

# Transition réversible/irréversible pour une suspension dans un écoulement de Couette non brownien

Harold Erbin

2 juin 2011

## Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Une expérience : Taylor	3
1.2 Travaux de caractérisation	4
1.3 Problématique	4
<b>2 Théorie</b>	<b>5</b>
2.1 Écoulement de Stokes	5
2.2 Profil des vitesses	5
2.3 Diffusion	7
2.4 Cisaillement d'une couche de liquide	8
<b>3 Matériel et méthodes</b>	<b>9</b>
3.1 Description	9
3.2 Montage	9
3.3 Paramètres contrôlés	10
3.4 Traitement et analyse	10
3.5 Estimation des erreurs	10
3.6 Problèmes rencontrés	11
<b>4 Expériences : Colorant</b>	<b>12</b>
4.1 Eau	12
4.2 Eau sucrée	12
4.3 Glycérol	12
<b>5 Expériences : billes</b>	<b>13</b>
5.1 Diffusion	13
5.2 Une bille	13
5.3 Trois billes	13

TABLE DES MATIÈRES

<b>6</b>	<b>Traitement et discussions des résultats</b>	<b>16</b>
6.1	Ajustements . . . . .	16
6.2	Évolution de l'aire du triangle . . . . .	18
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>21</b>
A.1	Calcul des moyennes . . . . .	21
	<b>Références</b>	<b>22</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Une expérience : Taylor

Sous certaines conditions, les mouvements de corps ou de fluides dans un écoulement de Couette<sup>1</sup> peuvent être réversibles : un système évoluant de manière symétrique reviendra à son état initial.

G.I. Taylor, dans son film *Low Reynolds number flows* [4], présente une expérience afin de mettre en évidence cette propriété : il réalise un écoulement de Couette à l'aide de deux cylindres coaxiaux, et il remplit l'interstice entre ces deux derniers d'un fluide très visqueux. Il injecte ensuite localement dans ce fluide une goutte de colorant (dont le diamètre est de l'ordre de la fosse) et met le cylindre intérieur en rotation lente (figure 1, étape 1). Le colorant se répartit alors dans une zone entre les deux cylindres, en s'étalant de plus en plus et en devenant presque invisible (étape 2). Finalement, il stoppa le cylindre avant de le faire tourner en sens inverse, toujours à faible vitesse (étape 3). Lorsque le cylindre a tourné le même nombre de tour qu'en sens direct, la goutte de colorant s'est reformée, ce qui signifie que toutes les particules sont revenues à leur place originelle<sup>2</sup> (étape 4).

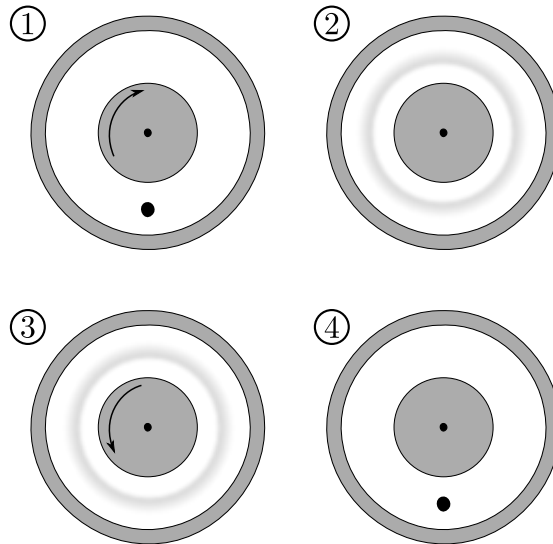


FIGURE 1 – Colorant dans un écoulement de Couette cylindrique (expérience réalisée par Taylor).

Toutefois, lorsque certains paramètres changent, la réversibilité disparaît et le système devient chaotique : la forte sensibilité aux conditions initiales implique qu'une légère perturbation des mouvements des particules entraîne de grandes modifications des trajectoires, conduisant à une perte de la réversibilité. Essentiellement, les modifications des trajectoires sont dues aux chocs (au sens large du terme) entre les particules, qui conduisent à une diffusion apparente : les particules possèdent alors un mouvement aléatoire et anisotrope.

1. Cisaillement d'un fluide visqueux entre deux surfaces.

2. Notons toutefois que la diffusion moléculaire peut étaler légèrement la goutte, mais l'effet est négligeable.

## 1.2 Travaux de caractérisation

D. Pine et son équipe ont cherché à caractériser les paramètres qui influençaient le seuil de la transition entre les comportements réversible et irréversible [3]. Ils ont montré que l'apparition du seuil était corrélée à la déformation du fluide et à la fraction volumique de la suspension (mais il ne dépend quasiment pas du nombre de Reynolds). De plus, ils ont montré que le coefficient de diffusion était nul sous le seuil (il y a donc réversibilité), et qu'il croissait en  $\sqrt{t}$  au dessus (valeur typique des phénomènes de diffusion). Ces résultats avaient été prédits par des simulations numériques.

Plus tard, ils se sont intéressés à la modélisation de ces phénomènes en utilisant une description chaotique, et ils ont ainsi mis en évidence une auto-organisation des systèmes étudiés [1] : les particules s'arrangent de manière à diminuer les collisions et le système tend vers un état où, en moyenne, le nombre de particules subissant encore des chocs est constant ou nul.

Ces propriétés ont ensuite été observées expérimentalement.

## 1.3 Problématique

Les expériences de D. Pine ont été menées avec un grand nombre — plusieurs milliers — de particules de petites tailles (environ  $200\ \mu\text{m}$ ). Nous nous sommes donc demandés si les mêmes phénomènes étaient observables en utilisant un petit nombre de billes<sup>3</sup> de taille macroscopique.

---

3. Selon la théorie des systèmes dynamiques, un comportement chaotique peut se manifester dès que trois corps sont en présence.

## 2 Théorie

### 2.1 Écoulement de Stokes

Soit l'équation de Navier–Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v} \quad (1)$$

Si on s'intéresse au régime stationnaire, on a  $\partial_t \vec{v} = 0$  et, de plus, si l'on évalue le rapport des forces visqueuses sur les forces de convection, on obtient le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta} \quad (2)$$

où  $L$  et  $U$  sont respectivement la longueur et la vitesse caractéristiques de l'écoulement. Si  $Re \ll 1$ , le terme  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  est alors négligeable devant  $\Delta \vec{v}$  et on obtient l'équation de Stokes :

$$\eta \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} p \quad (3)$$

Cette dernière équation [2, p. 443]

- possède une unique solution  $\vec{v}$  pour des conditions aux limites données ;
- est linéaire en  $\vec{v}$  ;
- est symétrique pour  $\vec{v}$  (si  $\vec{v}$  est solution, alors  $-\vec{v}$  est aussi solution, à condition de changer le signe de la pression et des vitesses aux parois).

La symétrie conduit à la réversibilité des trajectoires : si l'on impose une rotation dans un sens, puis dans l'autre, alors les deux vitesses conduisent au même type de mouvement, avec l'un se faisant en sens inverse. Ainsi, dans ce type d'écoulement, une bille peut revenir à sa position initiale si l'on applique une rotation puis une rotation inverse de même vitesse et pendant une même durée.

### 2.2 Profil des vitesses

On considère un fluide incompressible de viscosité  $\eta$ , compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  (figure 2) de hauteurs infinies [2, p. 210]. Le cylindre intérieur tourne avec une vitesse  $\Omega$ .

On choisit d'utiliser les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . La pression et la vitesse sont indépendants de  $z$  et  $\theta$  à cause de l'invariance par translation verticale et par rotation :  $v = v(r)$  et  $p = p(r)$ . De plus, le champ des vitesses est symétrique par rapport à l'axe  $z$ , ce qui implique  $v_z = 0$ .

La condition d'incompressibilité  $\text{div } \vec{v} = 0$  s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad (4)$$

qui s'intègre en

$$v_r = \frac{\lambda}{r} \quad (5)$$

Les conditions aux limites sur les parois ( $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  où  $\vec{n}$  est normal à la paroi) imposent

$$v_r(R_1) = v_r(R_2) = 0 \quad (6)$$

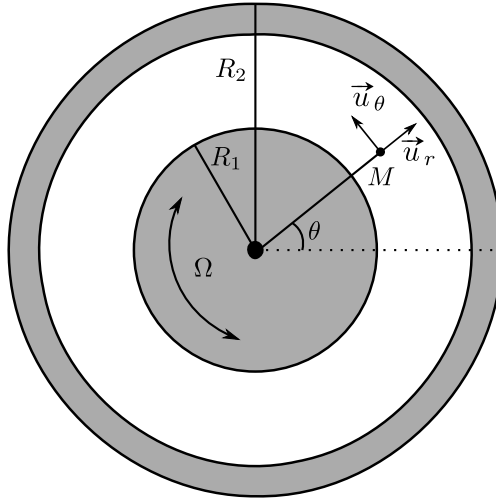


FIGURE 2 – Écoulement de Couette cylindrique.

ce qui donne  $\lambda = 0$ , donc  $v_r$  est nul en tout point du fluide.

Écrivons l'équation de Navier–Stokes pour un fluide visqueux en régime permanent ( $Re \ll 1$ ) en coordonnées cylindriques<sup>4</sup> :

$$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (7a)$$

$$\eta \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) = 0 \quad (7b)$$

Cherchons maintenant une solution de l'équation (7b). On a

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} = 0$$

Cherchons maintenant une solution de la forme  $v_\theta = r^n$  :

$$n(n-1)r^{n-2} + (n-1)r^{n-2} = (n+1)(n-1)r^{n-2} = 0$$

qui est vérifiée pour  $n = -1$  et  $n = 1$ .  $v_\theta = r$  et  $v_\theta = r^{-1}$  sont donc solutions de (7b)<sup>5</sup>. La forme générale des solutions est donc une combinaison linéaire de  $r$  et  $r^{-1}$  :

$$v_\theta = ar + \frac{b}{r} \quad (8)$$

Les conditions aux limites  $v_\theta(R_1) = \Omega R_1$  et  $v_\theta(R_2) = 0$  permettent de déterminer les constantes, ce qui donne finalement

$$v_\theta = \frac{\Omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( -r + \frac{R_2^2}{r} \right) \quad (9)$$

Le profil des vitesses décroît donc presque linéairement en fonction du rayon. Le champ de pression pourrait s'obtenir en intégrant (7a).

4. Dans la première équation, nous gardons le terme de convection puisque le laplacien est nul. De plus, rappelons que l'on a  $v_r = v_z = 0$  et que seules les dérivées par rapport à  $r$  ne sont pas nulles.

5. On pouvait voir directement que  $v_\theta = r$  est solution.

### 2.3 Diffusion

Soit  $f$  une grandeur. Alors si  $f$  diffuse, elle obéit à une équation de diffusion du type [2, chap. 1] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (10)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion. On a alors

$$f(x, t) = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right) \quad (11)$$

où  $\lambda$  est une constante. En effet : la transformée de Fourier de  $f$  est donnée par

$$\hat{f}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x, t) e^{-ikx} dx \quad (12)$$

et on déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t} e^{-ikx} dx &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{-ikx} dx &= -k^2 \hat{f} \end{aligned}$$

ce qui nous ramène, dans l'espace de Fourier, à l'équation

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = -Dk^2 \hat{f} \quad (13)$$

qui s'intègre en

$$\hat{f}(k, t) = \lambda e^{-Dk^2 t} \quad (14)$$

et, par transformée de Fourier inverse, on trouve (11).

Calculons le déplacement moyen au carré  $\langle x^2 \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right) dx \\ &= \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du \\ &= \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt \quad (15)$$

Prenons le logarithme de (15) en omettant le facteur 2 :

$$\log x^2 = \log D + \log t \quad (16)$$

Il s'agit de l'équation d'une droite de coefficient directeur unité.

On peut étendre les résultats qui précèdent à deux et trois dimensions.

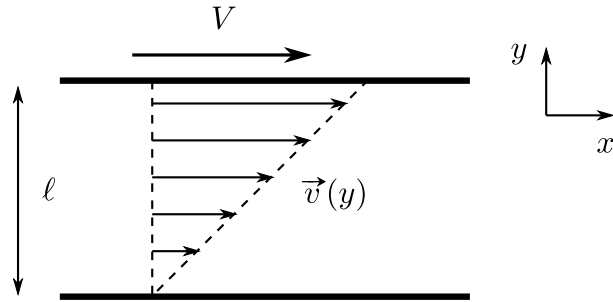


FIGURE 3 – Cisaillement d'un liquide.

## 2.4 Cisaillement d'une couche de liquide

Considérons un cisaillement entre deux plaques (figure 3). Les taux de déformation, de cisaillement et de contrainte sont respectivement définis par

$$\gamma = \frac{dx}{dy} \quad (17a)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{l} = \frac{dv}{dy} \quad (17b)$$

$$\tau = \eta\dot{\gamma} \quad (17c)$$

Après  $n$  cycle, la déformation cumulée est

$$\gamma = 2n\gamma_0 \quad (18)$$

À partir de (17b), l'équation (15) peut se récrire en fonction de  $\gamma$  :

$$\langle x^2 \rangle = 2D_{eff}\gamma \quad (19)$$



## 3 Matériel et méthodes

### 3.1 Description

La manipulation consistait en un écoulement de Couette cylindrique (figure 4). L'objectif était de suivre l'évolution de corps (billes, goutte...) immergé dans le fluide visqueux.

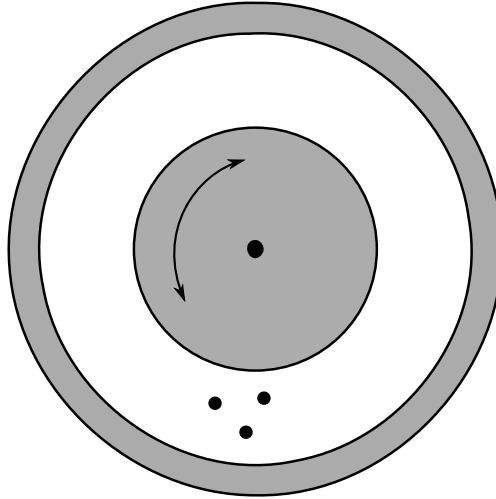


FIGURE 4 – Écoulement de Couette cylindrique avec des billes.

Pour ce faire, nous mettons le cylindre intérieur en rotation pendant une certaine durée, avant d'inverser la rotation pendant cette même durée. Nous répétons ce cycle un certain nombre de fois.

### 3.2 Montage

Le récipient a été réalisé à partir de deux cylindres de plexiglas : celui à l'extérieur était fixe tandis que le cylindre intérieur était surmonté d'un moteur pas à pas, qui assurait sa rotation. La plaque sur laquelle reposaient les cylindres était aussi en plexiglas. Ce matériau a été choisi pour sa transparence, qui nous permettait d'observer l'écoulement par le côté ou en dessous.

Les rayons des cylindres intérieurs et extérieurs étaient respectivement d'environ 4 cm et 7.5 cm.

Le récipient était monté sur quatre pieds, afin de placer en dessous un miroir à 45°. Ce dernier permettait à une caméra placée en face de filmer par en dessous l'écoulement (figure 5). La caméra rapide utilisée était reliée à un ordinateur pour l'acquisition.

Un moteur pas à pas a été choisi afin de choisir l'angle dont on souhaitait tourner. Sa sensibilité était de 2000 pas par tour, c'est à dire que l'angle minimum était de 0.18°.

Le fluide utilisé était du glycérol, privilégié pour sa viscosité, pour sa transparence ainsi que pour la grande quantité disponible. Les suspensions étaient faites de colorant alimentaire et de billes de verre, de diamètre 0.7 cm, colorées afin de pouvoir être repérées par la caméra.

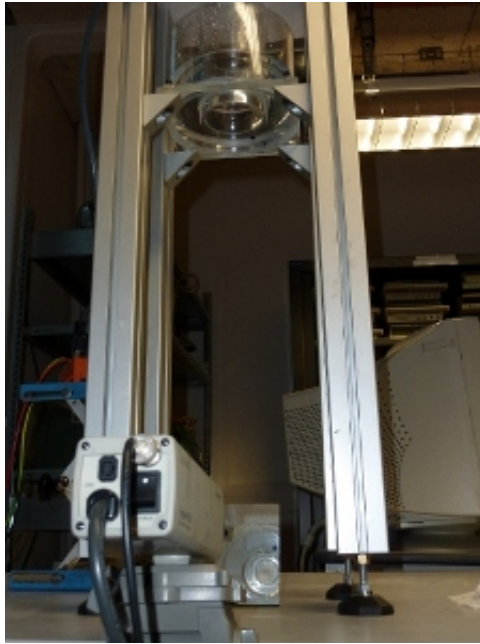


FIGURE 5 – Photographie du montage.

### 3.3 Paramètres contrôlés

Pour toutes les expériences, la vitesse angulaire du moteur a été fixée à  $\omega = 4 \text{ tr/min} \approx 0.42 \text{ rad s}^{-1}$ . À chaque expérience, nous pouvions choisir l'angle dont devait tourner le moteur, et ainsi l'amplitude du cisaillement appliqué au fluide. À partir de maintenant, le mot amplitude sera utilisé pour désigner aussi bien le cisaillement que l'angle dont le moteur tourne à chaque cycle. Ce dernier sera typiquement compris entre  $9^\circ$  et  $72^\circ$ .

La caméra était initialisée de sorte à prendre périodiquement une image (au début de chaque cycle), afin d'obtenir des films stroboscopés.

Le nombre de cycles total effectué a été choisi arbitrairement en fonction de l'amplitude : nous nous sommes arrangés pour que chaque expérience dure entre 15 min et 30 min. Ainsi, le nombre de cycles est compris en moyenne entre 400 et 1000.

### 3.4 Traitement et analyse

Le traitement des images a été réalisé avec le logiciel ImageJ, auquel une extension a été ajoutée afin de déterminer les coordonnées des centres de masse des particules : à chaque particule étaient associées deux coordonnées,  $x$  et  $y$ , dont les valeurs à chaque cycle étaient relevées. Les données ainsi récoltées ont été traitées avec Gnuplot et Python.

### 3.5 Estimation des erreurs

Les deux cylindres n'étaient pas tout à fait coaxiaux et le cylindre intérieur tournait légèrement en torsade et ne reposait pas non plus sur le fond.

La principale source d'erreurs connue à la base a son origine dans le traitement des images qui a été réalisé : nous ne savons pas de quelle manière le centre de masse était pris par le logiciel. De plus, les variations de luminosité de la salle influençaient fortement la circularité des billes lors de la conversion en noir et blanc des images. De fait, nous pouvions nous attendre à ce que le centre de masse se déplace légèrement en fonction de ces variations.

Des tests ont été effectués afin de déterminer si le cylindre revenait bien à sa position exacte de départ à la fin de chaque cycle, ainsi que pour savoir si la synchronisation était correcte. Dans les deux cas, les tests — menés sur une dizaine de minutes — ont été positifs.

Des films ont été produits afin de déterminer le profil des vitesses en fonction de l'éloignement de la bille au cylindre intérieur, mais ils n'ont pas été exploités par manque de temps.

Les unités des déplacements et des vitesses ne seront pas indiquées, puisque le logiciel n'indiquait pas les unités utilisées pour les valeurs qu'il a déterminées.

### 3.6 Problèmes rencontrés

Divers problèmes ont été soulevés, certains n'étant apparus que tardivement. Le premier d'entre eux était la difficulté d'obtenir un centrage correct, à cause du grand nombre de liens à établir entre les différentes parties du montage.

Plus tard est apparu un problème de synchronisation entre la prise de vue et le début d'un nouveau cycle, malgré des essais sur un court nombre de cycles, qui laissaient penser que la synchronisation était correcte.

Au cours des premières expériences, des fuites qui perturbaient l'écoulement ont été mises en évidence. De plus, le moteur s'emballait parfois, et il était alors nécessaire de reprendre les mesures à zéro, ou bien d'accepter de s'affranchir d'une partie des résultats.

## 4 Expériences : Colorant

La totalité des expériences qui suivent ont été réalisées avec des gouttes de colorant.

### 4.1 Eau

Pour la première série d'expériences, nous avons utilisé de l'eau comme fluide.

Sans surprises, le mélange n'était pas réversible, car le colorant sédimentait et était fortement entraîné par l'eau mise en mouvement, qui continuait à se mouvoir avec l'inertie qu'elle avait acquise.

### 4.2 Eau sucrée

Les essais avec l'eau sucrée échouèrent car cette dernière était beaucoup trop trouble. De plus, il fut impossible d'obtenir une viscosité suffisante, et le colorant, moins dense, remontait à la surface.

### 4.3 Glycérol

Diverses expériences ont été menées hors du récipient de Couette ; elles visaient à montrer qualitativement la réversibilité du mélange dans différentes conditions (le mélange étant effectué à la main à l'aide d'une règle en verre). Finalement, un mélange contenant 1/3 de glycérol et 2/3 de très fines billes de verre a été réalisé. Dans ces conditions, le colorant diffusait rapidement dès que l'on mélangeait.

Le colorant étant moins dense que le glycérol, il remontait en surface presque immédiatement. Là, le colorant avait tendance à être attiré par les surfaces latérales et cette perturbation supplémentaire rendait le mouvement irréversible. Toutefois, malgré ces conditions, nous pouvions observer que les gouttes de colorant posées à la surface se reformaient d'une manière approximative.

La meilleure expérience fut obtenue en mélangeant du colorant avec de la glycérine et de la poudre de craie : la densité était presque correcte — une légère sédimentation a été observée — mais le mouvement fut presque réversible.

## 5 Expériences : billes

### 5.1 Diffusion

L'irréversibilité du mouvement se traduit par une diffusion apparente des billes. Le coefficient de diffusion apparent  $D_{eff}$  est relié au déplacement moyen au carré et à la déformation par la formule (19),  $\langle \Delta x(N)^2 \rangle$  est calculé par la formule (20) en annexe.

Le seuil d'irréversibilité se manifeste par une forte augmentation du coefficient de diffusion : on doit ainsi observer une brisure nette sur la courbe.

### 5.2 Une bille

Afin de pouvoir obtenir un témoin des mouvements en l'absence d'interaction entre plusieurs billes, nous avons commencé par étudier les mouvements d'une seule bille. Quelle que soit l'amplitude, les billes reviennent à leur position initiale et  $D_{eff}$  est de l'ordre de  $10^{-8}$  (tableau 1).

$D_{eff} (10^{-8})$	$\langle \Delta x^2(N) \rangle (10^{-5})$
2.92	1.75
5.51	3.31
6.87	1.78

TABLE 1 – Coefficient de diffusion et déplacement carré moyen (une bille, ajustement linéaire).

### 5.3 Trois billes

Deux séries d'expériences ont été menées avec trois billes :

- dans la première, les billes étaient disposées collées les unes contre les autres ;
- dans la seconde, les billes étaient séparées d'environ 1 cm chacune.

Le premier effet qui a été mis en évidence est une dérive des billes dans une direction privilégiée (figure 6), à une vitesse constante. Cet effet, qui n'avait pas été prévu, nous a conduit à devoir traiter les données afin d'éliminer cet effet pour nous concentrer sur la diffusion.

Les tracés des coefficient de diffusion s'approchaient fortement de ceux présentés dans l'article de D. Pine [3], les valeurs de  $D_{eff}$  étant alors comprises entre  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$ . Le seuil d'irréversibilité apparaît autour d'une amplitude de  $22^\circ$  (figure 7).

## 5 EXPÉRIENCES : BILLES

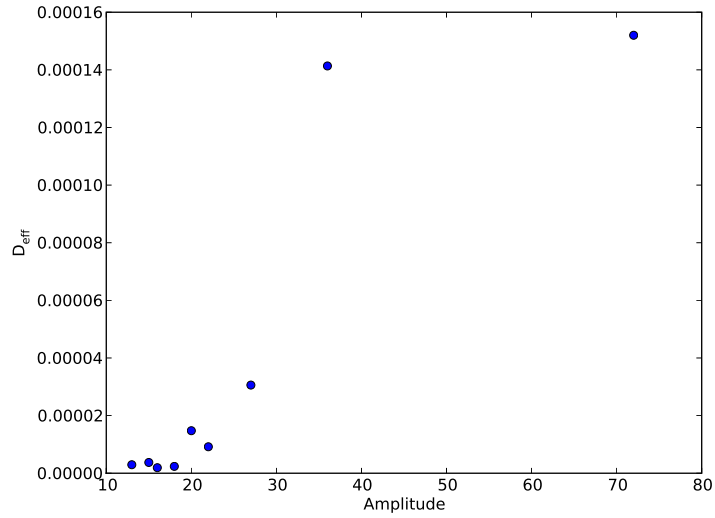


FIGURE 7 – Coefficient de diffusion d’une bille parmi les trois billes.

Finalement, sur certaines courbes, nous avons observé un mouvement oscillant, qui s’est superposé à la dérive et aux fluctuations (figure 8). Toutefois, nous avons été incapables de déterminer d’où provenait cette oscillation : nous avons pensé à un défaut dans la synchronisation entre le moteur et la prise d’images, mais ce problème n’apparaît que pour certaines expériences, alors que pour toutes la synchronisation a été faite de la même manière et, a fortiori, le phénomène est parfois totalement absent pour certaines billes.

Nous avons essayé d’observer qualitativement la période d’oscillation pour les différentes courbes, mais aucune ressemblance n’a été mise en évidence.

5 EXPÉRIENCES : BILLES

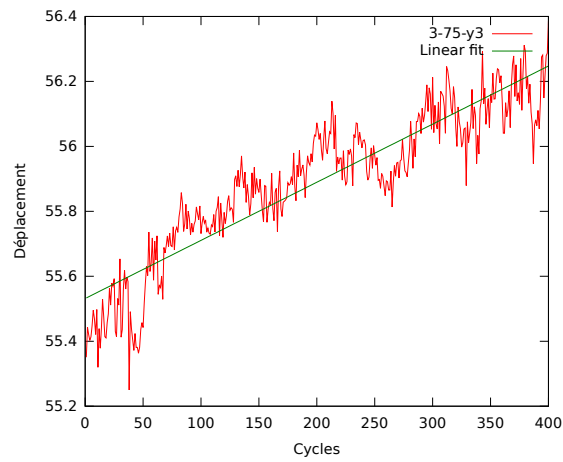


FIGURE 6 – Dérive apparente des billes (amplitude :  $13^\circ$ ).

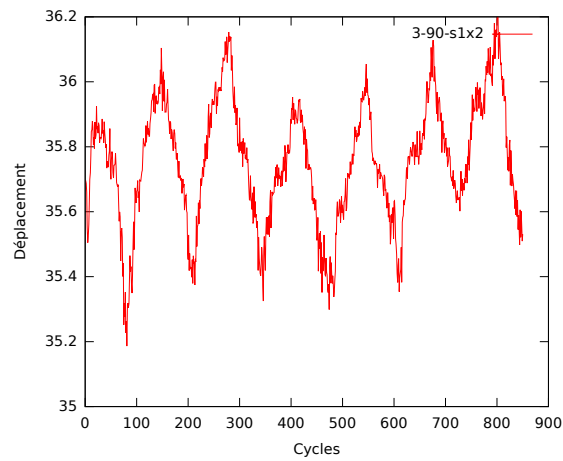


FIGURE 8 – Superposition d'un mouvement oscillatoire au déplacement d'une bille, où les billes étaient initialement séparées (amplitude :  $16^\circ$ ).

## 6 Traitement et discussions des résultats

Afin de s'affranchir des deux effets présentés précédemment, deux méthodes ont été utilisées. Celles-ci sont discutées dans les deux paragraphes qui suivent.

### 6.1 Ajustements

Des ajustements cubiques et linéaires ont été effectués, puis les courbes ont été traitées afin de soustraire les courbes ajustées. Grâce à ce procédé, il a été possible de ramener toutes les courbes centrées autour de 0. Lors des développements ultérieures, seul l'ajustement linéaire a été utilisé, car les données étaient très proches de celles avec l'ajustement cubique, et que le premier a l'avantage de s'interpréter comme étant relié directement à une dérive à vitesse constante.

Sur les courbes ne présentant pas de fortes oscillations, on peut voir des fluctuations qui augmentent lorsque l'amplitude augmente (figures 9a et 9b).

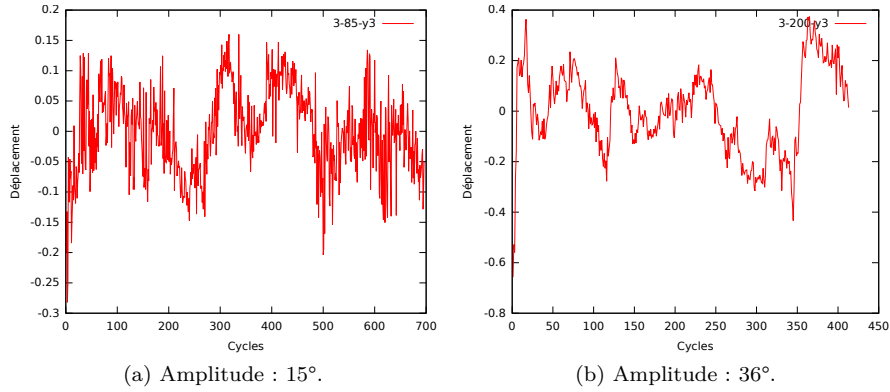


FIGURE 9 – Déplacement d'une bille (ajustement linéaire).

Que les billes soient séparées (figure 10, tableau 2) ou non (figure 11), nous obtenons des coefficients de diffusion du même ordre de grandeur. Les courbes présentent une nette discontinuité, correspondant à la transition vers l'irréversibilité, autour d'une amplitude de 22° (on remarque que ces courbes restent proches de celles obtenues sans procéder à l'ajustement).

$D_{eff}$	$\langle \Delta x^2(N) \rangle$
$1.23 \times 10^{-4}$	$2.46 \times 10^{-2}$
$8.00 \times 10^{-5}$	$3.20 \times 10^{-2}$
$3.61 \times 10^{-5}$	$1.81 \times 10^{-2}$
$7.05 \times 10^{-6}$	$4.58 \times 10^{-3}$
$5.04 \times 10^{-6}$	$4.29 \times 10^{-3}$
$3.27 \times 10^{-6}$	$2.45 \times 10^{-3}$
$1.72 \times 10^{-6}$	$1.72 \times 10^{-3}$
$2.65 \times 10^{-6}$	$2.12 \times 10^{-3}$
$1.03 \times 10^{-7}$	$2.05 \times 10^{-4}$

TABLE 2 – Coefficient de diffusion et déplacement carré moyen (trois billes).



6 TRAITEMENT ET DISCUSSIONS DES RÉSULTATS

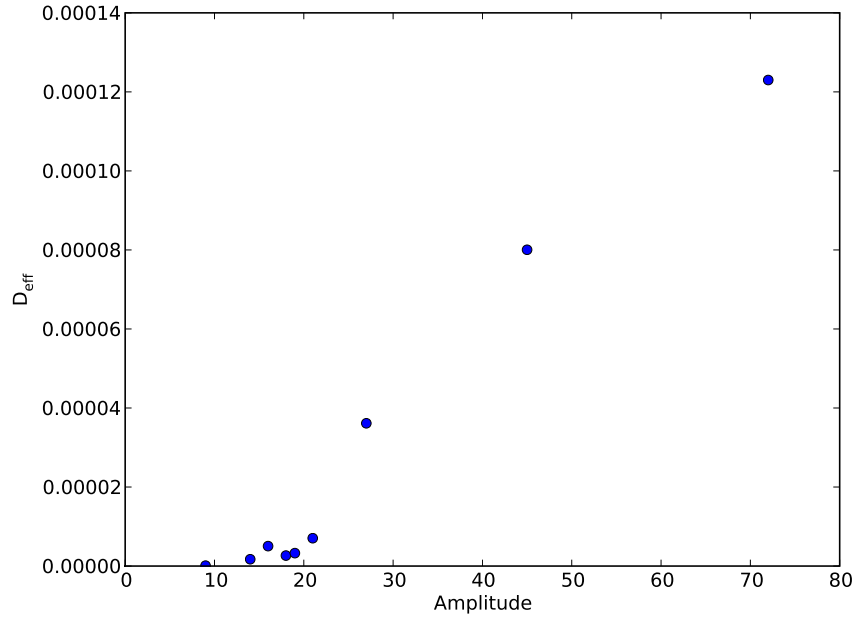


FIGURE 10 – Coefficient de diffusion calculé à partir de la position d’une bille, où les billes étaient initialement séparées (ajustement linéaire).

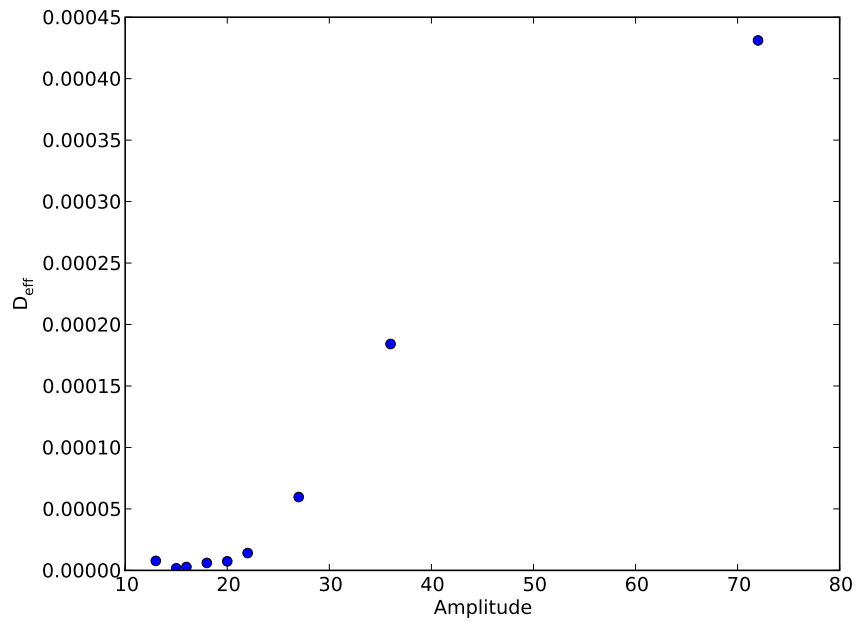


FIGURE 11 – Coefficient de diffusion calculé à partir de la position d’une bille, où les billes se touchaient initialement (ajustement linéaire).

Une échelle logarithmique permet de mettre en évidence que la courbe est alors approximativement une droite, ce qui correspond bien à ce que prédit la théorie (équation (16)).

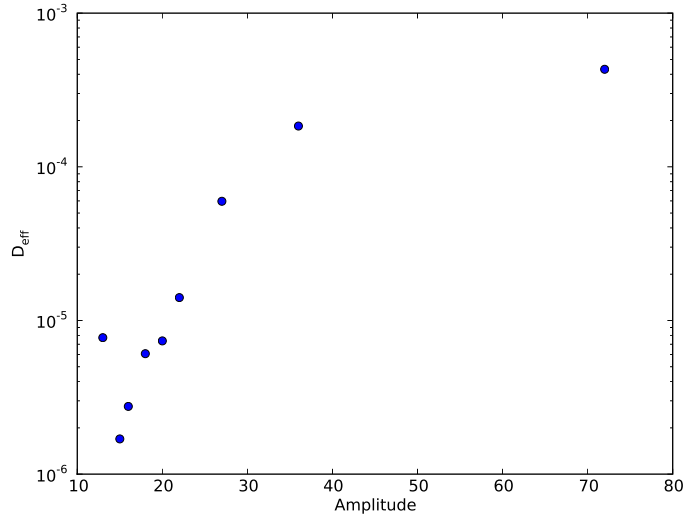


FIGURE 12 – Coefficient de diffusion calculé à partir du déplacement d’une bille (ajustement linéaire, échelle logarithmique).

Nous avons entrepris de tracer la valeur de la vitesse de dérive (qui correspond au coefficient directeur des ajustements linéaires) en fonction de l’amplitude (figure 14). Nous retrouvons le même seuil que précédemment, à environ  $22^\circ$  : en dessous de ce seuil, la vitesse de dérive est presque nulle, et elle augmente fortement ensuite.

## 6.2 Évolution de l’aire du triangle

Dans le cas d’un écoulement de Couette, l’aire du triangle formée par les trois billes devrait être approximativement conservée si les mouvements sont réversibles. Ainsi, l’analyse de la déformation moyenne de cette aire au cours du temps permet de déterminer un coefficient de diffusion, qui n’est pas affectée par la dérive.

Après avoir soustrait un ajustement linéaire, l’aire du triangle a été calculée et tracée. Lorsque les trois billes sont séparées, l’aire décroît, d’une manière approximativement linéaire (figure 15).

On observe nettement une brisure de pente (figure 16) autour d’une amplitude de  $22^\circ$  ; avant celle-ci, les coefficients de diffusion sont presque nuls, et ils augmentent rapidement après. Leur ordre de grandeur est beaucoup plus élevé ici :  $10^{-2}$  lorsque les billes ne sont pas initialement séparées, et  $10^{-1}$  lorsqu’elles le sont.

6 TRAITEMENT ET DISCUSSIONS DES RÉSULTATS

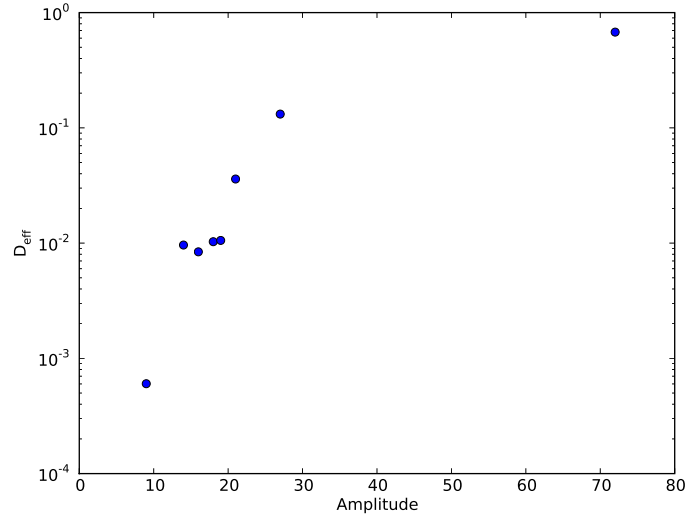


FIGURE 13 – Coefficient de diffusion calculé à partir de l’aire du triangle, où les billes étaient initialement séparées (ajustement linéaire, échelle logarithmique).

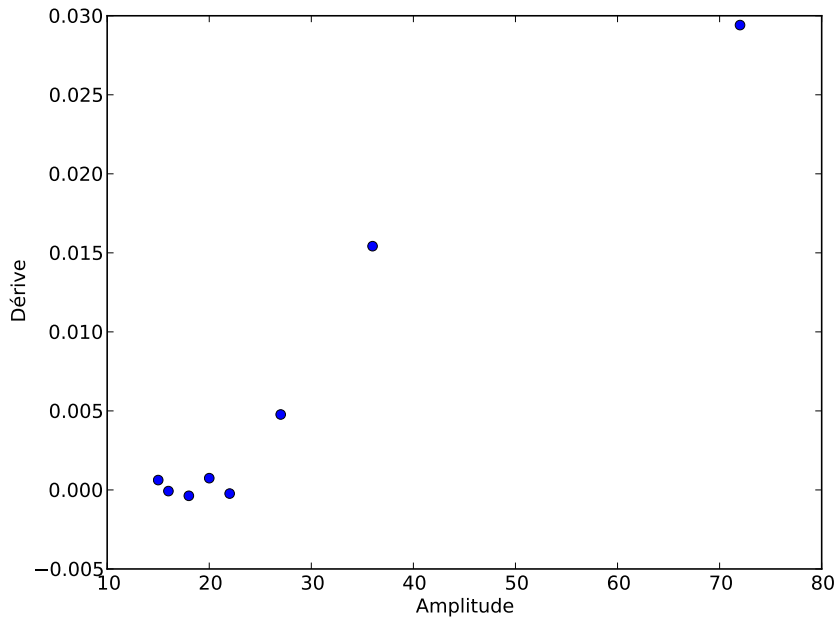


FIGURE 14 – Évolution de la vitesse de dérive, en fonction de l’amplitude, où les billes étaient initialement séparées.

6 TRAITEMENT ET DISCUSSIONS DES RÉSULTATS

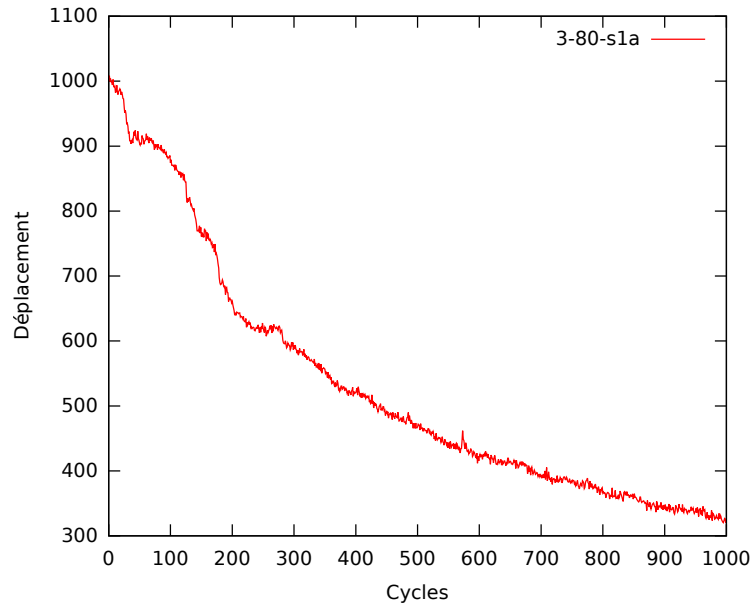


FIGURE 15 – Aire du triangle formée par les trois billes initialement séparées (amplitude :  $14^\circ$ , ajustement linéaire).

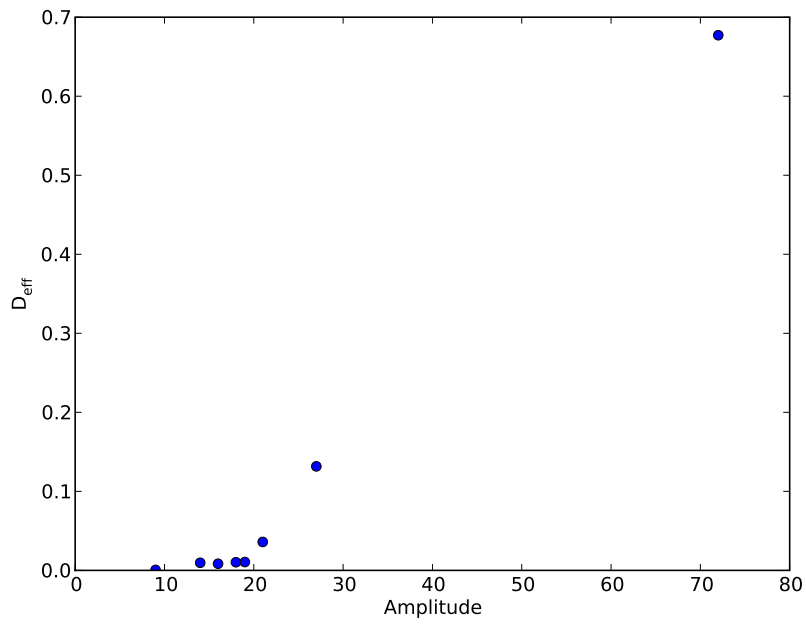


FIGURE 16 – Coefficient de diffusion calculé à partir de l'aire du triangle, où les billes étaient initialement séparées (ajustement linéaire).

## A Annexes

### A.1 Calcul des moyennes

La formule utilisée pour calculer les déplacements moyens au carré est

$$\langle \Delta x^2(N) \rangle = \frac{1}{N_{tot} - N} \sum_{i=1}^{N_{tot}-N} (x_i - x_{i+N})^2 \quad (20)$$

où  $N$  est le pas choisi et  $N_{tot}$  le nombre total de valeurs.

## Références

- [1] Laurent Corté, P. M. Chaikin, J. P. Gollub, and D. J. Pine. Random organization in periodically driven systems. *Nature Physics*, 4 :420–424, March 2008.  
<http://www.nature.com/nphys/journal/v4/n5/abs/nphys891.html>.
- [2] Étienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences, 2001.
- [3] D. J. Pine, J. P. Gollub, J. F. Brady, and A. M. Leshansky. Chaos and threshold for irreversibility in sheared suspensions. *Nature*, 438(7070) :997–1000, December 2005.  
<http://www.nature.com/nature/journal/v438/n7070/full/nature04380.html>.
- [4] G.I. Taylor. Low reynolds number flows. NCFMF.  
<http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>.
- [5] Emmanuel Villermaux and Jean Pierre Hulin. Chaos lagrangien et mélange de fluides visqueux. *European Journal of Physics*, 11 :179–183, may 1990.  
<http://www.iop.org/EJ/article/0143-0807/11/3/009/ejv11i3p179.pdf>.