Aire d'une fractale

Harold Erbin

29 mai 2009

Résumé

L'objectif de ce document est de déterminer l'aire d'une fractale formée à partir de la répétition d'un triangle équilatéral.

Table des matières

1 Aire du triangle initial

Soit un triangle équilatéral ABC de côté $a \in \mathbb{R}$ et notons $\mathcal{A}$ l'aire de ce triangle. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} \\
&= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\
&= \frac{1}{2}a^2 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2
\end{aligned}$$

car $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = a$. Ainsi, l'aire[1] est donc

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2} \tag{1}$$

2 Formule de récurrence

Notons $\mathcal{A}$ l'aire de la fractale et S_n l'aire de la figure après n reproduction du motif.

Ainsi, d'après (1), nous avons immédiatement

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2$$

Calculons maintenant l'aire après une première reproduction du motif. Il apparait clairement qu'il faut rajouter l'aire des trois "nouveaux" triangles, de côté $a/3$, à l'aire du précédent, ce qui donne

$$S_1 = S_0 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2$$

De même, l'aire après une deuxième reproduction (douze triangles, de côté $a/9$, supplémentaires) sera

$$S_2 = S_1 + \frac{12\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^2}\right)^2$$

L'on remarque que

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_0 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 4^0 \times \left(\frac{a}{3^1}\right)^2 \\
S_2 &= S_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 4^1 \times \left(\frac{a}{3^2}\right)^2
\end{aligned}$$

1. Il était aussi possible de calculer l'aire avec $\mathcal{A} = (a \times h)/2$, où $h = a \times \sin(\pi/3)$ est la hauteur du triangle.

et l'on pourrait continuer ainsi.

Il parait donc naturel d'utiliser une récurrence pour déterminer la nè aire, puisqu'à chaque reproduction, il y a 3×4^n "nouveaux" triangles dont la valeur du côté est celle du précédent divisée par 3. L'on posera donc

$$\boxed{\begin{cases} S_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\, a^2 \\ S_n = S_{n+1} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \times 4^{n-1} \left(\dfrac{a}{3^n}\right)^2 \end{cases}} \tag{2}$$

L'on remarque que S_0 ne peut se mettre sous la même forme que l'expression générale. Pour cette raison il est nécessaire de distinguer le distinguer du cas général.

3 Définition de l'aire

Finalement, pour déterminer l'aire de la fractale, il faut additionner les aires de tous les triangles, lorsque n tend vers l'infini. C'est à dire

$$\boxed{\mathcal{A} = S_0 + \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n}}} \tag{3}$$

On notera

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n}} \tag{4}$$

et ne nous attacherons plus qu'à l'étude de ce terme : S_0 étant une constante, il s'agit d'un nombre forcément fini qu'il suffira d'ajouter à l'autre terme une fois qu'il aura été déterminé, et de même, le terme constant devant la somme n'indique rien sur le comportement de l'aire quand n tend vers l'infini.

L'on reconnait donc une série de terme général

$$u_n = \frac{4^{n-1}}{3^{2n}} \tag{5}$$

Chercher à calculer l'aire $\mathcal{A}$ n'a de sens que si elle est finie, c'est à dire que le terme S ne tend pas vers l'infini quand n tend vers l'infini, ce que nous allons vérifier.

Formons le rapport de d'ALEMBERT

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{4^n}{3^{2(n+1)}} \times \frac{4^{n-1}}{3^{2n}} \\ &= \boxed{\frac{4}{9} < 1} \end{aligned}$$

ce qui implique la **convergence** de la série.

4 Calcul de la série

L'idée est de manipuler la série pour faire apparaitre une série géométrique [2], à savoir

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n}} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-4/9} - 1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{9}{5} - 1\right) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

d'où [3]

$$\boxed{S = \frac{1}{5}} \tag{6}$$

5 Conclusion

Nous pouvons remplacer S par sa valeur (6) dans (3), et nous obtenons donc la valeur de l'aire

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{1}{5} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2 \left(1 + \frac{3}{5}\right)
\end{aligned}$$

d'où, finalement [4]

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, a^2 = \frac{8}{5}\, S_0} \tag{7}$$

en utilisant la définition de S_0 (1).

Remarque : on a la valeur approchée $\mathcal{A} \approx 0.693\, a^2$.

2. Rappel : $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a\left(\frac{1}{1-q} - 1\right)$
3. Un calcul effectué par Wolfram confirme cette valeur.
4. Il est aussi possible de comparer, par exemple, l'aire obtenue avec celle du cercle circonscrit ($\mathcal{A}_c = \pi/3\ a^2 \approx 1.04\ a^2$) puisque, graphiquement, l'on remarque que la fractale est toujours contenue dans ce cercle. On a bien $\mathcal{A} < \mathcal{A}_c$.