = \frac{L}{\Omega} \quad (5.14b)$$

$$\rho_A = \frac{\psi_A^2}{\mu_0} = \rho M^2 \quad (5.14c)$$

$$G = \frac{r}{r_A} \quad (5.14d)$$

5.2 Équations

Les deux équations à résoudre correspondent à la projection de l'équation du mouvement (2.28b) dans le plan poloïdal, à savoir dans les directions \mathbf{v}_p et ∇A .

5.2.1 Projection parallèle à l'écoulement

Comme on l'a vu dans la section 4.6, la projection de l'équation du mouvement (4.23) dans la direction de \mathbf{v}_p donne la loi de Bernoulli (4.25e). Exprimons cette dernière équation en fonction des seules inconnues en utilisant les relations (5.13) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \Phi - r \frac{\Omega}{\psi_A} B_\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{\psi_A} \nabla A \times \nabla \theta + \frac{L}{r} \left(\frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu_0 M^2}{\psi_A^2} Q \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^\gamma \\ &\quad + \Phi + r \frac{\Omega}{\psi_A} \frac{L \psi_A}{r} \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \\ &= \frac{M^4}{2r^2 \psi_A^2} |\nabla A|^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(\frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} \right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} Q \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^{\gamma - 1} \\ &\quad + \Phi + \Omega L \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \end{aligned}$$

car $|\nabla A \times \hat{\boldsymbol{\theta}}| = |\nabla A|$ et $\nabla A \perp \hat{\boldsymbol{\theta}}$, d'où notre première équation :

$$\boxed{\frac{M^4}{2r^2\psi_A^2} |\nabla A|^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(\frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} \right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} Q \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^{\gamma-1} + \Phi + \Omega L \frac{1 - G^2}{1 - M^2} = \mathcal{E}} \quad (5.15)$$

5.2.2 Projection perpendiculaire à l'écoulement

L'équation transverse, c'est à dire l'équation du mouvement du plan poloidal projetée dans la direction ∇A est :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] - \frac{1}{\mu_0 \rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] \\ = \mathcal{E}' - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} Q' - \Omega L' + \frac{r B_\theta}{\psi_A} \Omega' - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} L' + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \frac{\psi'_A}{\psi_A} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Son expression en fonction des quantités conservées devient :

$$\boxed{\begin{aligned} (1 - M^2) \Delta^* A - \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial M^2}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial M^2}{\partial z} + \frac{r^2 \psi_A^2}{M^2} \mathcal{E}' \\ - \frac{\mu_0 r^2}{\gamma - 1} \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^\gamma Q' - \frac{\psi_A^2}{M^2} \frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} L L' - \frac{L^2 G^2 \psi_A^2}{M^2} \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \frac{\Omega'}{\Omega} \\ + \left(L^2 \psi_A^2 \left(\frac{1 - G^2}{1 - M^2} \right)^2 + M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\psi'_A}{\psi_A} = 0 \end{aligned}} \quad (5.17)$$

Les calculs sont détaillés dans l'annexe D.2.

On peut montrer [5] qu'il est possible d'écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{v_p^4 - v_p^2(c_s^2 + v_A^2) + c_s^2 v_{Ap}^2}{v_p^4} \nabla^2 A - \nabla A \cdot \ln |\nabla A| = \frac{\mathcal{F}}{1 - M^2} \quad (5.18)$$

où \mathcal{F} est une fonction de r, M, A et des dérivées d'ordre un de A , avec

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

c_s étant la vitesse du son et v_A la vitesse d'Alven. v_{Ap} est la vitesse d'Alven poloidale et vaut donc $B_p/\sqrt{\mu_0 \rho}$.

Cette équation est de type elliptique ou hyperbolique en fonction du signe de la quantité

$$\left(v_p^4 - v_p^2(c_s^2 + v_A^2) + c_s^2 v_{Ap}^2 \right) \left(v_p^2(c_s^2 + v_A^2) - c_s^2 v_{Ap}^2 \right)$$

6 Interprétation

6.1 Surface d'Alven

La surface d'Alven est définie comme les points où $M = 1$, c'est à dire $\rho = \rho_A$ et de fait $r = r_A$ (ou $G = 1$) selon les expressions (5.14) et d'après la relation (5.8).

De plus, on a forcément $\mathcal{F} = 1$ pour des raisons de régularité.

6.2 L'équation de Bernoulli

On note \mathcal{B} le membre de gauche de l'équation de Bernoulli (5.15) :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(G, A, M^2) = & \frac{M^4}{2r_A^2 \psi_A^2 G^2} |\nabla A|^2 + L\Omega \left(\frac{1}{2G^2} \left(\frac{G^2 - M^2}{1 - M^2} \right)^2 + \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \right) \\ & + \frac{\gamma}{\gamma - 1} Q \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^{\gamma-1} + \Phi \end{aligned} \quad (6.1)$$

La différentielle de M^2 par rapport à r peut s'écrire

$$\frac{dM^2}{dr} = \frac{\partial \mathcal{B} / \partial r}{\partial \mathcal{B} / \partial M^2} \quad (6.2)$$

Ainsi, lorsque le dénominateur s'annule, le numérateur doit lui aussi être nul. Les points où ces deux dérivées s'annulent sont appelés points critiques.

Des calculs simples donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial G^2} = & \frac{M^4}{\psi_A^2} \left(B_r \frac{\partial B_r}{\partial G^2} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial G^2} \right) + L\Omega \frac{G^4(2M^2 - 1) - M^4}{2G^4(1 - M^2)^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial G^2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial M^2} = & \frac{M^2}{\psi_A^2} (B_r^2 + B_z^2) + L\Omega \frac{M^2 (G^2 - 1)^2}{G^2 (1 - M^2)^3} - \gamma Q \frac{\psi_A^{2(\gamma-1)}}{M^{2\gamma}} = 0 \end{aligned}$$

en se rappelant que

$$\frac{|\nabla A|^2}{r^2} = B_r^2 + B_z^2$$

Si $Q = 0$, alors la seconde équation donne

$$M^2 = 1 + \left(\frac{L\Omega \psi_A^2}{G^2} \frac{(G^2 - 1)^2}{B_r^2 + B_z^2} \right)^{1/3} \quad (6.4)$$

On peut aussi écrire

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial M^2} = \frac{1}{M^2} \frac{v_p^4 - v_p^2(c_s^2 + v_A^2) + c_s^2 v_{Ap}^2}{v_p^2 - v_{Ap}^2}$$

Ainsi quand $\mathcal{B} = \mathcal{E}$, ces minima sont des points de la solution, on a $v_p^2 = v_s^2$ ou $v_p^2 = v_f^2$, qui correspondent respectivement aux vitesses des ondes magnéto-soniques lentes et rapides, avec $v_s^2 < v_f^2$.

7 Simulations

7.1 Adimensionnement

On cherche à adimensionner toutes les variables utilisées. Pour ce faire, on pose

$$\begin{cases} r = r_0 r' \\ z = r_0 z' \\ \mathbf{v} = v_0 \mathbf{v}' \\ \mathbf{B} = B_0 \mathbf{B}' \\ \rho = \rho_0 \rho' \\ p = p_0 p' \end{cases} \quad (7.1)$$

où r_0, v_0, B_0, ρ_0 et p_0 sont des quantités de référence.

Écrivons l'équation du mouvement (2.28b) en faisant les remplacements (7.1) :

$$\rho' (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = -\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \nabla' p' - \frac{\mathcal{GM}}{r_0 v_0^2} \nabla' \frac{-1}{r'} + \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 v_0^2} (\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}' \quad (7.2)$$

ce qui donne les relations :

$$\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} = \frac{\mathcal{GM}}{r_0 v_0^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 v_0^2} = 1$$

d'où

$$\begin{cases} v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{GM}}{r_0}} \\ B_0 = v_0 \sqrt{\mu_0 \rho_0} \\ p_0 = \rho_0 v_0^2 \end{cases} \quad (7.3)$$

On peut aussi adimensionner les intégrales du mouvement (4.25) :

$$\begin{cases} \psi_{A,0} = \mu_0 \rho_0 \frac{v_0}{B_0} = \frac{B_0}{v_0} = \sqrt{\mu_0 \rho_0} \\ Q_0 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{v_0^2}{\rho_0^{\gamma-1}} \\ \Omega_0 = \frac{v_0}{r_0} = \sqrt{\frac{\mathcal{GM}}{r_0^3}} \\ L_0 = r_0 v_0 = \sqrt{\mathcal{GM} r_0} \\ \mathcal{E}_0 = v_0^2 = \frac{\mathcal{GM}}{r_0} \end{cases} \quad (7.4)$$

Le potentiel gravitationnel adimensionné est donc $\Phi' = -1/\sqrt{r'^2 + z'^2}$. Le nombre de Mach est naturellement sans dimension.

Dans la suite nous omettrons les primes.

7.2 Choix des intégrales

On choisit d'utiliser des lignes de champs paraboliques (qui correspondent bien aux propriétés requises pour A), c'est à dire de la forme

$$A(r, z) = A_0 \frac{r^\alpha}{z^{\alpha/b}} \quad (7.5)$$

où α et b sont deux constantes permettant de choisir l'allure des lignes. Dans le plan (r, z) , ces lignes correspondront à l'équation

$$z \propto r^b \quad (7.6)$$

Comme nous l'avons indiqué (section 4.3), la vitesse angulaire $\Omega(A)$ correspond à une rotation des lignes de champ magnétiques. Elle est donc reliée aux sources de ce champ : dans le cas d'une étoile, on peut assimiler cette rotation à la rotation de l'étoile sur elle-même, d'où $\Omega(A) = \text{cste}$. De plus, si un disque képlérien est présent, alors la vitesse angulaire varie comme $r^{-3/2}$ (après un palier constant correspond à l'étoile) d'où²

$$\Omega(A) = \sqrt{\frac{1}{A^{3/\alpha}}} + \Omega_0 \quad (7.7)$$

L'intégrale $Q(A)$ est reliée à l'entropie (section 4.5). S'il n'y a pas de sources de chaleur, alors l'écoulement est isentropique et Q est constante :

$$Q(A) = Q_0 \quad (7.8)$$

Le cas $Q = 0$ correspond à un écoulement froid.

Le moment angulaire doit être nul pour $A = 0$ et croître à mesure que l'on s'éloigne de l'axe. On choisira

$$L(A) = L_0 A \quad (7.9)$$

2. La puissance $1/\alpha$ permet d'obtenir la puissance $-3/2$ en prenant en compte l'expression $A(r, z)$ définie plus haut. Si cette dernière change, alors l'expression de Ω doit aussi changer.

Annexes

A Relations vectorielles

Soient f un champ scalaire, \mathbf{U} et \mathbf{V} des champs vectoriels, alors on a les relations suivantes :

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.11})$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \frac{V^2}{2} + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla(f\mathbf{V}) = f \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla f \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{V}) = f \nabla \times \mathbf{V} + \nabla f \times \mathbf{V} \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{U} \times \nabla \times \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{U} \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = -\mathbf{U} \nabla \times \mathbf{V} + \mathbf{V} \nabla \times \mathbf{U} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \mathbf{U} \nabla \mathbf{V} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla \mathbf{U} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U} \quad (\text{A.17})$$

Soit $f(x, y)$ une fonction. On souhaite effectuer le changement de variable $(x, y) \rightarrow (u_1, u_2)$. Son gradient dans la nouvelle base vaut

$$\nabla f(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \nabla u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \nabla u_2 \quad (\text{A.18})$$

En effet, dans la base (x, y) , son gradient vaut

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{y}$$

et on a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

et de même avec $\partial_y f$. Par identification, on obtient bien (A.18).

B Dérivée convective

Si on considère le fluide à deux instants t et $t' = t + dt$ et deux positions \mathbf{r} et \mathbf{r}' successifs, alors son accélération vaut

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}', t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}', t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t') + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \\ &= \left(\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)dt, t + dt) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t + dt) \right) + \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t + dt) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right) \\ &= dt(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

et on obtient alors l'expression de l'accélération convective

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

L'expression de cette dérivée est valable pour tout champ scalaire f ou vectoriel \mathbf{U} :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{U} \quad (\text{B.20})$$

C Lignes de champ et quantités conservées

Dans toute la suite, A est la fonction de flux.

Une ligne de champ est définie par $A = cste$. Par définition du gradient, les lignes de champ sont orthogonales à ∇A . La projection du gradient selon une direction $\hat{\mathbf{b}}$ est $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla A$. Ainsi, si

$$\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla A = 0 \quad (\text{C.21})$$

alors A est constant dans la direction $\hat{\mathbf{b}}$: comme $\hat{\mathbf{b}} \neq 0$, on a forcément $\nabla A = 0$ d'où $A = cste$ (figure 2).

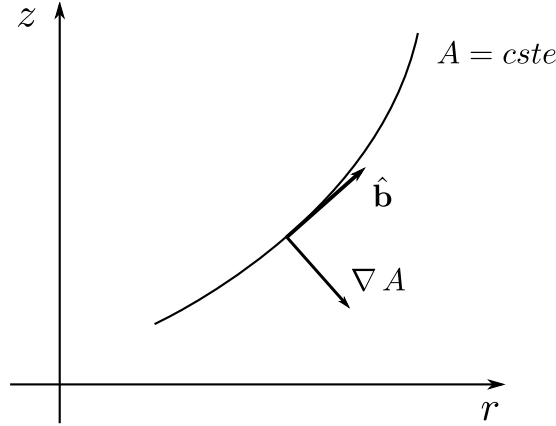


FIGURE 2 – Projection du gradient selon un vecteur.

Nous allons montrer maintenant comment montrer qu'une quantité est conservée sur une ligne de champ.

Soit $K = K(r, z)$ une quantité telle que

$$\nabla K \times \nabla A = 0 \quad (\text{C.22})$$

alors, si on effectue le changement de variable $(r, z) \rightarrow (A, z)$, on a

$$\nabla K = \frac{\partial K}{\partial A} \nabla A + \frac{\partial K}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

car $\nabla z = \hat{\mathbf{z}}$. Alors

$$\begin{aligned} \nabla K \times \nabla A &= \left(\frac{\partial K}{\partial A} \nabla A + \frac{\partial K}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times \nabla A \\ &= \frac{\partial K}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla A = 0 \end{aligned}$$

or comme $\hat{\mathbf{z}} \times \nabla A \neq 0$, on a forcément

$$\frac{\partial K}{\partial z} = 0$$

ce qui donne après intégration $K = K(A)$. La formule de changement de variable est donc

$$\nabla K = \frac{dK}{dA} \nabla A \quad (\text{C.23})$$

On peut arriver à la même conclusion géométriquement : considérons deux lignes telles que $A = cste$ sur la première et $K = cste$ sur la seconde (figure 3). Au point d'intersection des deux courbes, la relation (C.22) indique que les gradients des deux quantités sont parallèles, donc que localement les courbes sont confondues. Mais cette relation doit être vraie pour tout voisinage, et par conséquence pour tout point. On déduit alors que les deux lignes sont confondues.

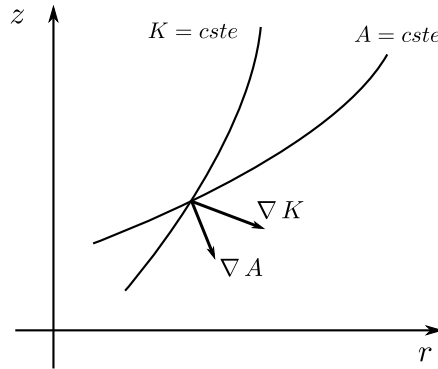


FIGURE 3 – Relation géométrique montrant qu'une quantité est conservée sur les lignes de champ.

D Démonstrations

D.1 Équation du mouvement dans le plan poloidal

En partant de l'équation du mouvement (2.28b) et en utilisant les formules (3.22) et (A.12), on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p + \rho \nabla \Phi - \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\
0 &= \nabla \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi - \frac{1}{\mu_0 \rho} \left((\nabla \times \mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_p + (\nabla \times \mathbf{B}_\theta) \times \mathbf{B}_\theta \right) \\
&\quad + (\nabla \times \mathbf{v}_p) \times \mathbf{v}_p + (\nabla \times \mathbf{v}_\theta) \times \mathbf{v}_\theta \\
0 &= \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi \right) + \nabla \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \nabla Q + \frac{1}{\mu_0 \rho r^2} \left(\nabla A \Delta^* A + (rB_\theta) \nabla(rB_\theta) \right) \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \psi \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) + (rv_\theta) \nabla(rv_\theta) \right) \\
0 &= \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \nabla Q + \frac{1}{\mu_0 \rho r^2} \left(\nabla A \Delta^* A + (rB_\theta) \nabla(rB_\theta) \right) \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \psi \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) + (rv_\theta) \nabla(rv_\theta) \right) \\
0 &= \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \nabla Q + \frac{1}{\rho} \nabla A \left(\frac{1}{\mu_0 r^2} \Delta^* A - \frac{d\psi}{dA} \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{\mu_0 \rho r^2} \left(rB_\theta \nabla(rB_\theta) \right) - \frac{v_\theta}{r} \nabla(rv_\theta) \\
0 &= \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \nabla Q + \frac{1}{\mu_0 \rho} \nabla A \left(\frac{1}{r^2} \Delta^* A - \psi_A \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) \right) \\
&\quad - \nabla \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} - \Omega \nabla L + \frac{rB_\theta}{\psi_A} \nabla \Omega - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla L + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho \psi_A} \nabla \psi_A \\
0 &= \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} \right) + \frac{1}{\mu_0 \rho} \nabla A \left(\frac{1}{r^2} \Delta^* A - \psi_A \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) \right) \\
&\quad \left(-\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{dQ}{dA} - \Omega \nabla L + \frac{rB_\theta}{\psi_A} \frac{d\Omega}{dA} - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \frac{dL}{dA} + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho \psi_A} \frac{d\psi_A}{dA} \right) \nabla A
\end{aligned}$$

Le terme de pression se simplifie en utilisant la loi de Laplace (2.28c)³ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \nabla p &= \frac{1}{\rho} \nabla(Q\rho^\gamma) \\
&= \frac{1}{\rho} \nabla(Q\rho^{\gamma-1} \rho) \\
&= \nabla Q\rho^{\gamma-1} + Q\rho^{\gamma-2} \nabla \rho \\
&= \nabla Q\rho^{\gamma-1} + Q \nabla \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \\
&= \nabla Q\rho^{\gamma-1} + \frac{1}{\gamma-1} (\nabla Q\rho^{\gamma-1} - \rho^{\gamma-1} \nabla Q) \\
&= \frac{\gamma}{\gamma-1} \nabla Q\rho^{\gamma-1} - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \nabla Q
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \nabla \frac{p}{\rho} - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \nabla Q} \quad (\text{D.24})$$

Les termes en v_θ sont obtenus par les calculs suivants en utilisant les expressions de la vitesse radiale (4.18) et du moment angulaire (4.21) :

$$\begin{aligned}
&\frac{B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla(rB_\theta) - \frac{v_\theta}{r} \nabla(rv_\theta) \\
&= \frac{B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla(rB_\theta) - \left(\Omega + \frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} B_\theta \right) \nabla \left(L + \frac{rB_\theta}{\psi_A} \right) \\
&= \frac{B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla(rB_\theta) - \Omega \nabla L - \Omega \nabla \frac{rB_\theta}{\psi_A} - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla L - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla \frac{rB_\theta}{\psi_A} \\
&= \frac{B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla(rB_\theta) - \Omega \nabla L - \left(\nabla \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} - \frac{rB_\theta}{\psi_A} \nabla \Omega \right) \\
&\quad - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla L - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \left(\frac{1}{\psi_A} \nabla(rB_\theta) + (rB_\theta) \nabla \frac{1}{\psi_A} \right) \\
&= \frac{B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla(rB_\theta) - \Omega \nabla L - \nabla \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} + \frac{rB_\theta}{\psi_A} \nabla \Omega \\
&\quad - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla L - \frac{B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla(rB_\theta) - \frac{\psi_A B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \nabla \frac{1}{\psi_A} \\
&= -\nabla \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} - \Omega \frac{dL}{dA} + \frac{rB_\theta}{\psi_A} \nabla \Omega - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \nabla L + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho \psi_A} \nabla \psi_A
\end{aligned}$$

soit finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}
\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} \right) &= \frac{1}{\mu_0 \rho} \left(\psi_A \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) - \frac{1}{r^2} \Delta^* A \right) \nabla A \\
+ \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} Q' - \frac{rB_\theta}{\psi_A} \Omega' - \left(\Omega - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} \right) L' - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right) &\nabla A
\end{aligned}} \quad (\text{D.25})$$

en adoptant la convention $dK/dA = K'$.

3. Comme on effectue le calcul sur une ligne $A = cste$, Q est constant et on aurait pu intégrer directement ($\nabla Q = 0$). Toutefois le résultat obtenu sera utilisé par la suite

D.2 Projection de l'équation du mouvement selon le gradient

La projection de l'équation du mouvement dans le plan poloidal (4.23) dans la direction de ∇A donne :

$$\begin{aligned}
\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} \right) &= \frac{1}{\mu_0 \rho} \left(\psi_A \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) - \frac{1}{r^2} \Delta^* A \right) \nabla A \\
&+ \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} Q' + \Omega L' - \frac{r B_\theta}{\psi_A} \Omega' + \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} L' - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right) \nabla A \\
\frac{1}{\mu_0 \rho} \left(\psi_A \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) - \frac{1}{r^2} \Delta^* A \right) \nabla A \\
&= \left(\mathcal{E}' - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} Q' - \Omega L' + \frac{r B_\theta}{\psi_A} \Omega' - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} L' + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right) \nabla A \\
\frac{1}{\mu_0 \rho} \left(\psi_A \nabla \left(\frac{1}{\mu_0 \rho r^2} \nabla A \right) - \frac{1}{r^2} \Delta^* A \right) \nabla A \\
&= \left(\mathcal{E}' - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} Q' - \Omega L' + \frac{r B_\theta}{\psi_A} \Omega' - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} L' + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right) \nabla A
\end{aligned}$$

soit, en utilisant les relations (3.18), sous forme explicite :

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] - \frac{1}{\mu_0 \rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] \\
= \mathcal{E}' - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} Q' - \Omega L' + \frac{r B_\theta}{\psi_A} \Omega' - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} L' + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \frac{\psi'_A}{\psi_A}
\end{aligned} \tag{D.26}$$

en ayant utilisé l'expression de l'énergie (4.25e) :

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - \frac{r\Omega B_\theta}{\psi_A} \right) = \nabla \mathcal{E} = \mathcal{E}' \nabla A$$

et en écrivant :

$$\begin{aligned}
\nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \nabla \psi \right) &= \nabla \left(\frac{1}{\rho r^2} \frac{d\psi_A}{dA} \nabla A \right) \\
&= \nabla \left(\frac{1}{\mu_0 \rho r^2} \nabla A \right)
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant à exprimer l'équation (D.26) en fonctions des invariants (5.13) : appelons respectivement M_1 et M_2 les membres de gauche et droite.

Les dérivées selon r du premier terme de M_1 s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_A}{\mu_0 \rho r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) &= \frac{M^2}{r \psi_A} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M^2}{r \psi_A} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\
&= \frac{M^2}{r \psi_A} \left[\frac{M^2}{\psi_A} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M^2}{\psi_A} \right) \right] \\
&= \frac{M^2}{r^2 \psi_A} \left[\frac{M^2 r}{\psi_A} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{\psi_A} \frac{\partial A}{\partial r} \left(\frac{\partial M^2}{\partial r} + M^2 \psi_A \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\psi_A} \right) \right] \\
&= \frac{M^2}{r^2 \psi_A^2} \left[M^2 r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial M^2}{\partial r} - M^2 \frac{\psi_A}{\psi_A^2} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \psi_A}{\partial r} \right] \\
&= \frac{M^2}{r^2 \psi_A^2} \left[M^2 r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial M^2}{\partial r} - M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right]
\end{aligned}$$

et on a exactement le même résultat avec les dérivées selon z :

$$\frac{M^2}{r^2 \psi_A^2} \left[M^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial M^2}{\partial z} - M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right]$$

Le second terme est quant à lui :

$$\frac{1}{\mu_0 \rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right] = \frac{M^2}{r^2 \psi_A^2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right] = \frac{M^2}{r^2 \psi_A^2} \Delta^* A$$

Leur somme vaut alors

$$M_1 = \frac{M^2}{r^2 \psi_A^2} \left((M^2 - 1) \Delta^* A + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial M^2}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial M^2}{\partial z} - M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} - M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right)$$

Calculons maintenant M_2 :

$$\begin{aligned}
M_2 &= \mathcal{E}' - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} Q' - \Omega L' + \frac{r B_\theta}{\psi_A} \Omega' - \frac{\psi_A B_\theta}{\mu_0 \rho r} L' + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} \frac{\psi'_A}{\psi_A} \\
&= \mathcal{E}' - \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^{\gamma-1} Q' - \Omega L' + \frac{r}{\psi_A} \left(-\frac{L \psi_A}{r} \frac{1-G^2}{1-M^2} \right) \Omega' \\
&\quad - \frac{M^2}{r \psi_A} \left(-\frac{L \psi_A}{r} \frac{1-G^2}{1-M^2} \right) L' + \frac{M^2}{\psi_A^2} \frac{L^2 \psi_A^2}{r^2} \left(\frac{1-G^2}{1-M^2} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} \\
&= \mathcal{E}' - \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^{\gamma-1} Q' - \left(\Omega - \frac{L M^2}{r^2} \frac{1-G^2}{1-M^2} \right) L' \\
&\quad - L \frac{1-G^2}{1-M^2} \Omega' + \frac{M^2 L^2}{r^2} \left(\frac{1-G^2}{1-M^2} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} \\
&= \mathcal{E}' - \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^{\gamma-1} Q' - \frac{G^2 - M^2}{1-M^2} L L' \\
&\quad - \frac{L^2 G^2}{r^2} \frac{1-G^2}{1-M^2} \frac{\Omega'}{\Omega} + \frac{M^2 L^2}{r^2} \left(\frac{1-G^2}{1-M^2} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A}
\end{aligned}$$

en ayant transformé certains termes :

- Terme en L' :

$$\left(\Omega - \frac{LM^2}{r^2} \frac{1-G^2}{1-M^2} \right) L' = \frac{1}{r^2} \frac{G^2 - M^2}{1-M^2} LL'$$

grâce au même calcul qui a donné l'équation (5.10).

- Terme en Ω' :

$$L \frac{1-G^2}{1-M^2} \Omega' = \frac{L^2 G^2}{r^2} \frac{1-G^2}{1-M^2} \frac{\Omega'}{\Omega}$$

en utilisant les expressions (5.14).

Égalisons maintenant les deux membres M_1 et M_2 :

$$0 = M_1 + M_2$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{M^2}{r^2 \psi_A^2} \left((1-M^2) \Delta^* A - \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial M^2}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial M^2}{\partial z} + M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} + M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} \right) \\ &\quad + \mathcal{E}' - \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^{\gamma-1} Q' - \frac{1}{r^2} \frac{G^2 - M^2}{1-M^2} LL' \\ &\quad - \frac{L^2 G^2}{r^2} \frac{1-G^2}{1-M^2} \frac{\Omega'}{\Omega} + \frac{M^2 L^2}{r^2} \left(\frac{1-G^2}{1-M^2} \right)^2 \frac{\psi'_A}{\psi_A} \\ 0 &= (1-M^2) \Delta^* A - \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial M^2}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial M^2}{\partial z} + \frac{r^2 \psi_A^2}{M^2} \mathcal{E}' \\ &\quad - \frac{\mu_0 r^2}{\gamma-1} \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^\gamma Q' - \frac{\psi_A^2}{M^2} \frac{G^2 - M^2}{1-M^2} LL' - \frac{L^2 G^2 \psi_A^2}{M^2} \frac{1-G^2}{1-M^2} \frac{\Omega'}{\Omega} \\ &\quad + \left(L^2 \psi_A^2 \left(\frac{1-G^2}{1-M^2} \right)^2 + M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\psi'_A}{\psi_A} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} &(1-M^2) \Delta^* A - \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial M^2}{\partial r} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial M^2}{\partial z} + \frac{r^2 \psi_A^2}{M^2} \mathcal{E}' \\ &- \frac{\mu_0 r^2}{\gamma-1} \left(\frac{\psi_A^2}{\mu_0 M^2} \right)^\gamma Q' - \frac{\psi_A^2}{M^2} \frac{G^2 - M^2}{1-M^2} LL' - \frac{L^2 G^2 \psi_A^2}{M^2} \frac{1-G^2}{1-M^2} \frac{\Omega'}{\Omega} \\ &+ \left(L^2 \psi_A^2 \left(\frac{1-G^2}{1-M^2} \right)^2 + M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + M^2 \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\psi'_A}{\psi_A} = 0 \end{aligned}} \quad (\text{D.27})$$

Références

- [1] Steven Balbus. *Astrophysical Gasdynamics*.
<http://www.lra.ens.fr/~balbus/>.
- [2] H. J. de Blank. Plasma equilibrium in tokamaks. *Transactions of Fusion Science and Technology*, 49, 2006.
http://www.carolusmagnus.net/papers/2005/docs/de_blank_plasma_equilibrium.pdf.
- [3] Jonathan Ferreira. *Introduction aux plasmas : magnéto-hydrodynamique*. Laboratoire d'astrophysique de Grenoble, 2009.
http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/~ferreira/enseignement/cours_MHD.pdf.
- [4] Jean Heyvaerts. Rotating MHD Winds. *Lecture Notes in Physics*, 468 :31–99, 1994.
- [5] Nektarios Vlahakis. Output from MHD models. *Lecture Notes in Physics*, 793 :51–108, 2010.