Oscillateur fermionique

Harold Erbin

25 février 2011

Table des matières

1 Définitions **2**

2 Relations de commutation et d'anticommutation **2**

3 Énergie et opérateur nombre **3**

Ce texte est publié sous la licence libre

Licence Art Libre :

http://artlibre.org/licence/lal/

Version : 25 février 2011
Site : http://harold.e.free.fr/

1 Définitions

Dans la suite on essaie d'établir les différentes relations auxquelles répondent un oscillateur fermionique de fréquence ω.

Soient b et $b^\dagger$ les opérateurs d'annihilation et de création des quanta de cet oscillateur. Notons $|0\rangle$ l'état de vide.

L'état à une excitation est obtenue par application de l'opérateur de création sur le vide :

$$|1\rangle = b^\dagger |0\rangle \tag{1}$$

Toutefois, un deux fermions ne peuvent se trouver dans le même état (principe de Pauli), et une seconde application de $b^\dagger$ doit donner le vecteur nul :

$$b^\dagger |1\rangle = 0 \tag{2}$$

soit encore

$$(b^\dagger)^2 = 0 \tag{3}$$

puisque on a

$$(b^\dagger)^2 |0\rangle = b^\dagger |1\rangle = 0$$

et comme $|0\rangle \neq 0$.

De même, l'opérateur d'annihilation permet de diminuer le nombre de particules :

$$b |1\rangle = |0\rangle \tag{4a}$$

$$b |0\rangle = 0 \tag{4b}$$

$$b^2 = 0 \tag{4c}$$

car il est impossible d'avoir un nombre négatif d'excitations.

2 Relations de commutation et d'anticommutation

Le commutateur et l'anticommutateur de deux opérateurs A et B sont définis par

$$[A, B] = AB - BA \tag{5a}$$

$$\{A, B\} = AB + BA \tag{5b}$$

On trouve directement les anticommutateurs de $b^\dagger$ et b :

$$\left\{b^\dagger, b^\dagger\right\} = \{b, b\} = 0 \tag{6}$$

Afin de déterminer l'anticommutateur $\left\{b^\dagger, b\right\}$, on l'applique au vide :

$$\left\{b^\dagger, b\right\} |0\rangle = (b^\dagger b + b b^\dagger) |0\rangle = \underbrace{b^\dagger b |0\rangle}_{=0} + b b^\dagger |0\rangle = |0\rangle$$

d'où

$$\left\{b^\dagger, b\right\} = b^\dagger b + b b^\dagger = 1 \tag{7}$$

Pour l'oscillateur bosonique, on avait :

$$\left\{a^\dagger, a\right\} = 1 \tag{8}$$

3 Énergie et opérateur nombre

L'énergie d'un oscillateur bosonique est donnée par

$$H_b = \hbar\omega\left(N_b + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left\{a^\dagger, a\right\} \tag{9}$$

où on a défini l'opérateur nombre par

$$N_b = a^\dagger a \tag{10}$$

Il possède une structure symétrique, qui est le reflet de la nature bosonique du système.

Pour l'oscillateur fermionique, on peut imaginer remplacer l'anticommutateur par le commutateur afin d'obtenir une scruture antisymétrique :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left[b^\dagger, b\right] \tag{11}$$

Remarquons que si l'on avait malgré tout gardé une structure basée sur un anticommutateur, nous aurions trouvé un seul niveau d'énergie :

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left\{b^\dagger, b\right\} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

L'hamiltonien précédent est donc le choix le plus simple qui s'offre à nous.

En utilisant la relation d'anticommutation (7), on trouve :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left[b^\dagger, b\right] = \frac{\hbar\omega}{2}(b^\dagger b - bb^\dagger) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(b^\dagger b - (1 - b^\dagger b)\right)$$

soit finalement

$$H = \hbar\omega\left(b^\dagger b - \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(N - \frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

où on a défini l'opérateur nombre par

$$N = b^\dagger b \tag{13}$$

Notons que cet opérateur est hermitien :

$$N^\dagger = N \tag{14}$$

puisque

$$N^\dagger = (b^\dagger b)^\dagger = (b)^\dagger (b^\dagger)^\dagger = b^\dagger b = N$$

et donc les valeurs propres de N sont réelles.

Appliquons l'opérateur N aux deux seuls états $|0\rangle$ et $|1\rangle$:

$$N|0\rangle = b^\dagger b|0\rangle = b^\dagger 0 = 0$$
$$N|1\rangle = b^\dagger b|1\rangle = b^\dagger|0\rangle = |1\rangle$$

Les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ correspondent donc aux états propres associés aux valeurs propres 0 et 1, ce qui justifie l'appelation d'opérateur "nombre" pour N.

Une autre manière de le prouver est de remarquer que

$$N^2 = (b^\dagger b)^2 = b^\dagger b b^\dagger b = b^\dagger (1 - b^\dagger b) b = b^\dagger b - b^\dagger \underbrace{bb}_{=0} = N$$

soit

$$N(N-1) = 0 \tag{15}$$

donc les valeurs propres de sont 0 et 1.

Les états propres de l'énergie sont donc

$$E_0 = -\frac{\hbar\omega}{2} \qquad E_1 = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{16}$$

Les deux états ont la même norme :

$$\langle\, 0 |\, 0 \rangle = \langle\, 1 |\, 1 \rangle \tag{17}$$

En effet, on a :

$$\langle\, 0 |\, 0 \rangle = \langle 1 | b^\dagger b \,| 1 \rangle = \langle 1 | N \,| 1 \rangle = \langle\, 1 |\, 1 \rangle$$

Sous forme matricielle, on peut définir :

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18a}$$

$$b^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18b}$$