Angle de Cabibbo, matrice CKM et mécanisme GIM

Harold Erbin

13 mai 2011

Table des matières

Ce texte est publié sous la licence libre

Licence Art Libre :

http://artlibre.org/licence/lal/

Version : 13 mai 2011
Site : http://harold.e.free.fr/

1 Matrice de Cabibbo

Dans le cadre de l'universalité de l'interaction faible, on fait l'hypothèses que les doublets de quarks interagissent de la même manière que les doublets d'isospin faible de la même génération :

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ainsi, par courant chargé, l'électron ne peut interagir qu'avec le neutrino électronique, et de même le quark up n'interagira qu'avec le down [1].

Si cette hypothèse explique bien la désintégration du pion en antimuon

$$\pi^+(u\bar{d}) \longrightarrow \mu^+\nu_\mu \tag{2}$$

où un quark up interagit avec un quark down (figure 1), elle n'explique pas la désintégration du kaon en antimuon

$$K^+(u\bar{s}) \longrightarrow \mu^+\nu_\mu \tag{3}$$

qui est pourtant observé : cela signifie que le up peut interagir avec le strange.

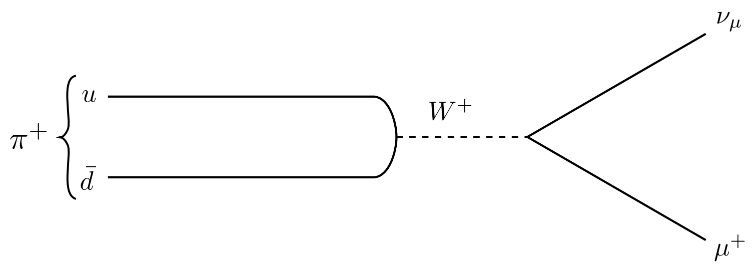

FIGURE 1 – Désintégration d'un pion en un antimuon et un neutrino muonique.

Plutôt que de remettre en cause l'universalité de l'interaction faible, Cabibbo a préféré postuler que les états propres de l'interaction faible n'étaient pas les quarks d et s, mais des combinaisons linéaires de ces derniers [2] :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = V_c \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{4}$$

où la matrice V_c décrit le mélange des quarks, et elle s'écrit

$$V_c = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \tag{5}$$

Cette matrice est unitaire

$$V_c V_c^\dagger = 1 \tag{6}$$

ce qui est nécessaire, si l'on veut que la probabilité soit conservée.

1. Un tel changement de saveur avec changement de charge ne peut se faire que par courant chargé, à cause de la conservation de la charge.
2. Il aurait été tout à fait similaire de considérer des combinaisons des quarks up et charm.

2 Constantes de couplage effectives

La présence de ce mélange implique l'existence de constantes de couplage effectives, données par

$$G_{ij}^{eff} = V_{ij} G_F \tag{7}$$

où G_F est la constante de Fermi. En effet, l'élément de matrice pour une interaction entre u et d est

$$\begin{aligned} \langle u| H |d\rangle &= \langle u| H |d' V_{ud} - s' V_{us}\rangle \\ &= V_{ud} \langle u| H |d'\rangle - V_{us} \underbrace{\langle u| H |s'\rangle}_{=0} \\ &= V_{ud} \langle u| H |d'\rangle \sim V_{ud} G_F = G_{ud}^{eff} \end{aligned}$$

Malgré tout, les interactions $u \leftrightarrow d$ restent plus probables que les interactions $u \leftrightarrow s$ (et inversement en remplaçant u par c). On peut donc en déduire que $V_{ud} > V_{us}$, et donc que $\theta_c < \pi/4$. Ainsi, les réactions pour lesquelles $V_{ij} = \sin\theta$ sont dites "supprimées de Cabibbo".

Afin de déduire plus précisément cet angle, on peut étudier le rapport des sections efficaces[3] pour les deux réactions (3) et (2) :

$$\frac{\Gamma(K^+)}{\Gamma(\pi^+)} \sim \frac{|\langle u| H |s\rangle|^2}{|\langle u| H |d\rangle|^2} \sim \frac{V_{us}^2 G_F^2}{V_{ud}^2 G_F^2} = \tan^2\theta_c \approx \frac{1}{20}$$

ce qui donne comme angle

$$\theta_c \approx 13° \tag{8}$$

3 Courants neutres

On aurait pu s'attendre à observer la réaction

$$K^0(\bar{d}s) \longrightarrow \mu^+\mu^- \tag{9}$$

par courant neutre grâce au mélange des quarks[4], mais celle-ci est impossible. Pour le voir, calculons les éléments de matrices $\langle d'| H |d'\rangle$ et $\langle s'| H |s'\rangle$ ($\langle s'| H |d'\rangle$ étant nuls car d' et s' ne sont pas couplés) :

$$\begin{aligned} \langle d'| H |d'\rangle + \langle s'| H |s'\rangle &= \langle d\cos\theta_c + s\sin\theta_c| H |d\cos\theta_c + s\sin\theta_c\rangle \\ &+ \langle d\cos\theta_c - s\sin\theta_c| H |d\cos\theta_c - s\sin\theta_c\rangle \\ &= \cos\theta_c^2 \langle d| H |d\rangle + \sin\theta_c\cos\theta c\langle d| H |s\rangle + \cos\theta_c\sin\theta c\langle s| H |d\rangle \\ &+ \sin\theta_c^2 \langle s| H |s\rangle + \cos\theta_c^2 \langle d| H |d\rangle - \sin\theta_c\cos\theta c\langle d| H |s\rangle \\ &- \cos\theta_c\sin\theta c\langle s| H |d\rangle + \sin\theta_c^2 \langle s| H |s\rangle \\ &= (\cos\theta_c^2 + \sin\theta_c^2)(\langle d| H |d\rangle + \langle s| H |s\rangle) \\ &= \langle d| H |d\rangle + \langle s| H |s\rangle \end{aligned}$$

On voit que les quarks down and strange ne sont pas couplés (absence de termes croisés du type $\langle s| H |d\rangle$), grâce à la présence des termes qui s'annulent. Il s'agissait d'ailleurs d'un argument fort en faveur de l'existence du charm, qui n'avait pas été encore découvert lorsque Cabibbo a proposé sa matrice.

3. En théorie, il faudrait tenir compte de corrections de la QCD.
4. Un changement de saveur sans changement de charge ne peut se faire que par courant neutre, à cause de la conservation de la charge.

4 Règles de sélection

Comme les changements d'étrangeté se font par émission de bosons $W^{\pm}$, ils s'accompagnent forcément d'un changement de charge dans le même sens :

$$\Delta S = \Delta Q = \pm 1 \tag{10}$$

Par exemple on peut considérer les réactions $s \to u$ (par émission de W^-) où on a $S = -1 \to 0$ et $Q = -1/3 \to 2/3$.

5 Oscillations des mésons K neutres

Sans ce mélange des quarks, l'oscillation des mésons K neutres serait impossible. En effet, la possibilité pour les quarks d et s de se transformer en c ou en u, qui eux-mêmes peuvent redevenir d ou s permettent l'oscillation K^0–$\bar{K}^0$ grâce au changement de saveurs des quarks (figure 2). Sans ce couplage, la seul chaine possible de changements aurait été $d \to u \to d$ (et de même on aurait eu $\bar{s} \to \bar{c} \to \bar{s}$).

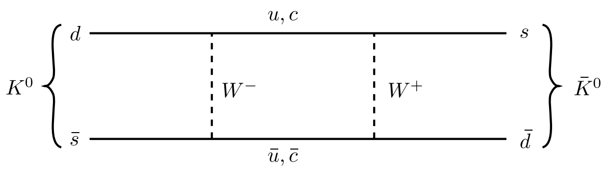

FIGURE 2 – Oscillations des mésons K neutres.

6 Extension aux trois générations

Lorsque l'on calcule avec précision les coefficients de la matrice de Cabibbo (5), on remarque qu'elle n'est pas tout à fait unitaire. Cela suggère donc une troisième famille de quarks (bien que cette dernière n'ait pas été détectée ainsi, les mesures de l'époque étant trop peu précises).

Lorsque l'on inclue la dernière génération de quark, on obtient une matrice à trois dimensions, appelée matrice CKM :

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Puisque la matrice V_c fonctionnait bien, on peut approximer la matrice V_{CKM} par

$$V_{CKM} \approx \begin{pmatrix} V_c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

On peut ainsi prédire que le quark top va majoritairement se désintégrer en bottom :

$$t \longrightarrow b + W^+ \tag{13}$$