

Théorie des champs classiques

Harold Erbin

Notes de cours de Magistère M1, donné par M. Nitti.

Ce texte est publié sous la licence libre

Licence Art Libre :

<http://artlibre.org/licence/lal/>

Version : 12 février 2011

Site : <http://harold.e.free.fr/>

Table des matières

Table des matières	2
1 Introduction	4
1.1 Recherche d'une équation d'onde relativiste : l'équation de Klein–Gordon	4
2 Relativité restreinte	6
2.1 Transformations de Lorentz	6
2.2 Tenseurs	8
3 Formalisme lagrangien	10
3.1 Rappels de mécanique du point	10
3.2 Formulation lagrangienne des champs	10
3.3 Analyse dimensionnelle	13
3.4 Dérivée fonctionnelle	13
3.5 Conditions aux bord	15
3.6 Description hamiltonienne des champs	16
4 Champ scalaire réel	17
4.1 Solution de l'équation de Klein–Gordon	17
4.1.1 Solution générale	17
4.1.2 Calcul de l'énergie	19
4.2 Quantification canonique	20
5 Champ scalaire en interaction	24
5.1 Champ scalaire avec source	24
5.1.1 Fonctions de Green — Cas général	24
5.1.2 Fonctions de Green avancée et retardée	25
5.1.3 Autres fonctions de Green	27
5.1.4 Énergie et couplage	29
5.1.5 Potentiels retardés	31
5.2 Auto-interactions	31
6 Symétries et lois de conservations	36
6.1 Généralités	36
6.2 Théorème de Noether et courants conservés	37
6.2.1 Énoncé et démonstration	37
6.2.2 Autres démonstrations	39
6.3 Applications du théorème de Noether	40
6.3.1 Symétrie $U(1)$	40
6.3.2 Tenseur énergie–impulsion	42
6.3.3 Transformations de Lorentz	43
7 Invariance de jauge et champs vectoriels	46
7.1 Transformation de jauge locale	46
7.2 Équations pour le champ vectoriel	47
7.3 Degrés de liberté du champ vectoriel	49
7.3.1 Transformations de jauge	49
7.3.2 Formalisme hamiltonien	52

7.4	Champ vectoriel massif	54
7.5	Spin du champ vectoriel	55
7.6	Fonction de Green pour le champ vectoriel	56
8	Brisures de symétries	58
8.1	Brisure explicite de symétrie	58
8.2	Brisure globale de symétrie, théorème de Goldstone	58
8.3	Brisure locale de symétrie, mécanisme de Higgs	61
9	Théories de jauge non abéliennes	64
9.1	Symétrie $U(2)$	64
9.2	Symétrie $SU(2)$	65
9.3	Symétrie $SU(2)$ locale	67
9.4	Généralisations	71
10	Brisures de symétries non abéliennes	73
11	Champs de spin 2	75
11.1	Procédure de Noether	75
11.2	Translation locale et champ tensoriel	76
A	Théorie des champs conformes	80
	Index	84
	Table des figures	86

1 Introduction

1.1 Recherche d'une équation d'onde relativiste : l'équation de Klein–Gordon

La relation de dispersion d'une particule non relativiste est

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1.1)$$

ce qui conduit à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t, \mathbf{x}) \quad (1.2a)$$

$$i\hbar\partial_t\psi^*(t, \mathbf{x}) = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*(t, \mathbf{x}) \quad (1.2b)$$

en utilisant les relations de correspondances

$$E \rightarrow i\hbar\partial_t \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad (1.3)$$

La densité de probabilité d'une particule en un point de l'espace est donnée par

$$\rho(t, \mathbf{x}) = |\psi(t, \mathbf{x})|^2 \quad (1.4)$$

Cherchons l'équation de conservation associée à cette quantité :

$$\begin{aligned} \partial_t |\psi|^2 &= \psi\partial_t\psi^* + \psi^*\partial_t\psi \\ &= \psi\left(\frac{\hbar}{2im}\nabla^2\psi^*\right) + \psi^*\left(-\frac{\hbar}{2im}\nabla^2\psi\right) \\ &= \frac{\hbar}{2im}(\psi\nabla^2\psi^* - \psi^*\nabla^2\psi) \\ &= \frac{\hbar}{2im}\nabla(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\partial_t\rho + \nabla\mathbf{J} = 0 \quad (1.5)$$

en définissant

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad (1.6)$$

Cette équation signifie que la "charge" associée à la densité ρ , définie par

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (1.7)$$

est conservée (ici il s'agit de la probabilité de présence dans l'espace entier, qui vaut 1). En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t\rho(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} -\nabla\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = -\oint_{\partial\mathbb{R}^3} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \end{aligned}$$

Essayons de procéder de même dans le cas relativiste avec la relation de dispersion

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4 \quad (1.8)$$

On obtient l'équation de Klein–Gordon

$$(-\hbar^2 \partial_t^2 + c^2 \hbar^2 \nabla^2 - c^4 m^2) \psi(t, \mathbf{x}) = 0$$

qui se récrit

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (1.9a)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi^* = 0 \quad (1.9b)$$

Toutefois cette expression conduit à deux problèmes qui conduisent à la rejeter.

La relation de dispersion (1.8) donne

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad (1.10)$$

or la solution négative ne peut être physique car elle correspond à une diminution de l'énergie du système qui peut être arbitrairement grande (puisque \mathbf{p} n'est pas borné) : il serait impossible d'atteindre le niveau fondamental.

En multipliant les équations (1.9) respectivement par ψ^* et ψ puis en les soustrayant, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} (\psi^* \partial_t^2 \psi - \psi \partial_t^2 \psi^*) &= \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* \\ \frac{1}{c^2} \partial_t (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) &= \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_t \rho + \nabla \mathbf{J} = 0 \quad (1.11)$$

avec ¹

$$\rho = \frac{i}{c^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) \quad (1.12a)$$

$$\mathbf{J} = i (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (1.12b)$$

Pour une valeur négative de l'énergie, $\rho < 0$ et il est donc impossible d'interpréter cette grandeur comme une densité de probabilité.

Le champ ψ ne peut donc pas être interpréter comme une fonction d'onde, mais il peut être assimiler à un champ classique, qui est une observable. Il ne peut correspondre à une particule chargée ou de spin non nul car l'équation de Klein–Gordon ne fait intervenir aucune de ces deux grandeurs.

1. le facteur i est conventionnel

2 Relativité restreinte

2.1 Transformations de Lorentz

Postulat : Les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels.

Ce postulat a pour conséquence que la vitesse de la lumière c est une vitesse universelle. On posera $c = 1$ dans la suite.

On considère un espace à quatre dimension $x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x})$ notées aussi (x^0, x^1, x^2, x^3) . Un prime dénotera les coordonnées et autres grandeurs dans un autre référentiel.

Les transformations de Galilée sont définies par

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (2.1)$$

Elles ne sont valables que pour des vitesses $|\mathbf{v}| \ll c$.

Considérons deux points A et B . On émet un signal lumineux du point A au temps t qui arrive en B au temps t' . On doit alors avoir

$$|c(t - t')| = |x - x'|$$

ou encore

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0 \quad (2.2)$$

Cette quantité invariante est appelée intervalle d'espace-temps.

Plus généralement, on notera cette grandeur

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = \eta dx \quad (2.3)$$

en définissant le tenseur métrique η par

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

En adoptant la convention de sommation sur les indices répétés, on note encore

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5)$$

Cherchons maintenant la loi de transformation des coordonnées

$$x \rightarrow x'^\mu = f^\mu(x^\nu) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.6)$$

On a

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\rho\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma \\ &= \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \quad (2.7)$$

On a

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \sum_{\rho,\sigma} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu \\ &= \sum_\rho (\Lambda^t)_\mu{}^\rho (\eta\Lambda)_{\rho\nu} = (\Lambda^t \eta \Lambda)_{\mu\nu}\end{aligned}$$

ce qui donne la relation fondamentale

$$\eta = \Lambda^t \eta \Lambda \quad (2.8)$$

qui définit les transformations dites de Lorentz.

Exemple 2.1.

Les rotations $R \in SO(3)$ définies par $R^t R = 1$ permettent de définir la transformation

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec

$$\Lambda^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R^t & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Cette transformation vérifie bien la propriété (2.8) :

$$\begin{aligned}\Lambda^t \eta \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R^t & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -R^t R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Une rotation d'angle θ autour de l'axe z est définie par

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.2.

Transformation selon z :

$$(t' \ x' \ y' \ z') = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix} (t \ x \ y \ z)$$

La relation (2.8) donne la condition

$$\text{ch}^2 \beta - \text{sh}^2 \beta = 1 \quad (2.9)$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} a = d = \text{ch } \beta \\ b = c = \text{sh } \beta \end{cases} \quad (2.10)$$

On a les relations

$$\begin{aligned} \text{th } \beta &= v \\ \text{ch } \beta &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ \text{sh } \beta &= \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}$$

Les transformations de Lorentz forment un groupe à six paramètres continus :

- \mathbf{v} , associés aux translations ;
- $\boldsymbol{\theta}$, associés aux rotations.

2.2 Tenseurs

Il existe deux types d'indices :

- contravariant : $V^\mu = (V^0, \mathbf{V})$;
- covariant : $V_\mu = (V^0, -\mathbf{V})$,

qui se transforment respectivement comme

$$V \rightarrow \Lambda V \quad (2.11a)$$

$$V \rightarrow (\Lambda^t)^{-1} V \quad (2.11b)$$

Soient a et b deux 4-vecteurs. On définit leur produit scalaire paramètres

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu \quad (2.12)$$

Le produit scalaire est invariant. En effet :

$$\begin{aligned} a'_\mu b'^\mu &= (\Lambda^t)^{-1}{}^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma a_\rho b^\sigma \\ &= (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma a_\rho b^\sigma \\ &= \delta^\rho{}_\sigma a_\rho b^\sigma \\ &= a_\mu b^\mu \end{aligned}$$

L'inverse $(\Lambda^t \eta \Lambda)^{-1} = \eta^{-1}$ de la relation (2.8) donne

$$\Lambda^{-1} \eta^{-1} (\Lambda^t)^{-1} = \eta^{-1} \quad (2.13)$$

On a aussi

$$\eta = \eta^{-1} \quad (2.14)$$

Soit $a \rightarrow \Lambda a$, alors on a $\eta a \rightarrow \Lambda^t \eta a$ d'où

$$\begin{aligned} \eta \Lambda a &= (\Lambda^t)^{-1} \eta \Lambda^{-1} \Lambda a \\ &= (\Lambda^t)^{-1} \eta a \end{aligned}$$

et ainsi $\eta_{\mu\nu} a^\nu = a_\mu$ et donc $a^\nu = (\eta^{-1})^{\mu\nu} a_\nu$.

On a la relation

$$\eta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \quad (2.15)$$

Exemple 2.3.

Voici quelques vecteurs contra- et covariants :

– $P^\mu = (E, \mathbf{p})$.

– $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$. Le d'alembertien est défini par

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2 \quad (2.16)$$

Un tenseur k fois contravariant et p fois covariant du groupe de Lorentz est un objet qui se transforme comme

$$T \rightarrow \underbrace{(\Lambda \cdots \Lambda)}_{k \text{ fois}} \underbrace{((\Lambda^t)^{-1} \cdots (\Lambda^t)^{-1})}_{p \text{ fois}} T \quad (2.17)$$

On dira qu'il est d'ordre (k, p) et il sera noté $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_p}$.

On a la relation

$$\Lambda_\rho^\sigma = \eta_{\rho\mu} \eta^{\sigma\nu} \Lambda^\mu_\nu = (\eta \Lambda \eta)_\rho^\sigma$$

Exemple 2.4.

– scalaire : ordre 0.

– vecteur : ordre 1.

Un tenseur d'ordre 2 $T'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ est dit :

– symétrique si $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$;

– antisymétrique si $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$.

Sa trace est donnée par

$$\text{tr } T = T_\mu^\mu \quad (2.18)$$

Un tenseur d'ordre 3 est dit complètement symétrique si

$$T_{\mu\nu\rho} = T_{\rho\mu\nu} = T_{\nu\rho\mu} = \cdots$$

Un tenseur sera complètement antisymétrique s'il prend un signe moins à chaque permutation impaire.

Un champ tensoriel $\Phi_{\mu_1 \cdots \mu_m}^{\nu_1 \cdots \nu_n}(x)$ se transforme linéairement sous une ou plusieurs matrices Λ sous la transformation $x' = \Lambda x$:

$$\Phi_{\mu_1 \cdots \mu_m}^{\nu_1 \cdots \nu_n}(x') = \Lambda_{\mu_1}^{\rho_1} \cdots \Lambda_{\mu_m}^{\rho_m} \Lambda^{\nu_1}_{\sigma_1} \cdots \Lambda^{\nu_n}_{\sigma_n} \Phi_{\rho_1 \cdots \rho_m}^{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(x) \quad (2.19)$$

Un champ scalaire $\phi(x)$ se transforme comme

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (2.20)$$

Un champ vectoriel $A_\mu(x)$ se transforme comme

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(x) \quad (2.21)$$

3 Formalisme lagrangien

3.1 Rappels de mécanique du point

Un système de coordonnées généralisées q est décrit par l'action

$$S[q] = \int dt L(q, \dot{q}) \quad (3.1)$$

où L est le lagrangien, généralement donné par

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \quad (3.2)$$

Cherchons la variation de l'action sous une transformation infinitésimale des coordonnées

$$\begin{cases} q \rightarrow q + \delta q \\ \dot{q} \rightarrow \dot{q} + \delta \dot{q} = \dot{q} + \partial_t(\delta q) \end{cases} \quad (3.3)$$

en supposant que la variation s'annule aux bords du domaine.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S[q + \delta q] &= \int dt L(q + \delta q, \dot{q} + \partial_t(\delta q)) \\ &\approx S[q] + \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \partial_t(\delta q) \right) \\ &= S[q] + \int dt \delta q \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \end{aligned}$$

en intégrant par partie puisque le terme intégré est nul. La variation de l'action vaut donc

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int dt \delta q \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \quad (3.4)$$

et on doit avoir $\delta S = 0$ pour tout δq , ce qui nous donne les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (3.5)$$

On définit le moment conjugué p d'une coordonnée q par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (3.6)$$

Le hamiltonien du système est alors donné par

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (3.7)$$

en considérant \dot{q} comme une fonction de q et p .

3.2 Formulation lagrangienne des champs

Soit un champ $\phi = \phi(x)$. Il est décrit par l'action

$$S[\phi] = \int dt L(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (3.8)$$

Si on considère seulement les théories locales, alors le lagrangien L s'écrit comme l'intégrale d'une densité de lagrangien \mathcal{L} :

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \quad (3.9)$$

On écrira alors l'action sous la forme

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \quad (3.10)$$

De cette manière S est un invariant de Lorentz à condition que \mathcal{L} soit aussi un invariant : seuls les termes du type ϕ^2 , $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, etc., peuvent apparaître.

Par abus de langage, on dit souvent que \mathcal{L} est le lagrangien du système.

Considérons un intervalle $\mathcal{D} = [t_0, t_1] \times \mathcal{S}$ où \mathcal{S} est un domaine spatial. On notera $\partial\mathcal{S}$ le bord de \mathcal{S} .

Considérons une variation de ϕ :

$$\begin{cases} \phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x) \\ \partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi + \partial_\mu(\delta\phi) \end{cases} \quad (3.11)$$

avec $\delta\phi = 0$ sur les bords.

L'action sera alors

$$\begin{aligned} S[\phi + \delta\phi] &= \int d^4x \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \partial_\mu(\delta\phi)) \\ &\approx S[\phi] + \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right) \\ &= S[\phi] + \int d^4x \delta\phi \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) + \underbrace{\oint_{\partial\mathcal{D}} d^3\Sigma \delta\phi n_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}}_{=0} \end{aligned}$$

car

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} d^3\Sigma \delta\phi n_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \int_{\mathcal{S}} d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \oint_{\partial\mathcal{S}} d^2x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0$$

La variation de l'action

$$\delta S = \int d^4x \delta\phi \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (3.12)$$

conduit donc aux équations d'Euler–Lagrange pour les champs :

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad (3.13)$$

Exemple 3.1 (Champ scalaire libre).

Considérons un champ scalaire ϕ dont le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi \quad (3.14)$$

Les équations d'Euler–Lagrange (3.13) donnent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} (\delta^\rho_\mu \partial_\sigma \phi + \delta^\sigma_\mu \partial_\rho \phi) \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma \phi + \eta^{\rho\mu} \partial_\rho \phi) = \partial^\mu \phi\end{aligned}$$

d'où

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad (3.15)$$

car

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Exemple 3.2 (Lagrangien de Klein–Gordon).

Reprenons le lagrangien de l'exemple précédent et ajoutons un terme de masse :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (3.16)$$

avec $m^2 > 0$.

De manière évidente, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad (3.17)$$

On obtient l'équation de Klein–Gordon :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (3.18)$$

On peut écrire le lagrangien comme

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} (\dot{\phi})^2}_{=\mathcal{T}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right)}_{=\mathcal{V}} \quad (3.19)$$

et la densité d'énergie est alors

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V} \quad (3.20)$$

On peut écrire l'action d'une manière différente :

$$\begin{aligned}S &= \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \phi (\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi\end{aligned}$$

où l'on a intégré par partie pour passer à la deuxième ligne.

Exemple 3.3 (Lagrangien avec auto-interaction).

Ajoutons cette fois-ci un terme à la puissance 4 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (3.21)$$

avec $m^2 > 0, \lambda > 0$.

Même si l'on choisissait de mettre un signe plus devant le terme de masse, l'énergie resterait bornée inférieurement grâce au terme en ϕ^4 .

Théorème d'Ostrogradski : Si \mathcal{L} dépend de dérivées de ϕ d'ordre supérieur à 1, alors H n'est pas borné inférieurement.

3.3 Analyse dimensionnelle

Dans le système d'unités naturelles où

$$c = \hbar = 1 \quad (3.22)$$

toutes les grandeurs sont des puissances de la longueur ou de la masse, avec

$$L = M^{-1} \quad (3.23)$$

L'action a comme dimension $[S] = 1$ et comme $[d^4x] = L^4 = M^{-4}$, on doit avoir $[L] = L^{-4} = M^4$, ce qui permet de déterminer la dimension du champ :

$$[\partial^2 \phi^2] = [\partial^2][\phi^2] = M^2[\phi^2] = M^4$$

d'où

$$[\phi] = M \quad (3.24)$$

ce qui impose la dimension des paramètres :

$$[m] = M \quad [\lambda] = 1 \quad (3.25)$$

Lorsque l'on parlera, sans plus de précisions, de la dimension $n \in \mathbb{Z}$ d'un paramètre, cela signifiera que sa dimension est M^n .

Un lagrangien ne peut pas contenir de monômes de degré supérieur à 4 (c'est à dire des paramètres de dimension négative) pour des raisons quantiques (il y aurait trop d'autointeractions et l'énergie serait trop grande). Il s'agit du critère de renormalisation.

3.4 Dérivée fonctionnelle

Soit $\mathcal{F}[\phi] = \int d^4x f(x)\phi(x)$ une fonctionnelle. Sa dérivée fonctionnelle est donnée par

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi(y)} = f(y) \quad (3.26)$$

Plus généralement, soit $\mathcal{F}[\phi] = \int d^4x F(\phi(x))$ une fonctionnelle. On définit la dérivée fonctionnelle par

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi(y)} = \left. \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi} \right|_{x=y} \quad (3.27)$$

Exemple 3.4.

Soit $\mathcal{F}[\phi] = \int d^4x \phi(x)^n$, alors

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi(x)} = n\phi(x)^{n-1} \quad (3.28)$$

Formellement, on peut écrire

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi(y)} = f(y) = \int d^4x f(x) \delta^{(4)}(x-y) \quad (3.29)$$

et alors

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta^{(4)}(x-y) \quad (3.30)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int d^4x F(\phi(x)) &= \int d^4x \frac{\delta}{\delta \phi(y)} F(\phi(x)) \\ &= \int d^4x \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi} \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} \\ &= \int d^4x \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi} \delta^{(4)}(x-y) \\ &= \left. \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi} \right|_{x=y} \end{aligned}$$

De même que l'on écrit la différentielle d'une fonction f comme

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (3.31)$$

on peut écrire la variation d'une fonctionnelle comme

$$\delta \mathcal{F} = \int d^4x \frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \quad (3.32)$$

et ainsi

$$\delta \mathcal{F} = 0 \implies \frac{\delta F}{\delta \phi(x)} = 0 \quad (3.33)$$

Exemple 3.5.

Appliquons ce formalisme au lagrangien de Klein–Gordon (3.16) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \phi(y)} &= \int d^4x \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \delta^{(4)}(x-y) \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \partial^\mu \delta^{(4)}(x-y) - m^2 2\phi \delta^{(4)}(x-y) \right) \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} \delta^{(4)}(x-y) \left(-\partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi - 2m^2 \phi \right) \\ &= -\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0 \end{aligned}$$

où l'on a intégré par partie pour passer à la deuxième ligne.

3.5 Conditions aux bord

Plaçons nous en deux dimensions pour la suite, le cas à quatre dimensions se déduisant facilement. Avec $\delta\phi(t_0) = \delta\phi(t_1) = 0$, la variation de l'action

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^L dx \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi') \quad (3.34)$$

où l'on a noté $\partial_x \phi = \phi'$, donne :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^L dx \delta\phi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \right) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} dt \delta\phi(t, L) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}(t, L) - \int_{t_0}^{t_1} dt \delta\phi(t, 0) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}(t, 0) \end{aligned} \quad (3.35)$$

On obtient ainsi les équations d'Euler-Lagrange et les conditions aux bords (conditions de von Neumann) :

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.36a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}(t, L) = 0 \quad (3.36b)$$

Si le champ ne prend pas une valeur nulle sur la surface, alors on obtient l'action

$$S' = S + \mu_0 \int_{t_0}^{t_1} dt f(\phi; t, 0) - \mu_1 \int_{t_0}^{t_1} dt f(\phi; t, L) \quad (3.37)$$

où f est une fonction arbitraire du champ au bord. Considérons la variation du premier terme :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \mu_0 f(\phi; t, 0) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \mu_0 f(\phi + \delta\phi; t, 0) - \int_{t_0}^{t_1} dt \mu_0 f(\phi; t, 0) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \mu_0 \frac{\partial f}{\partial \phi}(t, 0) \delta\phi(t, 0) \end{aligned}$$

qui sera regroupé avec l'autre terme en $\delta\phi(t, 0)$ (dernier terme de (3.35)). Le terme en μ_1 donnera de même une contribution au terme en $\delta\phi(t, L)$. Les conditions aux bords deviennent donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}(t, 0) = \mu_0 \frac{\partial f}{\partial \phi}(t, 0) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}(t, L) = \mu_1 \frac{\partial f}{\partial \phi}(t, L) \quad (3.38)$$

car la variation doit être nulle quels que soient $\delta\phi(t, x)$, $\delta\phi(t, 0)$, $\delta\phi(t, L)$.

La contribution du terme de bord n'est linéaire que si f et g sont proportionnels à ϕ^2 . Un terme proportionnel à ϕ fait perdre l'homogénéité : il se comporte comme une source localisée sur le bord, et $\phi = 0$ n'est plus solution.

Pour $\mu_0 = \mu_1 = 0$ on retrouve les conditions de von Neumann, et pour $\mu_0 = \mu_1 = \infty$ on obtient les conditions de Dirichlet :

$$\frac{\partial f}{\partial \phi}(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \phi}(t, L) = 0 \quad (3.39)$$

Exemple 3.6 (Champ de Klein–Gordon avec conditions aux limites).

On considère l'action de Klein–Gordon à deux dimensions avec des termes de bords $f(t, x) = \phi^2(t, x)$:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^L dx \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \phi'^2 - m^2 \phi^2) + \frac{\mu_0}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \phi^2(t, 0) - \frac{\mu_1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \phi^2(t, L) \quad (3.40)$$

et alors

$$\begin{cases} \phi'(t, 0) = \mu_0 \phi(t, 0) \\ \phi'(t, L) = \mu_1 \phi(t, L) \end{cases} \quad (3.41)$$

3.6 Description hamiltonienne des champs

On définit le moment conjugué π du champ ϕ par

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (3.42)$$

La covariance est brisée par la mise en avant du temps.

Le hamiltonien est donné par

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\phi, \pi) \quad (3.43)$$

où \mathcal{H} est la densité de hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \quad (3.44)$$

Exemple 3.7 (Hamiltonien de Klein–Gordon).

Le lagrangien (3.16) devient, en faisant apparaître $\dot{\phi}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (3.45)$$

ce qui permet de calculer le moment conjugué de ϕ :

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x) \quad (3.46)$$

et la densité de hamiltonien est

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (3.47)$$

L'énergie se calcule en intégrant l'expression précédente :

$$E = \int d^3x \underbrace{\left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right)}_{\geq 0} \quad (3.48)$$

4 Champ scalaire réel

On rappelle le lagrangien de Klein–Gordon

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (4.1)$$

où $\phi(x)$ est un champ réel, et l'équation du mouvement associée :

$$(\square + m^2)\phi = (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0 \quad (4.2)$$

4.1 Solution de l'équation de Klein–Gordon

4.1.1 Solution générale

Essayons une solution du type d'onde plane (ce qui consiste à faire une transformée de Fourier sur les composantes spatiales) :

$$\phi_k(t, \mathbf{x}) = \psi(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.3)$$

En injectant cette fonction dans l'équation (4.2), on obtient

$$\ddot{\psi}_k + (k^2 + m^2)\psi_k = 0$$

soit encore

$$\ddot{\psi}_k + \omega_k^2 \psi_k = 0 \quad (4.4)$$

en notant

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2 \quad (4.5)$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique qui a pour solution :

$$\psi_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} + b_k e^{i\omega_k t} \quad (4.6)$$

et donc

$$\phi_k(t, \mathbf{x}) = a_k e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + b_k e^{i(\omega_k t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \quad (4.7)$$

La solution générale² s'obtient en intégrant sur les k :

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (a_k e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + b_k e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}) \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \quad (4.8)$$

Il reste à imposer la condition de réalité $\phi = \phi^*$. On a

$$\begin{aligned} \phi^*(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (a_k^* e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + b_k^* e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}) \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (a_{-k}^* e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + b_{-k}^* e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}) \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \end{aligned}$$

2. Il aurait aussi été possible de faire une transformée de Fourier sur les quatre dimensions. On aurait obtenu l'équation $(k^2 - m^2)\tilde{\phi} = 0$, qui admet une solution seulement si $k^2 = m^2$, ce qui redonne la relation de dispersion (4.5). Il ne reste plus qu'à prendre la transformée de Fourier inverse $\phi = (2\pi)^{-4} \int d^4 k \tilde{\phi} e^{i(\omega t + \mathbf{x}\cdot\mathbf{k})} \delta(\omega^2 - \omega_k^2)$, en se rappelant que l'on intègre ω sur \mathbb{R} entier. Il faut alors séparer l'intégrale sur ω en deux, afin de se ramener uniquement au domaine $\omega > 0$, ce qui donnera les deux termes de l'équation (4.8) ci-dessous.

où on a fait le changement de variable $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. L'identification des coefficients avec (4.8) donne les conditions :

$$\begin{cases} a_{-\mathbf{k}}^* = b_{\mathbf{k}} \\ b_{-\mathbf{k}}^* = a_{\mathbf{k}} \end{cases} \quad (4.9)$$

d'où

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_{-\mathbf{k}}^* e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) \delta(\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) \delta(\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ pour le deuxième terme. Finalement, on définit le quadrivecteur

$$k^\mu = (\omega, \mathbf{k}) \quad (4.10)$$

et on obtient la solution pour ϕ :

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} (a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + a_{\mathbf{k}}^* e^{ikx}) \quad (4.11)$$

On peut remplacer la mesure par $d^3 \mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta((\omega + \omega_{\mathbf{k}})(\omega - \omega_{\mathbf{k}})) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\omega \geq 0$, ainsi que la formule

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{\chi_i\}} \frac{\delta(x - \chi_i)}{|f'(\chi_i)|} \quad (4.12)$$

où les χ_i sont les racines de f . La solution peut donc s'écrire :

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}) \quad (4.13)$$

On remarque que la solution n'est plus explicitement covariante sous cette forme.

En introduisant les fonctions de fréquences positive et négative

$$f^\pm(x) = e^{\mp(i\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (4.14)$$

on peut écrire la solution sous la forme

$$\phi = \phi^+ + \phi^- = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^+(x) + a_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}}^-(x)) \quad (4.15)$$

Nous utiliserons parfois l'expression c.c. indiquant qu'il faut prendre le complexe conjugué du terme précédent :

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + \text{c.c.})$$

4.1.2 Calcul de l'énergie

Cherchons l'expression de l'énergie

$$E = \int d^3 \mathbf{x} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \quad (4.16)$$

en fonction de ϕ . Commençons par calculer $\dot{\phi}$ et $\nabla \phi$:

$$\dot{\phi} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} i (-a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx}) \quad (4.17a)$$

$$\nabla \phi = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} i \mathbf{k} (a_k e^{-ikx} - a_k^* e^{ikx}) \quad (4.17b)$$

Il est important d'utiliser des k différents dans l'intégration. Calculons le premier terme en $\dot{\phi}^2$:

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{x} \dot{\phi}^2 &= \int d^3 \mathbf{x} \left(\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} i (-a_k e^{-ikx} + \text{c.c.}) \right) \left(\int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} i (-a_q e^{-iqx} + \text{c.c.}) \right) \\ &= - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \int d^3 \mathbf{x} (a_k a_q e^{-i(k+q)x} - a_k a_q^* e^{-i(k-q)x} + \text{c.c.}) \\ &= - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{q} \frac{1}{4} (a_k a_q \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) e^{-i(\omega_k + \omega_q)t} \\ &\quad - a_k a_q^* \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) e^{-i(\omega_k - \omega_q)t} + \text{c.c.}) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} (-a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k a_k^* + \text{c.c.}) \end{aligned}$$

car $\omega_k = \omega_{-k}$, et de même on trouvera que

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{x} (\nabla \phi)^2 &= \int d^3 \mathbf{x} \left(\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} i \mathbf{k} (a_k e^{-ikx} - \text{c.c.}) \right) \left(\int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} i \mathbf{q} (a_q e^{-iqx} - \text{c.c.}) \right) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k \omega_q} \int d^3 \mathbf{x} (-\mathbf{kq}) (a_k a_q e^{-i(k+q)x} - a_k a_q^* e^{-i(k-q)x} + \text{c.c.}) \\ &= - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{q} \frac{1}{4\omega_k \omega_q} \mathbf{kq} (a_k a_q \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) e^{-i(\omega_k + \omega_q)t} \\ &\quad - a_k a_q^* \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) e^{-i(\omega_k - \omega_q)t} + \text{c.c.}) \\ &= - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k^2} \mathbf{k}^2 (-a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} - a_k a_k^* + \text{c.c.}) \end{aligned}$$

et finalement

$$\int d^3 \mathbf{x} \phi^2 = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k^2} m^2 (a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k a_k^* + \text{c.c.})$$

En rassemblant les trois termes, on obtient

$$\begin{aligned}
E &= \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k^2} \left(-\omega_k^2 a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + \omega_k^2 a_k a_k^* + (\omega_k^2 - m^2) a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} \right. \\
&\quad \left. + (\omega_k^2 - m^2) a_k a_k^* + m^2 a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + m^2 a_k a_k^* + \text{c.c.} \right) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k^2} \omega_k^2 (a_k a_k^* + a_k^* a_k)
\end{aligned}$$

En posant $N_k = (2\pi)^3 2\omega_k a_k^* a_k$, on obtient

$$E = \int d^3\mathbf{k} \omega_k N_k \quad (4.18)$$

$\omega_k N_k$ correspond donc à la densité d'énergie par unité de \mathbf{k} .

4.2 Quantification canonique

On considère un système de N oscillateurs harmoniques de fréquences ω_i . Le lagrangien de ce système est

$$L = \sum_i \frac{1}{2} (p_i^2 - \omega_i^2 q_i^2) \quad (4.19)$$

ce qui donnent les équations du mouvement (une par oscillateur) :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (4.20)$$

qui ont pour solution :

$$q_i = a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^* e^{i\omega_i t} \quad (4.21a)$$

$$p_i = -i\omega_i a_i e^{-i\omega_i t} + i\omega_i a_i^* e^{i\omega_i t} \quad (4.21b)$$

Si on promeut p_i et q_i en opérateurs, alors a_i et a_i^* le deviennent aussi :

$$q_i \rightarrow \hat{q}_i \quad p_i \rightarrow \hat{p}_i \quad a_i \rightarrow \hat{a}_i \quad a_i^* \rightarrow \hat{a}_i^\dagger \quad (4.22)$$

On a les relations de commutations suivantes :

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j^\dagger] = i\delta_{ij} \quad (4.23a)$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (4.23b)$$

Calculons le commutateur de \hat{a}_i et \hat{a}_i^\dagger à partir de celui de \hat{q}_i et \hat{p}_i^\dagger :

$$\begin{aligned}
[\hat{q}_i, \hat{p}_j^\dagger] &= [\hat{a}_i e^{-i\omega_i t} + \hat{a}_i^\dagger e^{i\omega_i t}, -i\omega_i \hat{a}_i e^{-i\omega_i t} + i\omega_i \hat{a}_i^\dagger e^{i\omega_i t}] \\
&= i\omega_i [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] - i\omega_i [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i] \\
&= 2i\omega_i [\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = i
\end{aligned}$$

Tous les autres commutateurs seront nuls à cause des relations de commutations (4.23) :

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \right] = \frac{1}{2\omega_i} \delta_{ij} \quad (4.24a)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger \right] = 0 \quad (4.24b)$$

L'hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \sum_i \omega_i \left(\hat{N}_i + \frac{1}{2} \right) \quad (4.25)$$

avec

$$\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (4.26)$$

Un état ψ se décompose sur la base des états propres $|n_i\rangle$ de \hat{N}_i :

$$|\psi\rangle = \sum_i \psi_{n_1, \dots, n_N} |n_1 \cdots n_N\rangle \quad (4.27)$$

Si i devient un indice continu, on obtient le champ de Klein–Gordon. On obtient alors la relation de commutation à temps égal (en se rappelant que $\pi = \dot{\phi}$) :

$$\left[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}') \right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.28a)$$

$$\left[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}') \right] = \left[\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}') \right] = 0 \quad (4.28b)$$

qui permettent de déterminer les relation de commutation³ :

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (4.29a)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = \left[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = 0 \quad (4.29b)$$

On a les différentes relations (avec $|\psi\rangle = |n_{k_1} \cdots n_{k_N}\rangle$) :

$$\hat{a}_k |0\rangle_k = 0 \quad (4.30a)$$

$$(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k} = |n_k\rangle \quad (4.30b)$$

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = n_k |n_k\rangle \quad (4.30c)$$

$$\hat{N}_{k_1} |\psi\rangle = n_{k_1} |n_{k_1}\rangle \quad (4.30d)$$

$$\hat{N} |\psi\rangle = (n_{k_1} + \cdots + n_{k_N}) |\psi\rangle \quad (4.30e)$$

Le nombre total d'excitation est donné par

$$\hat{N} = \int d^3\mathbf{k} \hat{N}_k \quad (4.31)$$

Un seul champ permet de décrire plusieurs particules, par exemple :

3. Il est possible d'obtenir la relation de commutation $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ directement obtenue à partir du cas classique en normalisant les \hat{a}_k : $\hat{a}_k = \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{a}_k$. Toutefois on perd la covariance explicite des différentes expressions.

- une particule : $|n_k \ 0 \ 0 \ \dots\rangle$.
- deux particules : $|n_{k_1} \ n_{k_2} \ 0 \ \dots\rangle$.

Partant de l'expression (4.18), on obtient l'hamiltonien :

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k} \omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k} \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + [\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] \right) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_k} \omega_k \left(2\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(0) \right) \\
&= \int d^3\mathbf{k} \omega_k \hat{N}_k + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \omega_k \delta^{(3)}(0)}_{H_0}
\end{aligned}$$

Le deuxième terme H_0 du membre de droite est infini mais constant : on redéfinit l'origine des énergies de sorte que ce terme vale zéro :

$$H_0 |0\rangle = E_0 |0\rangle \quad (4.32)$$

Plaçons le système dans un volume fini V , alors on aura :

$$H_0 = \int d^3\mathbf{k} 2\omega_k \delta^{(3)}(0) \longrightarrow H_0 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} 2\omega_k V$$

car

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} = 0)$$

On peut écrire une densité d'énergie par volume :

$$\mathcal{E}_0 = \frac{H}{V} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} 2\omega_k \quad (4.33)$$

mais cette expression diverge pour k grand (divergence UV). On définit une fréquence de coupure Λ :

$$\mathcal{E}_0 = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{k}| < \Lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} 2\omega_k \quad (4.34)$$

Cette expression diverge comme Λ^4 .

On a

$$\hat{H} |n_1 \dots n_N\rangle = \int d^3\mathbf{k} \omega_k \hat{N}_k |n_1 \dots n_N\rangle \quad (4.35)$$

et

$$\hat{N}_k |n_1 \dots n_N\rangle = (n_1 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \dots + n_N \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_N)) |n_1 \dots n_N\rangle \quad (4.36)$$

ce qui donne

$$\hat{H} |n_1 \dots n_N\rangle = \underbrace{\sum_i \omega_i n_i}_{E} |n_1 \dots n_N\rangle \quad (4.37)$$

L'impulsion \mathbf{p} est

$$\hat{\mathbf{p}} = \int d^3\mathbf{x} (-\dot{\phi} \nabla \phi) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{k} \hat{N}_k \quad (4.38)$$

et

$$\hat{\mathbf{p}} |n_1 \cdots n_N\rangle = \sum_i n_i \mathbf{k}_i |n_1 \cdots n_N\rangle \quad (4.39)$$

et finalement

$$\hat{H} |\mathbf{p}\rangle = \omega_p |\mathbf{p}\rangle \quad (4.40a)$$

$$\hat{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \quad (4.40b)$$

$$\omega_p = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (4.40c)$$

5 Champ scalaire en interaction

5.1 Champ scalaire avec source

Considérons l'ajout d'une source $j(x)$ au lagrangien de Klein–Gordon (4.1) :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + j\phi \quad (5.1)$$

L'équation du mouvement est :

$$(\square + m^2)\phi = j \quad (5.2)$$

Si $j \neq 0$ alors $\phi = 0$ n'est plus solution.

5.1.1 Fonctions de Green — Cas général

Introduisons la fonction de Green $G(x, x')$ telle que

$$(\square_x + m^2)G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (5.3)$$

Alors la solution générale de l'équation (5.2) est

$$\phi(x) = \int d^4x' G(x, x')j(x') + \phi_0(x) \quad (5.4)$$

où ϕ_0 est solution de l'équation sans source (4.2). Montrons qu'il s'agit en effet d'une solution :

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2)\phi &= (\square_x + m^2) \int d^4x' G(x, x')j(x') + (\square_x + m^2)\phi_0(x) \\ &= \int d^4x' (\square_x + m^2)G(x, x')j(x') + 0 \\ &= \int d^4x' \delta^{(4)}(x - x')j(x') = j(x) \end{aligned}$$

Considérons une translation des coordonnées $x \rightarrow x + a$ et $x' \rightarrow x' + a$, alors l'équation (5.3) est invariante. G ne peut donc dépendre que de la différence de x et x' :

$$G(x, x') = G(x - x') \quad (5.5)$$

Exemple 5.1 (Fonction de Green de l'équation de Klein–Gordon euclidienne).

L'équation considérée est

$$-(\partial_t^2 + \nabla^2 - m^2)G(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (5.6)$$

La transformée de Fourier de G est :

$$\tilde{G} = \int d^4x e^{ikx} G(x) \quad (5.7)$$

L'équation précédente devient alors

$$\begin{aligned} -(\partial_t^2 + \nabla^2 - m^2)\tilde{G} &= (k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)\tilde{G} \\ &= (|k|^2 + m^2)\tilde{G} = 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{G} = \frac{1}{|k|^2 + m^2} \quad (5.8)$$

qui permet de déduire G :

$$G_E(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{|k|^2 + m^2} \quad (5.9)$$

et alors

$$\phi_E = \int d^4x' G(x - x') j(x') \quad (5.10)$$

Si $m^2 = 0$, on déduit :

$$G_E(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x'|^2} \quad (5.11)$$

Traitons maintenant l'équation de Klein-Gordon avec source (5.2). Après transformée de Fourier de l'équation (5.3), on trouve :

$$(-k^2 + m^2)\tilde{G} = (-k_0^2 + \omega^2)\tilde{G} = 1 \quad (5.12)$$

Toutefois il est impossible d'inverser⁴ cette équation à cause du fait qu'elle n'est pas définie pour $k^2 = m^2$: ne solution est de déformer le contour C et d'intégrer dans \mathbb{C}

$$G_c = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_C \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{-k_0^2 + \omega^2} \quad (5.13)$$

mais G n'est alors pas définie de manière univoque.

Il reste ensuite à refermer le contour par un demi-cercle, en prenant garde à ce qu'il ne contribue pas à l'intégrale : pour ce faire, il faut que la partie réelle de l'argument de l'exponentielle soit négative :

$$\Re(-ik_0t) = t\Im(k_0) < 0 \quad (5.14)$$

donc

$$\begin{aligned} t > 0 &\implies \Im(k_0) < 0 \\ t < 0 &\implies \Im(k_0) > 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

et ainsi

$$e^{-ik_0t} = e^{-it\Im(k_0)} e^{t\Re(k_0)} \xrightarrow{|k_0| \rightarrow \infty} 0 \quad (5.16)$$

5.1.2 Fonctions de Green avancée et retardée

Les contours C_A et C_R de la figure 1 permettent de définir les fonctions avancée G_A et retardée G_R , avec les propriétés suivantes :

- $G_A(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0$ si $t > t'$.
- $G_R(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0$ si $t < t'$.

Commençons par étudier la fonction de Green retardée G_R . Cette dernière est nulle pour $t > 0$ car le contour ne contient aucun pôle (figure 2) et donc l'intégrale est nulle.

4. Un opérateur D dans une équation $D\phi = j$ est inversible s'il existe D^{-1} tel que $\phi = D^{-1}j$. D^{-1} existe ssi $D\phi = 0 \implies \phi = 0$. Cette propriété est vérifiée dans le laplacien euclidien, mais pas pour le dalembertien.

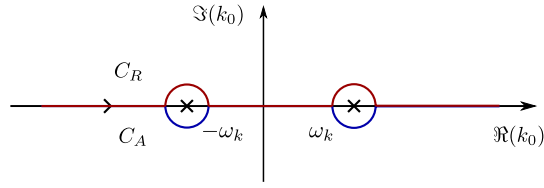


FIGURE 1 – Possibilités de déformation du contour d'intégration.

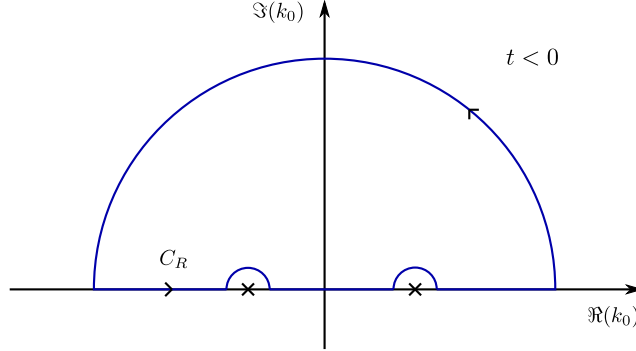


FIGURE 2 – Contour d'intégration pour la fonction de Green retardée avec $t < 0$.

Considérons maintenant la valeur de l'intégrale pour $t < 0$ (figure 3) :

$$\begin{aligned}
 G_R &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{C_R} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{-k_0^2 + \omega_k^2} \\
 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{C_R} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0t}}{(\omega_k + k_0)(\omega_k - k_0)} \\
 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{2\pi} 2\pi i \left(\frac{e^{i\omega_k t}}{-2\omega_k} + \frac{e^{-i\omega_k t}}{2\omega_k} \right) \\
 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\omega_k} i (e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t})
 \end{aligned}$$

ce qui nous donne (pour tout t) :

$$G_R(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \theta(t - t') \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\omega_k} i (e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t}) \quad (5.17)$$

Une autre procédure tout à fait équivalente à la déformation des contours consiste à déplacer les pôles d'une valeur $\pm i\varepsilon$ (figure 4) en faisant tendre ε vers 0 à la fin⁵ :

$$\frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2} \longrightarrow \frac{1}{(k_0 + i\varepsilon)^2 - \omega_k^2} = \frac{1}{(k_0 + (\omega_k + i\varepsilon))(k_0 - (\omega_k - i\varepsilon))} \quad (5.18)$$

Le champ donné par la fonction retardée est :

$$\phi_R(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^t dt' G_R(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') j(t', \mathbf{x}') \quad (5.19)$$

5. Le signe + donnera la fonction de Green retardée, et le signe - la fonction avancée.

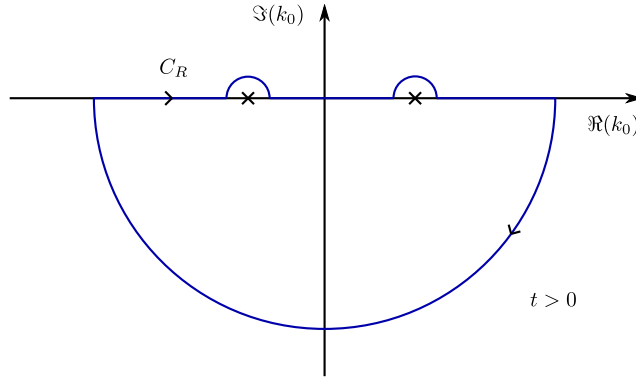


FIGURE 3 – Contour d'intégration pour la fonction de Green retardée avec $t > 0$.

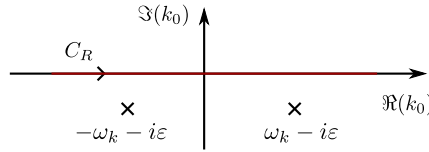


FIGURE 4 – Contour d'intégration, pour la fonction de Green retardée, avec les pôles déplacés.

La fonction de Green retardée donne l'effet de la source à un instant donné en prenant en compte tout ce qui s'est produit avant. Elle respecte ainsi la causalité.

Sa transformée de Fourier (spatiale) vaut :

$$\tilde{G}_R(t, \mathbf{k}) = \frac{i}{2\omega_k} (e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t}) \theta(t) \quad (5.20)$$

La fonction avancée possède une interprétation inverse de celle de la fonction retardée. Par exemple, en connaissant le système au temps présent, il est possible de déterminer la source dans le passé :

$$\phi_A(t, \mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x}' \int_t^\infty dt' G_A(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') j(t', \mathbf{x}') \quad (5.21)$$

Sa transformée de Fourier (spatiale) vaut :

$$\tilde{G}_A(t, \mathbf{k}) = \frac{i}{2\omega_k} (e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t}) \theta(-t) \quad (5.22)$$

5.1.3 Autres fonctions de Green

En introduisant les deux fonctions \tilde{D}_+ et \tilde{D}_- , définies par

$$\tilde{D}_\pm = e^{\mp i\omega_k t} = e^{\mp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f^\pm \quad (5.23)$$

où on a réutilisé les expressions (4.14) de f^\pm , on peut récrire les transformées de Fourier (5.20) et (5.22) :

$$\tilde{G}_R = \frac{i}{2\omega_k} (D_+ - D_-) \theta(t) \quad (5.24a)$$

$$\tilde{G}_A = \frac{i}{2\omega_k} (D_- - D_+) \theta(-t) \quad (5.24b)$$

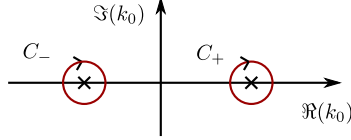


FIGURE 5 – Contour d'intégration pour la différence des fonctions de Green.

En faisant la différence des deux fonctions, on obtient ⁶ :

$$\tilde{G}_R - \tilde{G}_A = \frac{i}{2\omega_k} (D_+ - D_-) \quad (5.25)$$

d'où

$$G_R - G_A = \int_{C_R - C_A} \frac{e^{ikx}}{k_0^2 - \omega^2} \quad (5.26)$$

où le contour est montré sur la figure 5.

On peut chercher à exprimer \tilde{D}_+ et \tilde{D}_- en fonction de \tilde{G}_R et \tilde{G}_A :

$$\tilde{D}_\pm = \frac{1}{2} (\tilde{G}_R \pm \tilde{G}_A) \quad (5.27)$$

La fonction de Green de Feynman G_F (figure 6) est définie par

$$\tilde{G}_F(t) = \tilde{D}_+(t)\theta(t) + \tilde{D}_-(t)\theta(-t) \quad (5.28)$$

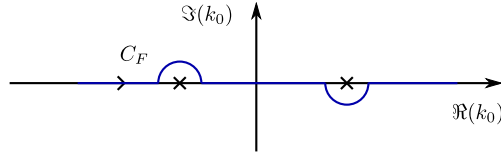


FIGURE 6 – Contour d'intégration pour la fonction de Green de Feynman.

La rotation de Wick permet de retrouver la fonction de Green euclidienne (5.9) à partir de la fonction de Green de Feynman (5.28) en utilisant un temps imaginaire :

$$\begin{aligned} G_F(t) &= - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon} \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_4}{2\pi} \frac{e^{ik_4\tau}}{-k_4^2 - \mathbf{k}^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \\ &= iG_E(\tau) \end{aligned}$$

⁶ La différence de deux fonctions de Green G_1 et G_2 est solution de l'équation homogène. En effet, on a $(\square + m^2)(G_1 - G_2) = \delta - \delta = 0$.

où on a posé

$$\omega = ik_4 \quad t = i\tau \quad (5.29)$$

5.1.4 Énergie et couplage

L'énergie pour un lagrangien avec source est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 - j\phi \quad (5.30)$$

L'influence d'une source $j_1(\mathbf{x})$ sur une source $j_2(\mathbf{y})$ est donnée par

$$\Delta E = \int d^3\mathbf{x} j_2(x)\phi_1(x) = \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{x}' j_2(x)G(x-x')j_1(x') \quad (5.31)$$

Ainsi la fonction de Green décrit l'interaction entre les deux sources ; elle s'interprète comme un échange de particules.

L'action S_0 du système est donnée à partir du lagrangien (5.1)

$$S_0 = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \right) + \int d^4x j\phi \quad (5.32)$$

L'action totale du système est alors donnée par

$$S = S_0 + S_k[j] \quad (5.33)$$

où $S_k[j]$ est un terme cinétique pour j . La variation de l'action par rapport à j donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_k}{\delta j} + \frac{\delta S_0}{\delta j} &= 0 \\ \frac{\delta S_k}{\delta j} + \phi &= 0 \\ \frac{\delta S_k}{\delta j(x)} + \int d^4y G(x,y)j(y) &= 0 \end{aligned}$$

et on déduit que l'action effective pour j est

$$S_{eff}[j] = S_k[j] + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x)G(x,y)j(y) \quad (5.34)$$

Cette action ne peut être mise sous la forme d'une densité de lagrangien $\int d^4x \mathcal{L}(x)$ et n'est donc pas locale : les interactions entre les particules sont instantannées.

Exemple 5.2 (Interaction entre deux sources ponctuelles).

Considérons pour la partie cinétique le terme

$$S_k = \int dt \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}_0^2 \quad (5.35)$$

et deux sources ponctuelles

$$j(x) = q\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) + q'\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t)) \quad (5.36)$$

La fonction de Green est donnée par

$$G = - \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega(t-t') + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (5.37)$$

et l'intégrale sur le temps donne :

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-i\omega t} 2\pi\delta(\omega) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{x}') = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right) \times \left(\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega t'} \right) \end{aligned}$$

La présence des sources à tout instant t conduit à une énergie infinie. On notera

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} dt \quad (5.38)$$

où T correspond au temps de l'expérience, et on s'intéressera uniquement à l'énergie par unité de temps.

On peut montrer que

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \quad (5.39)$$

L'équation (5.34) donne alors :

$$\begin{aligned} E_{eff} &= \frac{S_{eff}}{T} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' (q\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + q'\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &\quad \times (q\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_0) + q'\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1)) \\ &= \frac{1}{2} 2qq' \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1) \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &\quad + \frac{1}{2} q^2 \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_0) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &\quad + \frac{1}{2} q'^2 \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &= \frac{qq'}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|} + \frac{q^2}{2} V(0) + \frac{q'^2}{2} V(0) \end{aligned}$$

Or $V(0) = \infty$ et l'énergie est infinie. Ce problème est dû au fait que les sources sont ponctuelles.

On obtient le lagrangien

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}_0^2 - qq' \frac{e^{-m|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1|} \quad (5.40)$$

ce qui donne l'équation de mouvement

$$m\ddot{x}_0 = -\nabla V(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \quad (5.41)$$

On a la relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' j(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')j(\mathbf{x}') &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \tilde{j}(\mathbf{k})\tilde{G}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}')\tilde{j}(\mathbf{k}') \\ &= qq'V \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{j}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} j(\mathbf{x}) = q e^{-i\mathbf{k}x_0} \quad (5.42)$$

On a $\omega = 0$. On dit alors que les particules sont "virtuelles" (ou encore qu'elles ne sont pas sur leur couche de masse) : elles ne satisfont pas la relation de dispersion.

5.1.5 Potentiels retardés

On rappelle l'expression de la fonction retardée (5.17)

$$G_R(\mathbf{x}) = i\theta(t) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\omega_k}$$

Si $m = 0$, on a $\omega_k = |\mathbf{k}|$, $E = |\mathbf{p}|$, $v = 1$, $|\mathbf{x}| = t$, et alors

$$G_R(\mathbf{x}) = \frac{i\theta(t) \delta(t - |\mathbf{x}|)}{4\pi |\mathbf{x}|} \quad (5.43)$$

Le champ ϕ vaut

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \int d^4x' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')j(\mathbf{x}') \\ &= \int d^3\mathbf{x}' j(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}') \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

donc

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t_{ret})|} \quad (5.44)$$

où

$$t_{ret} = t - |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t_{ret})| \quad (5.45)$$

5.2 Auto-interactions

Dans le cas général, le lagrangien pour ϕ s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (5.46)$$

avec

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 + V_I(\phi) \quad (5.47)$$

On notera

$$V'(\phi) = \frac{dV}{d\phi} \quad (5.48)$$

L'équation du mouvement est

$$\square\phi + V'(\phi) = 0 \quad (5.49)$$

Par exemple on peut avoir

$$V_I(\phi) = \frac{g}{3}\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (5.50)$$

Les équations sont non linéaires dès lors que $V_I(\phi) \neq 0$, car elles contiennent des termes quadratiques, ou plus, en ϕ .

On appelle solution de vide ϕ_0 toute solution constante des équations du mouvement (5.49). Elle vérifie donc

$$V'(\phi_0) = 0 \quad (5.51)$$

Dans ce cas, les petits déplacements de ϕ autour de sa position de vide s'écrivent

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \delta\phi(x) \quad \delta\phi \ll \phi_0 \quad (5.52)$$

On peut développer le potentiel V et sa dérivée V' autour de ϕ_0 :

$$V(\phi_0 + \delta\phi) \approx V(\phi_0) + V'(\phi_0)\delta\phi + \frac{(\delta\phi)^2}{2}V''(\phi_0) + \dots \quad (5.53a)$$

$$V'(\phi_0 + \delta\phi) \approx V'(\phi_0) + V''(\phi_0)\delta\phi + \frac{(\delta\phi)^2}{2}V'''(\phi_0) + \dots \quad (5.53b)$$

$$(5.53c)$$

En ne gardant que les termes linéaires, et en tenant compte du fait que $V'(\phi_0) = 0$, on trouve :

$$V'(\phi_0 + \delta\phi) \approx V''(\phi_0)\delta\phi \quad (5.54)$$

et l'équation du mouvement (5.49) devient

$$\begin{aligned} \square\phi + V'(\phi) &= \square(\phi_0 + \delta\phi) + V'(\phi_0 + \delta\phi) \\ &\approx \square(\delta\phi) + V''(\phi_0)\delta\phi = 0 \end{aligned}$$

On retrouve l'équation de Klein–Gordon, mais cette fois-ci pour la perturbation :

$$\square\delta\phi + m^2\delta\phi = 0 \quad (5.55)$$

où on définit m^2 par

$$m^2 = V''(\phi_0) \quad (5.56)$$

Si $m^2 = V''(\phi_0) < 0$ (ce qui correspond à un maximum du potentiel), alors la masse est imaginaire pure (tachyon). Les solutions correspondantes n'ont pas de sens physique et indiquent une instabilité, dû au fait que l'on a développé autour du mauvais vide. Posons $i\mu = m$ et écrivons l'équation de Klein–Gordon (partie temporelle) :

$$\partial_t^2\delta\phi - \mu^2\delta\phi = 0 \quad (5.57)$$

La solution est

$$\delta\phi = A e^{-\mu t} + B e^{\mu t} \quad (5.58)$$

Le second terme tend vers l'infini quand $t \rightarrow \infty$ et il doit être éliminé. Toutefois, le premier terme tend vers 0 : $\tau = 1/\mu$ correspond alors au temps de vie de l'état instable considéré.

Exemple 5.3.

Considérons le potentiel (figure 7)

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \quad (5.59)$$

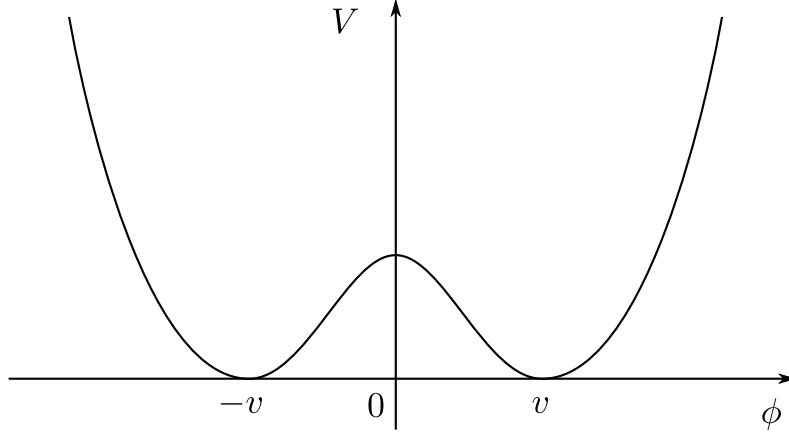


FIGURE 7 – Potentiel de l'équation (5.59).

La dérivée première vaut

$$V'(\phi) = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi \quad (5.60)$$

qui s'annule pour

$$\phi_0 = 0 \quad \phi_{\pm} = \pm v \quad (5.61)$$

La dérivée seconde est

$$V''(\phi) = \lambda(3\phi^2 - v^2) \quad (5.62)$$

Explorons les cas ϕ_0 et ϕ_{\pm} séparément :

- Pour $\phi_0 = 0$, on a $m^2 = V''(\phi_0) = -\lambda v^2 < 0$ ce qui implique $m = iv\sqrt{\lambda}$. Il s'agit d'une instabilité. La relation de dispersion donne $E^2 + \mathbf{p}^2 = m^2 < 0$.
- Pour $\phi_0 = \phi_{\pm}$, on a $m^2 = V''(\phi_{\pm}) = 2\lambda v^2 > 0$.

Dans le cas général d'un système à n champs $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, le lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \partial_{\mu} \phi_i \partial^{\mu} \phi_i - V(\phi) \quad (5.63)$$

Le vide est obtenu en cherchant une solution aux n équations :

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i}(\phi_0) = 0 \quad i \in [1, n] \quad (5.64)$$

où ϕ_{j0} sont les solutions de vide. Une solution développée autour de ce vide s'écrit

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi \quad (5.65)$$

Après linéarisation autour du vide, on obtient n équations couplées :

$$\partial_\mu \partial^\mu \delta\phi_i + \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i \partial\phi_j}(\phi_0) \delta\phi_j = 0 \quad (5.66)$$

que l'on récrit

$$\partial_\mu \partial^\mu \delta\phi + M\delta\phi = 0 \quad (5.67)$$

où M est la matrice de masse ayant pour coefficient :

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i \partial\phi_j}(\phi_0) \quad (5.68)$$

Considérons la matrice de passage P ($P^{-1} = P^t$) qui permet de diagonaliser M :

$$D = PMP^{-1} \quad (5.69)$$

Alors dans cette nouvelle base, les champs deviennent $\delta\phi' = P\phi$ et on obtient n équations découplées :

$$\partial_\mu \partial^\mu \delta\phi'_i + \lambda_i \delta\phi'_i = 0 \quad (5.70)$$

avec $\lambda_i = m_i^2 > 0$.

Exemple 5.4 (Potentiel en ϕ^3).

On prend

$$V_I = \frac{g}{3}\phi^3 \quad (5.71)$$

avec $g \ll 1$.

Dans ce cas l'équation du mouvement devient

$$\square\phi + m^2\phi + g\phi^2 = 0 \quad (5.72)$$

On cherche une solution sous forme de développement perturbatif :

$$\phi = \phi_0 + g\phi_1 + g^2\phi_2 + \dots \quad (5.73)$$

– Ordre 0 :

$$(\square + m^2)\phi_0 = 0 \quad (5.74)$$

– Ordre 1 :

$$(\square + m^2)(\phi_0 + g\phi_1) = g(\phi_0 + g\phi_1)^2$$

d'où

$$(\square + m^2)\phi_1 = \phi_0^2 \quad (5.75)$$

ϕ_0^2 agit comme une source pour ϕ_1 et on peut donc écrire :

$$\phi_1(x) = \int d^4y G(x, y)\phi_0^2(y) \quad (5.76)$$

– Ordre 2 :

$$(\square + m^2)\phi_2 = 2\phi_0\phi_1 \quad (5.77)$$

et alors

$$\phi_2(x) = \int d^4y G(x, y)\phi_0(y) \int d^4y' G(y, y')\phi_0^2(y') \quad (5.78)$$

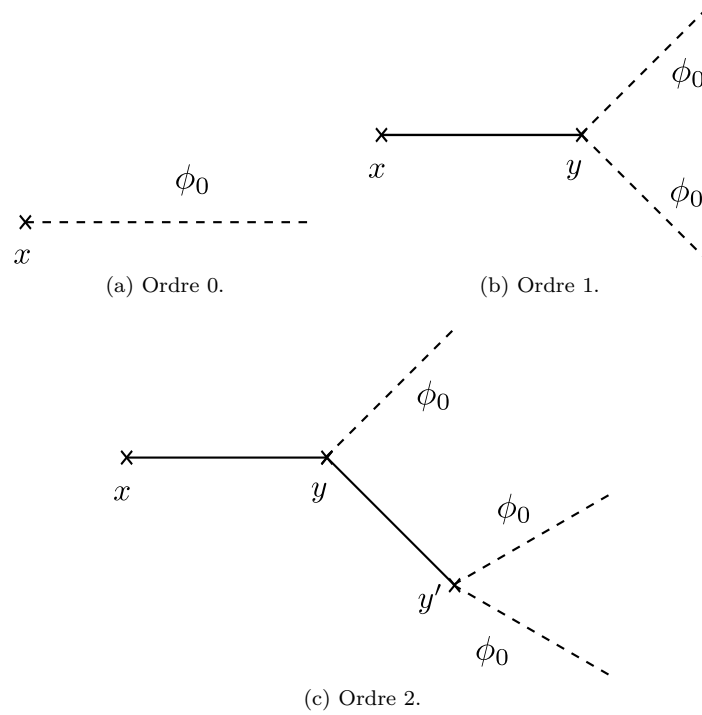


FIGURE 8 – Vertex typique d’une autointeraction en ϕ^3 .

La solution générale s’écrit finalement (à l’ordre 2) :

$$\phi(x) = \phi_0(x) + g\phi_1(x) + g^2\phi_2(x) \quad (5.79)$$

Chaque terme correspond à un certain type de vertex (figure 8).

L’autointeraction permet la création de particules, le transfert d’impulsion...

$$\langle \mathbf{p} | \phi | 0 \rangle = \langle \mathbf{p} | \phi_0 | 0 \rangle + g \int G \langle \mathbf{p} | \phi_0 \phi_0 | 0 \rangle \quad (5.80)$$

6 Symétries et lois de conservations

6.1 Généralités

Considérons l'action générale

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (6.1)$$

Une transformation $\phi' = f(\phi)$ est une symétrie si $S[\phi'] = S[\phi]$.

Une symétrie est dite continue si elle dépend d'un paramètre continu : $\phi' = f_\alpha(\phi)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Une symétrie qui n'est pas continue est dite discrète.

Exemple 6.1 (Symétrie discrète).

Soit le lagrangien (4.1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

Alors l'action est invariante par la transformation $\phi' = -\phi$: $S[\phi] = S[-\phi]$. De plus, si ϕ_0 est une solution de vide, alors $-\phi_0$ l'est aussi.

Exemple 6.2 (Symétrie continue $U(1)$).

Soit ϕ un champ scalaire complexe. Alors l'action

$$S = \int d^4x (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi)$$

est invariante par la transformation

$$\begin{cases} \phi' = e^{i\theta} \phi \\ \phi'^* = e^{-i\theta} \phi^* \end{cases}$$

En effet, on a $S[e^{i\theta} \phi] = S[\phi]$.

Définition : Un groupe G possède les propriétés suivantes :

1. $g, h \in G \Rightarrow gh \in G$.
2. $\forall g \in G : 1g = g1 = g$.
3. $\forall g \in G : \exists g^{-1} \mid gg^{-1} = g^{-1}g = 1$.
4. Il est de plus commutatif (ou abélien) si $\forall g, h \in G \Rightarrow gh = hg$.
5. Un groupe est dit linéaire si $g(\phi_1 + \lambda\phi_2) = g\phi_1 + \lambda g\phi_2$ où ϕ_2 sont des champs de l'espace où le groupe G agit.

Exemple 6.3 (Groupe $U(1)$).

On considère le groupe $U(1)$ d'éléments $\delta_\alpha = e^{i\alpha}$. Il possède les propriétés suivantes :

1. $\phi' = \delta_\alpha \phi, \phi'' = \delta_\beta \phi' \Rightarrow \phi'' = \delta_\beta \delta_\alpha \phi$.
2. $\delta_\beta \delta_\alpha \phi = \delta_{\alpha+\beta} \phi$.
3. $\delta_\alpha \delta_{-\alpha} \phi = \phi$.
4. $\phi' = \delta_\alpha \phi \Rightarrow \phi = \delta_{-\alpha} \phi'$.

5. $\delta_0 \phi = \phi$.

$U(1)$ est appelé groupe unitaire sur \mathbb{C} . On peut définir le groupe unitaire \mathbb{C}^n , que l'on note $U(n)$, par :

$$U(n) = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = 1\} \quad (6.2)$$

Exemple 6.4 (Invariance par $U(2)$).

Soient deux champs complexes ϕ_1 et ϕ_2 et on notera $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. On veut déterminer la forme des lagrangiens invariants par $U(2)$. Soient $\phi' = U\phi$. Alors

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi'^\dagger \partial^\mu \phi' &\longrightarrow (U \partial_\mu \phi)^\dagger (U \partial^\mu \phi) = (\partial_\mu \phi^\dagger) U^\dagger U (\partial^\mu \phi) \\ &= (\partial_\mu \phi^\dagger) (\partial^\mu \phi) \end{aligned}$$

Considérons maintenant le potentiel

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}(m_1^2 |\phi_1|^2 + m_2^2 |\phi_2|^2)$$

Ce dernier n'est invariant que si $m_1^2 = m_2^2$. Plus généralement, tout potentiel de la forme

$$V = V(\phi \phi^\dagger) \quad (6.3)$$

sera invariant.

Le groupe spécial unitaire est défini par

$$SU(2) = \{U \in U(2) \mid \det U = 1\} \quad (6.4)$$

On a : $U(2) = U(1) \times SU(2)$.

6.2 Théorème de Noether et courants conservés

6.2.1 Énoncé et démonstration

Théorème de Noether : Pour toute symétrie continue de l'action il existe un courant conservé $j_\mu(x)$:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6.5)$$

Ceci implique l'existence d'une charge conservée, définie par

$$Q(t) = \int d^3 \mathbf{x} \rho(t, \mathbf{x}) \quad (6.6)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \rho(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} -\nabla \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = - \oint_{\partial \mathbb{R}^3} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \end{aligned}$$

Démontrons le théorème. Soit l'action dépendant de n champs :

$$S[\phi_a] = \int d^4 x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \quad (6.7)$$

On utilisera la convention de sommation pour les indices des champs.

Soit une transformation $\phi'_a = f_a^\alpha(\phi_b)$, alors si :

- $\alpha = 0$, il s'agit de la transformation identité : $\phi'_a = \phi_a$.
 - $\alpha \ll 1$, il s'agit d'une transformation infinitésimale.
- On considère des transformations infinitésimales :

$$\begin{cases} x \rightarrow x' = x + \delta x \\ \phi_a \rightarrow \phi'_a(x') = \phi_a(x) + \delta \phi_a(x) \end{cases} \quad (6.8)$$

Remarquons que la variation $\delta \phi_a(x)$

$$\delta \phi_a(x) = \phi'_a(x') - \phi_a(x) \quad (6.9)$$

représente la variation du champ dû à la fois à la transformation du champ et à la transformation des coordonnées. On définit alors la variation en un point fixé de l'espace par

$$\delta_0 \phi_a(x) = \phi'_a(x) - \phi_a(x) \quad (6.10)$$

Déterminons le lien entre $d^4 x'$ et $d^4 x$. On a

$$\begin{aligned} d^4 x' &= \det \left(\frac{d^4 x'}{d^4 x} \right) d^4 x \\ &\approx (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4 x \end{aligned}$$

où $\det \left(\frac{d^4 x'}{d^4 x} \right)$ est le jacobien du changement de variable. Calculons pour deux dimensions d'espace :

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{d^4 x'}{d^4 x} \right) &= \begin{vmatrix} \partial_0 x'^0 & \partial_1 x'^0 \\ \partial_0 x'^1 & \partial_1 x'^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \partial_0 \delta x^0 & \partial_1 \delta x^0 \\ \partial_0 \delta x^1 & 1 + \partial_1 \delta x^1 \end{vmatrix} \\ &= (1 + \partial_0 \delta x^0)(1 + \partial_1 \delta x^1) - (\partial_1 \delta x^0)(\partial_0 \delta x^1) \\ &\approx 1 + \partial_0 \delta x^0 + \partial_1 \delta x^1 \end{aligned}$$

en se limitant à l'ordre 1.

Cherchons le lien entre $\delta \phi$ et $\delta_0 \phi$ (à l'ordre 1) :

$$\begin{aligned} \delta \phi_a(x) &= \phi'_a(x') - \phi_a(x) \\ &= \phi'_a(x + \delta x) - \phi_a(x) \\ &\approx \phi'_a(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi'_a(x) - \phi_a(x) \\ &= \phi'_a(x) + \delta x^\mu \partial_\mu (\phi_a(x) + \delta_0 \phi_a(x)) - \phi_a(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\delta \phi_a(x) = \delta_0 \phi_a + \delta x^\mu \partial_\mu \phi_a(x) \quad (6.11)$$

Notons que cette formule peut s'appliquer à tout champ, \mathcal{L} compris.

Nous pouvons maintenant écrire la variation de l'action (en se limitant tou-

jours à l'ordre 1 et en utilisant les formules) :

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x' \mathcal{L}(\phi'_a(x'), \partial_\mu \phi'_a(x'), x') - \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x), x) \\
&\approx \int d^4x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L}(\phi'_a(x'), \partial_\mu \phi'_a(x'), x') - \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x), x) \\
&= \int d^4x (\delta \mathcal{L} + (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L}) = \int d^4x (\delta_0 \mathcal{L} + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu + (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L}) \\
&\approx \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta_0 \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu (\delta_0 \phi_a) + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) \right) \\
&= \int d^4x \delta_0 \phi_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) + \int d^4x \left[\partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta_0 \phi_a \right) \right]
\end{aligned}$$

Le premier terme redonne les équations d'Euler-Lagrange, tandis que le second est une 4-divergence. Concentrons-nous sur ce dernier et notons-le δS_v :

$$\begin{aligned}
\delta S_v &= \int d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta_0 \phi_a \right) \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} (\delta \phi_a - \delta x^\nu \partial_\nu \phi_a) \right) \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right]
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas de transformations linéaires :

$$\begin{cases} \delta x^\mu = \varepsilon_r X_r^\mu \\ \delta \phi_a = \varepsilon_r \Phi_{ar} \end{cases} \quad (6.12)$$

où $\{\varepsilon_r\}$ est l'ensemble des paramètres de la transformation. r représente un nombre quelconque d'indices et il est soumis à la convention de sommation.

Dans ce cas, δS_v devient :

$$\begin{aligned}
\delta S_v &= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu \right] \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \varepsilon_r \Phi_{ar} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \varepsilon_r X_r^\nu \right]
\end{aligned}$$

Le courant conservé est donc :

$$J_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \Phi_{ar} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) X_r^\nu \quad (6.13)$$

6.2.2 Autres démonstrations

Il est possible de démontrer le théorème de Noether d'une manière plus rapide pour des cas moins généraux.

$\delta S = 0$ est possible dans deux conditions :

1. $\delta \mathcal{L} = 0$.

$$2. \delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu.$$

Si on ne considère que les variations des champs $\phi_a \rightarrow \phi_a + \varepsilon \delta \phi_a$, la variation d'action se réduit à :

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta_0 \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu (\delta_0 \phi_a) \right)$$

Dans le premier cas, si $\partial \mathcal{L} = 0$, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu (\delta_0 \phi_a) = 0$$

ce qui donne, si les équations d'Euler–Lagrange sont satisfaites :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu (\delta_0 \phi_a) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) = 0$$

Dans ce cas, le courant s'écrit :

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \quad (6.14)$$

Dans le second cas avec $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$, la relation

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu j^\mu$$

est équivalente à

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu K^\mu$$

et on peut donc construire un nouveau courant conservé :

$$J^\mu = j^\mu - K^\mu \quad (6.15)$$

toujours à condition que les équations d'Euler–Lagrange soient vérifiées.

6.3 Applications du théorème de Noether

Nous allons voir que les symétries d'espace–temps conduisent à la conservation de quantités cinématiques, tandis que les symétries internes conduisent à la conservation de propriétés internes, comme la charge.

6.3.1 Symétrie $U(1)$

Considérons à nouveau un champ complexe ϕ avec le lagrangien

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (6.16)$$

Ce dernier est invariant par la transformation

$$\phi' = e^{i\theta} \phi \approx (1 + i\theta) \phi \quad (6.17)$$

où θ est le paramètre de la transformation. On a donc

$$\delta \phi = i\phi \quad (6.18)$$

Pour le champ conjugué, on obtient les relations suivantes :

$$\phi'^* = e^{-i\theta} \phi^* \approx (1 + i\theta) \phi^* \quad (6.19a)$$

$$\delta \phi^* = i \phi^* \quad (6.19b)$$

Le courant conservé est alors

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \delta \phi^* \\ &= (\partial^\mu \phi^*) i \phi - (\partial^\mu \phi) i \phi^* \end{aligned}$$

soit

$$j^\mu = -i \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (6.20)$$

La charge conservée est

$$Q = -i \int d^3 \mathbf{x} (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) \quad (6.21)$$

Pour un champ scalaire complexe, la solution de l'équation de Klein–Gordon est :

$$\phi = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} (a_k e^{-ikx} + b_k^* e^{ikx}) \quad (6.22)$$

Si a_k et b_k^* deviennent des opérateurs, alors les seuls commutateurs non nuls sont :

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = 2\omega_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (6.23)$$

Dans ce cas le calcul de Q donne :

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} 2\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k) \\ Q &= -i \int d^3 \mathbf{x} (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) = -i \int d^3 \mathbf{x} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left((\hat{a}_k^\dagger e^{ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx}) (-i\omega_{k'} \hat{a}_{k'} e^{-ik'x} + i\omega_{k'} \hat{b}_{k'}^\dagger e^{ik'x}) \right) \end{aligned}$$

soit

$$Q = \int d^3 \mathbf{k} (\hat{N}_{k+} - \hat{N}_{k-}) \quad (6.24)$$

où on a réutilisé la définition du nombre de particules :

$$\hat{N}_{k+} = (2\pi)^3 2\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (6.25a)$$

$$\hat{N}_{k-} = (2\pi)^3 2\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \quad (6.25b)$$

Cherchons la transformation équivalente pour des champs réels ; pour cela notons $\psi = \sqrt{2} \Re(\phi)$ et $\chi = \sqrt{2} \Im(\phi)$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \phi \phi^* &= \frac{1}{2} (\psi^2 + \chi^2) \\ \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) \end{aligned}$$

Les variations des champs sont données par

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\psi + i\delta\chi) = \delta\phi = i\phi = \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi + i\chi)$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

et ainsi

$$\begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Une transformation non infinitésimale donne

$$\begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

Il s'agit d'une rotation d'angle θ dans l'espace des champs.

6.3.2 Tenseur énergie-impulsion

Considérons une transformation des coordonnées

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \quad (6.29)$$

alors la variation du champ s'écrit (en utilisant la formule (6.11)) :

$$\phi'(x') = \phi'(x^\mu + a^\mu) \approx \phi'(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x) = \phi(x)$$

soit

$$\delta_0 \phi = -a^\mu \partial_\mu \phi(x) = -\partial_\mu (a^\mu \phi(x)) \quad (6.30)$$

comme a^μ est constant. En appliquant cette formule au lagrangien, on obtient :

$$\delta_0 \mathcal{L} = -\partial_\mu (a^\mu \mathcal{L}) \quad (6.31)$$

Il s'agit d'une variation totale, donc $\delta S = 0$ et

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right) = -\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (a^\nu \partial_\nu \phi) \right)$$

et finalement

$$\partial_\mu J^\mu = \delta_0 \mathcal{L} \iff -\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (a^\nu \partial_\nu \phi) \right) = -\partial_\mu (a^\mu \mathcal{L}) \quad (6.32)$$

d'où

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (a^\nu \partial_\nu \phi) - a^\mu \mathcal{L} \right) = a^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right)$$

et le courant conservé, noté T^μ_ν , est :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (6.33)$$

Exemple 6.5.

Considérons le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (6.34)$$

Dans ce cas, le tenseur énergie-impulsion vaut

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V \right) \quad (6.35)$$

Les différentes composantes sont :

$$\mathcal{E} = T_{00} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2) + V \quad (6.36a)$$

$$\mathcal{P}_i = T_{0i} = \dot{\phi} \partial_i \phi \quad (6.36b)$$

$$\mathcal{P}_{ij} = T_{ij} = \partial_i \phi \partial_j \phi \quad (6.36c)$$

On retrouve la densité d'énergie \mathcal{E} , la densité d'impulsion \mathcal{P}_i et le tenseur des contraintes \mathcal{P}_{ij} . Les équations de conservation sont alors :

$$\partial_t \mathcal{E} + \nabla \mathcal{P} = 0 \quad (6.37a)$$

$$\partial_t \mathcal{P}_i + \nabla \mathcal{P}_i = 0 \quad (6.37b)$$

La charge conservée de la composante temporelle est l'énergie :

$$E = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{E} \quad (6.38)$$

$T_{\mu\nu}$ n'est pas forcément symétrique, mais il est toujours possible de le symétriser.

6.3.3 Transformations de Lorentz

On considère la transformation d'espace correspondant aux transformations de Lorentz :

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (6.39)$$

avec

$$\Lambda_{\mu\nu} \Lambda_\rho{}^\nu = \eta_{\nu\rho} \quad (6.40)$$

Près de l'unité, on a

$$\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \quad \omega_{\mu\nu} \ll 1 \quad (6.41)$$

Montrons que $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique :

$$\begin{aligned} (\eta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})(\delta_\rho{}^\nu + \omega_\rho{}^\nu) &= \eta_{\mu\rho} \\ \eta_{\mu\nu} \delta_\rho{}^\nu + \omega_{\mu\nu} \delta_\rho{}^\nu + \eta_{\mu\nu} \omega_\rho{}^\nu &= \eta_{\mu\rho} \\ \omega_{\mu\rho} + \omega_{\rho\mu} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\omega_{\mu\rho} = -\omega_{\rho\mu} \quad (6.42)$$

Il existe donc six paramètres indépendants.

La variation de la position s'écrit :

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu} \quad (6.43)$$

Calculons la variation du champ de la manière habituelle :

$$\begin{aligned} \delta \phi &= \phi(x') - \phi(x) \\ &= \phi(x_{\mu} + \omega_{\mu\nu} x^{\nu}) - \phi(x) \\ &\approx \omega_{\mu\nu} x^{\nu} \partial^{\mu} \phi \end{aligned}$$

que l'on peut récrire en utilisant la propriété d'antisymétrie de $\omega_{\mu\nu}$:

$$\delta \phi = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (x^{\nu} \partial^{\mu} - x^{\mu} \partial^{\nu}) \phi \quad (6.44)$$

et on notera

$$L^{\mu\nu} = x^{\nu} \partial^{\mu} - x^{\mu} \partial^{\nu} \quad (6.45)$$

qui est aussi antisymétrique. En utilisant les relations de correspondances $\mathbf{p} \rightarrow -i \nabla$, on voit qu'il s'agit du moment angulaire.

On utilisera les notations :

$$L^{ij} = x^j \partial^i - x^i \partial^j \quad (6.46a)$$

$$L^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L^{jk} \quad (6.46b)$$

$$K^i = L^{0i} \quad (6.46c)$$

Si on considère un champ ψ quelconque tel que

$$\delta \psi = \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \quad (6.47)$$

alors dans le cas général on a

$$J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} \quad (6.48)$$

$L^{\mu\nu}$ comporte des dérivées spatiales : il s'agit donc d'un opérateur spatial. Quant à lui, $S^{\mu\nu}$ correspond l'opérateur de spin, qui est entièrement interne. Il est nul pour un champ scalaire : celui-ci est donc de spin 0.

On peut calculer les relations de commutation suivantes :

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} \quad (6.49a)$$

$$[L^i, L^j] = \varepsilon^{ijk} L^k \quad (6.49b)$$

$$[K^i, K^j] = -\varepsilon^{ijk} L^k \quad (6.49c)$$

$$[L^i, K^j] = \varepsilon^{ijk} K^k \quad (6.49d)$$

Si on applique la formule (6.44) au lagrangien, alors on obtient :

$$\delta L = \partial^{\mu} (\omega_{\mu\nu} x^{\nu} \mathcal{L}) \quad (6.50)$$

car

$$\begin{aligned} \partial^{\mu} (\omega_{\mu\nu} x^{\nu} \mathcal{L}) &= \omega_{\mu\nu} (\partial^{\mu} x^{\nu}) \mathcal{L} + \omega_{\mu\nu} x^{\nu} \partial^{\mu} \mathcal{L} \\ &= \underbrace{\omega_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}}_{=0} \mathcal{L} + \omega_{\mu\nu} x^{\nu} \partial^{\mu} \mathcal{L} \\ &= \omega_{\mu\nu} x^{\nu} \partial^{\mu} \mathcal{L} \end{aligned}$$

On peut donc écrire que $\delta L = \partial_\mu J^\mu$ d'où

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \delta \phi \right) = \partial^\mu (\omega_{\mu\nu} x^\nu \mathcal{L})$$

d'où

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \delta \phi - \omega_{\mu\nu} x^\nu \mathcal{L} \right) = 0 \quad (6.51)$$

ce qu'on peut récrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \delta \phi - \omega_{\mu\nu} x^\nu \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \omega_{\rho\sigma} L^{\rho\sigma} \phi - \omega_{\mu\nu} x^\nu \mathcal{L} \\ &= \omega_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} L^{\rho\sigma} \phi - \delta_\mu^\rho x^\sigma \mathcal{L} \right) \\ &= \frac{\omega_{\rho\sigma}}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (x^\sigma \partial^\rho - x^\rho \partial^\sigma) \phi - (\delta_\mu^\rho x^\sigma - \delta_\mu^\sigma x^\rho) \mathcal{L} \right) \end{aligned}$$

Le courant conservé est donc

$$M_\mu{}^{\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} (x^\sigma \partial^\rho - x^\rho \partial^\sigma) \phi - (\delta_\mu^\rho x^\sigma - \delta_\mu^\sigma x^\rho) \mathcal{L} \quad (6.52)$$

On remarque que l'on a

$$M_\mu{}^{\rho\sigma} = x^\rho T_\mu{}^\sigma - x^\sigma T_\mu{}^\rho \quad (6.53)$$

La charge de la composante temporelle est

$$\Lambda^{\rho\sigma} = \int d^3 \mathbf{x} M_0{}^{\rho\sigma} \quad (6.54)$$

$M_0{}^{ij}$ correspond à la densité de moment angulaire.

7 Invariance de jauge et champs vectoriels

7.1 Transformation de jauge locale

Prenons le lagrangien

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \quad (7.1)$$

On considère la transformation de jauge locale

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{ie\theta(x)} \phi(x) \quad (7.2)$$

La constante e permet de considérer des champs différents.

La dérivée se transforme alors comme

$$\partial_\mu \phi \longrightarrow \partial_\mu (e^{ie\theta(x)} \phi) = e^{ie\theta(x)} \partial_\mu \phi + (ie \partial_\mu \theta) e^{ie\theta(x)} \phi \neq \partial_\mu \phi' \quad (7.3)$$

et le lagrangien n'est plus invariant. En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \partial_\mu \phi^{*'} \partial^\mu \phi' \\ &= \partial_\mu (e^{-ie\theta} \phi^*) \partial^\mu (e^{ie\theta} \phi) \\ &= e^{-ie\theta} (\partial_\mu \phi^* - (ie \partial_\mu \theta) \phi^*) e^{ie\theta} (\partial^\mu \phi + (ie \partial^\mu \theta) \phi) \\ &\approx \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - ie \partial_\mu \theta (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \end{aligned}$$

d'où

$$\delta \mathcal{L} = -ie (\partial_\mu \theta) (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (7.4)$$

On reconnaît le courant conservé pour une symétrie $U(1)$ globale :

$$J_G^\mu = -i (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (7.5)$$

L'idée est alors d'introduire un champ A_μ tel que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \quad (7.6)$$

On définit alors la dérivée covariante de ϕ , notée D_μ , par

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ie A_\mu) \phi \quad (7.7)$$

et dans ce cas on a bien

$$D_\mu \phi \rightarrow e^{ie\theta} D_\mu \phi \quad (7.8)$$

En remplaçant les dérivées par des dérivées covariantes dans un lagrangien (7.1), on obtient le lagrangien invariant

$$\mathcal{L}_{\phi,A} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \quad (7.9)$$

En développant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi,A} &= (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \\ &= (\partial_\mu + ie A_\mu) \phi^* (\partial^\mu - ie A_\mu) \phi - V(\phi^* \phi) \\ &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) - ie A_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) + e^2 \phi^* \phi A_\mu A^\mu \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L}_{\phi,A} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) + A_\mu J_G^\mu + \phi^* \phi A_\mu A^\mu \quad (7.10)$$

L'avant-dernier et le dernier termes correspondent à une interaction à trois champs et quatre champs respectivement.

$A^\mu = (V, \mathbf{A})$ correspond au champ électromagnétique. On a les relations

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.11a)$$

$$Q = \int d^3 \mathbf{x} J_G \quad (7.11b)$$

$$A_\mu J^\mu = A_0 J_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \equiv qv - q\mathbf{A}\mathbf{v} \quad (7.11c)$$

Pour une transformation locale, on a

$$J_\mu = -ie(\phi^* D_\mu \phi - \phi (D_\mu \phi)^*) \quad (7.12)$$

7.2 Équations pour le champ vectoriel

Il faut maintenant considérer le terme cinétique pour A_μ et obtenir le lagrangien qui décrit le système entier :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\phi,A} + \mathcal{L}_A \quad (7.13)$$

avec

$$\mathcal{L}_A = (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) \quad (7.14)$$

Toutefois \mathcal{L}_A n'est pas invariant par (7.6) :

$$\begin{aligned} (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) &\longrightarrow \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu) \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu) \\ &= (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu \partial^\nu \theta + \partial_\mu \partial_\nu \theta \partial^\mu \partial^\nu \theta \end{aligned} \quad (7.15)$$

On introduit alors le tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$ tel que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.16)$$

qui est invariant par (7.6) :

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu) = F_{\mu\nu} \quad (7.17)$$

Le seul lagrangien que l'on peut former avec $F_{\mu\nu}$ seulement est

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \quad (7.18)$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{\delta \partial_\mu A_\nu}{\delta \partial_\alpha A_\beta} = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \quad (7.19)$$

les équations d'Euler-Lagrange donnent

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (A_\beta)} = 0$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \left((\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) + \overset{\mu\leftarrow}{\rho\leftarrow\rightarrow\sigma} \right) \\ &= -\frac{2}{4} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha - \partial^\beta A^\alpha + \partial^\alpha A^\beta) \\ &= F^{\beta\alpha} = -F^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

d'où

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \quad (7.20)$$

Si on prend en compte le lagrangien total (7.13), alors on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(A_\beta)} = J_G^\beta \quad (7.21)$$

où J_G^β est un courant externe qui ne dépend pas de A_μ . On obtient alors

$$-\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J_G^\beta \quad (7.22)$$

Par définition de $F_{\mu\nu}$, l'identité dite de Bianchi est vérifiée :

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \quad (7.23)$$

qui se réécrit

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 \quad (7.24)$$

Montrons que les équations (7.22) et (7.24) redonnent les équations de Maxwell. On a

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V$$

soit

$$F_{0i} = (\mathbf{E})_i \quad (7.25)$$

Nous avons aussi

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \varepsilon^{ijk} \partial_i A_j$$

d'où

$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} (\mathbf{B})^k \quad (7.26)$$

Sous forme matricielle, on a

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

L'identité de Bianchi donne la première paire d'équations de Maxwell :

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (7.28a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (7.28b)$$

Considérons l'équation (7.22) :

$$\begin{aligned}\partial^\mu F_{\mu 0} &= \partial^i F_{i0} = \partial^i E_i = J_{G0} \\ \partial^\mu F_{\mu i} &= \partial^0 F_{0i} + \partial^j F_{ji} = \partial_0 E_i - \varepsilon_{ijk} \partial^j B^k = J_{Gi}\end{aligned}$$

ce qui donne le second jeu d'équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (7.29a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}_G \quad (7.29b)$$

Exemple 7.1 (Force de Lorentz).

On retrouve la force de Lorentz pour

$$\begin{cases} J^0 = q \delta(x' - x(t)) \\ \mathbf{J} = q \dot{\mathbf{x}} \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (7.30)$$

La variation de A_μ s'écrit :

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \theta(x) \quad (7.31)$$

et de fait

$$\delta F_{\mu\nu} = 0 \quad (7.32)$$

La variation de l'action du champ A_μ est

$$\begin{aligned}\delta \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right) &= \int d^4x (0 + \delta A_\mu J^\mu) \\ &= \int d^4x J^\mu \partial_\mu \theta \\ &= - \int d^4x \theta \partial_\mu J^\mu = 0\end{aligned}$$

d'où

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (7.33)$$

Cette équation peut aussi se déduire de l'équation du mouvement (7.22) :

$$-\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J_G^\nu = 0$$

car $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique.

7.3 Degrés de liberté du champ vectoriel

7.3.1 Transformations de jauge

Considérons à nouveau l'équation de champ (7.20)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (7.20)$$

On obtient pour le champ A_μ :

$$\square A_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) = 0 \quad (7.34)$$

Le champ A_μ possède trop de degrés de liberté et tous ne sont pas physiques. L'invariance de jauge permet de réduire ce nombre de degrés de liberté. En effet, on peut prendre α tel que

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \quad (7.35)$$

avec A'_μ qui vérifie (jauge de Lorentz)

$$\partial_\mu A'^\mu = 0 \quad (7.36)$$

et dans ce cas l'équation (7.34) se réduit à

$$\square A'_\mu = 0 \quad (7.37)$$

Par exemple, soit B tel que

$$\partial_\mu A^\mu = B \quad (7.38)$$

Dans ce cas

$$\partial_\mu A'^\mu = B + \square \alpha \quad (7.39)$$

et la condition (7.36) est vérifiée si

$$\square \alpha = -B \quad (7.40)$$

et alors

$$\alpha(x) = - \int d^4 x' G_{\square}(x, x') B \quad (7.41)$$

Une solution de l'équation (7.37) dans l'espace de Fourier est

$$A'_\mu(p) = \varepsilon_\mu(p) e^{-ipx} + \text{c.c.} \quad (7.42)$$

avec la condition

$$p_\mu p^\mu = 0 \quad (7.43)$$

et où ε_μ est le vecteur de polarisation.

La jauge de Lorentz (7.36) donne comme condition :

$$\partial_\mu A'^\mu = ip^\mu (\varepsilon_\mu(p) e^{ipx} - \text{c.c.}) = 0 \quad (7.44)$$

d'où

$$p^\mu \varepsilon_\mu(p) = 0 \quad (7.45)$$

Pour chaque p il existe trois vecteurs $\{\varepsilon_\mu^i\}_{i=1,2,3}$ formant la base d'un espace qui lui est orthogonal :

$$p^\mu \varepsilon_\mu^i = 0 \quad (7.46a)$$

$$\varepsilon_\mu^i \varepsilon^{j\mu} = \delta_{ij} \quad (7.46b)$$

La solution générale s'obtient en sommant sur tous les modes :

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} \sum_{i=1}^3 (a_i(p) \varepsilon_\mu^i(p) e^{-ipx} + \text{c.c.}) \quad (7.47)$$

Exemple 7.2 (Impulsion selon z).

Si $p^\mu = (p, 0, 0, p)$, alors

$$\begin{cases} \varepsilon^1 = (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon^2 = (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon^3 = (1, 0, 0, -1) \end{cases} \quad (7.48)$$

Il est possible d'avoir

$$A''_\mu = A'_\mu + \partial_\mu \alpha' \quad (7.49)$$

tout en gardant la première transformation de jauge (7.35). Pour obtenir l'équation de jauge similaire à (7.36) :

$$\partial_\mu A''^\mu = \partial_\mu A'^\mu + \square \alpha' = 0$$

on doit avoir

$$\square \alpha' = 0 \quad (7.50)$$

ce qui est réalisable. Cherchons maintenant la condition pour obtenir la jauge de Coulomb (ou transverse) :

$$\nabla \mathbf{A}'' = 0 \quad (7.51)$$

Soit C tel que

$$\nabla \mathbf{A}' = C \quad (7.52)$$

alors

$$\nabla \mathbf{A}'' = C + \nabla^2 \alpha' = 0 \quad (7.53)$$

ce qui donne la condition

$$\nabla^2 \alpha' = -C \quad (7.54)$$

qui admet une solution unique.

La jauge de Coulomb (7.51) donne la relation :

$$p_i \varepsilon^i(p) = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (7.55)$$

soit

$$\boldsymbol{\varepsilon} = a_1 \varepsilon^1 + a_2 \varepsilon^2 \quad (7.56)$$

Il s'agit d'une propagation transverse.

Finalement on a :

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} \sum_{i=1}^2 (a_i(p) \varepsilon_\mu^i(p) e^{-ipx} + \text{c.c.}) \quad (7.57)$$

Si $a_i(p)$ et $\varepsilon(p)$ deviennent des opérateurs, alors on peut écrire un état comme :

$$|\mathbf{p}, \boldsymbol{\varepsilon}\rangle = \hat{a}_p^\dagger \hat{\varepsilon}_p |0\rangle \quad (7.58)$$

7.3.2 Formalisme hamiltonien

À chaque degré de liberté correspond un couple (ϕ, π) . Le moment conjugué du champ A_μ est

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \quad (7.59)$$

Le développement du lagrangien (7.18) donne :

$$\begin{aligned} &= 1 \frac{1}{2 \sum_{i,j} \partial_i A_j \partial_j A_i + \frac{1}{2} \sum_i (\dot{A}_i^2 - (\nabla A_i)^2 - 2 \dot{A}_i \partial_i A_0) + \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2} \\ \mathcal{L}_F &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu = -\frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial^i A^0 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\pi^0 = 0 \quad (7.60a)$$

$$\pi^i = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \quad (7.60b)$$

L'équation

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = 0 \quad (7.61)$$

est équivalente à

$$\begin{aligned} -\nabla^2 A_0 + \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} &= J_0 \\ \nabla(-\nabla A_0 - \dot{\mathbf{A}}) &= \rho \end{aligned}$$

soit

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (7.62)$$

De même, l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} \quad (7.63)$$

donne

$$\ddot{A}_i - \partial_t \partial_i A_0 = \nabla^2 A_i - J^i - \partial_i \partial_j A^j$$

soit

$$\ddot{A}_i - \nabla^2 A_i + \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{A} - \dot{A}_0) = -J^i \quad (7.64)$$

On décompose \mathbf{A} en une partie transverse et une partie longitudinale :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t + \nabla A \quad (7.65)$$

avec

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^t = 0 \quad (7.66)$$

et A un scalaire. Dans ce cas

$$\partial_i A_i = \nabla^2 A \quad (7.67)$$

et

$$A(x) = \int G_{\nabla^2} \nabla \mathbf{A} \equiv (\nabla^2)^{-1} \partial_i A_i \quad (7.68)$$

La partie transverse vaut

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A} - \nabla \int G \nabla \mathbf{A} \quad (7.69)$$

L'équation de Gauss se récrit

$$-\nabla^2 A_0 + \nabla^2 \dot{A} = \rho \quad (7.70)$$

d'où

$$-A_0 + \dot{A} = \int G \rho \quad (7.71)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \ddot{A}_i^t - \nabla^2 A_i^t + \partial_i \ddot{A} - \partial_i \nabla^2 A + \partial_i (\nabla^2 A - \dot{A}_0) &= -J^i \\ \ddot{A}_i^t - \nabla^2 A_i^t + \partial_i \ddot{A} + \partial_i \dot{A}_0 &= -J^i \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\ddot{A}_i^t - \nabla^2 A_i^t = -J_i - \partial_i \partial_t \int G \rho \quad (7.72)$$

qui se met formellement sous la forme

$$\square A_i^t = f_i(\mathbf{J}, \rho) \quad (7.73)$$

Les variables A_0 et \mathbf{A} se partagent en deux catégories :

- variables dynamiques : \mathbf{A}^t , avec $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}^t = 0$.
- variables non dynamique : A .

Sous la transformation de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$, on a

$$A_i^t + \partial_i A \longrightarrow A_i^t + \partial_i A + \partial_i \alpha \quad (7.74)$$

et donc

$$\begin{cases} A_i^t \rightarrow A_i^t \\ A \rightarrow A + \alpha \end{cases} \quad (7.75)$$

Seule la partie transverse est invariante de jauge. Ce qui change sous la transformation peut être considéré comme des multiplicateurs de Lagrange, soit des paramètres arbitraires, puisque leur valeur ne doit pas influencer la physique. Toutefois, une telle décomposition fait perdre la covariance explicite, puisque \mathbf{A}^t dépend de l'orientation de \mathbf{p} . Il est impossible d'écrire une théorie invariante de Lorentz locale avec uniquement des variables dynamiques : il est nécessaire d'ajouter des variables non invariantes de jauge.

7.4 Champ vectoriel massif

Dans le cas d'un champ vectoriel massif, le lagrangien pour A_μ est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \quad (7.76)$$

qui donne l'équation du mouvement (dite équation de Proca)

$$-\partial^\mu F_{\mu\nu} = m^2 A_\nu \quad (7.77)$$

soit

$$(\square + m^2)A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = 0 \quad (7.78)$$

Le passage dans l'espace de Fourier donne

$$p_\mu p^\mu = m^2 \quad (7.79)$$

Le lagrangien (7.76) n'est pas invariant de jauge :

$$\delta(A_\mu A^\mu) = A^\mu \partial_\mu \alpha \quad (7.80)$$

Il est ainsi impossible d'utiliser une condition de jauge pour réduire le nombre de degrés de liberté. Toutefois on a la relation

$$-\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = m^2 \partial^\nu A_\nu = 0$$

et ainsi la relation

$$\partial^\nu A_\nu = 0 \quad (7.81)$$

reste valable. On obtient donc l'équation du mouvement

$$(\square + m^2)A_\mu = 0 \quad (7.82)$$

Encore une fois nous obtenons

$$p^\mu \varepsilon_\mu^i = 0 \quad (7.83)$$

et alors

$$A_\mu(p) = \sum_{i=1}^3 (a_i(p) \varepsilon_\mu^i(p) e^{-ipx} + \text{c.c.}) \quad (7.84)$$

Le champ possède alors trois polarisations.

Exemple 7.3.

Si $p^\mu = (E, 0, 0, p)$, alors

$$\begin{cases} \varepsilon^1 = (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon^2 = (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon^3 = (E, 0, 0, -p) \end{cases} \quad (7.85)$$

7.5 Spin du champ vectoriel

Étudions la transformation de Lorentz du champ A_μ :

$$\begin{aligned} A'_\mu(x') &= \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \\ A'_\mu(x_\rho + \omega_\rho{}^\sigma x_\sigma) &= (\delta_\mu{}^\nu + \omega_\mu{}^\nu) A_\nu(x) \\ A'_\mu(x) + \omega_\rho{}^\sigma x_\sigma \partial^\sigma A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \omega_\mu{}^\nu A_\nu(x) \end{aligned}$$

et on note que

$$\delta x_\rho = \omega_\rho{}^\sigma x_\sigma \quad (7.86)$$

On en déduit alors que

$$\delta A_\mu(x) = \omega_\mu{}^\nu A_\nu(x) - \omega_\rho{}^\sigma x_\sigma \partial^\sigma A_\mu(x) \quad (7.87)$$

soit, en symétrisant cette expression :

$$\delta A_\mu(x) = \frac{\omega_{\rho\sigma}}{2} \left((x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho) A_\mu + (\delta_\mu{}^\rho \delta_\nu{}^\sigma - \delta_\mu{}^\sigma \delta_\nu{}^\rho) A^\nu \right) \quad (7.88)$$

En définissant δA_μ comme

$$\delta A_\mu(x) = \frac{\omega_{\rho\sigma}}{2} [J^{\rho\sigma}]_\mu{}^\nu A_\nu \quad (7.89)$$

on obtient

$$[J^{\rho\sigma}]_\mu{}^\nu = L^{\rho\sigma} \delta_\mu{}^\nu + [S^{\rho\sigma}]_\mu{}^\nu \quad (7.90)$$

où

$$[S^{\rho\sigma}]_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\rho \delta_\nu{}^\sigma - \delta_\mu{}^\sigma \delta_\nu{}^\rho \quad (7.91)$$

On peut définir un vecteur \mathbf{S} tel que

$$S_i = \varepsilon_{ijk} S^{jk} \quad (7.92)$$

Par exemple on a

$$S_z = S^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.93)$$

Cherchons les valeurs propres de S_z :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & i & 0 \\ 0 & -i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (-\lambda)^2 (\lambda^2 - 1) = 0$$

d'où

$$\lambda = 0, \pm 1 \quad (7.94)$$

Le champ A_μ est donc de spin 1.

7.6 Fonction de Green pour le champ vectoriel

Considérons l'équation de Proca avec source :

$$(\square + m^2)A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = J_\nu \quad (7.95)$$

Dans l'espace de Fourier, cette équation devient

$$-p_\mu p^\mu \tilde{A}_\nu + m^2 \tilde{A}_\nu + p_\nu p_\mu \tilde{A}^\mu = \tilde{J}_\nu$$

soit

$$((-p^2 + m^2)\eta_{\mu\nu} + p_\nu p_\mu) \tilde{A}^\mu = \tilde{J}_\nu \quad (7.96)$$

et on notera l'opérateur $D_{\mu\nu}$:

$$D_{\mu\nu} = (-p^2 + m^2)\eta_{\mu\nu} - p_\nu p_\mu \quad (7.97)$$

Soit $G^{\nu\rho}$ la fonction de Green ⁷ :

$$D_{\mu\nu} G^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \quad (7.98)$$

Multiplions l'équation précédente par p^μ :

$$\begin{aligned} ((-p^2 + m^2)p_\nu + p_\nu p^2) G^{\nu\rho} &= p^\rho \\ m^2 p_\nu G^{\nu\rho} &= p^\rho \end{aligned}$$

et on peut injecter cette solution dans la même équation :

$$(-p^2 + m^2)\eta_{\mu\nu} G^{\nu\rho} + \frac{p_\mu p^\rho}{m^2} = \delta_\mu^\rho$$

ce qui donne

$$G^{\nu\rho} = \frac{\eta^{\nu\rho} - p^\nu p^\rho / m^2}{p^2 - m^2} \quad (7.99)$$

Toutefois, cette équation pose problème pour $m^2 = 0$: en effet, la fonction de Green propage toutes les composantes de A_μ , mais cela n'a pas de sens pour A_0 . La relation précédente donne (en multipliant à la deuxième ligne par p^μ) :

$$\begin{aligned} (-p^2 \eta_{\mu\nu} + p_\nu p_\mu) G^{\nu\rho} &= \delta_\mu^\rho \\ \underbrace{(-p^2 p_\nu + p_\nu p^2)}_{=0} G^{\nu\rho} &= p^\rho \end{aligned}$$

Ainsi l'hypothèse que $D_{\mu\nu}$ est inversible est fautive car elle possède un vecteur propre nul : $D_{\mu\nu} p^\mu = 0$. La solution consiste à utiliser l'invariance de jauge :

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad p_\mu \tilde{A}^\mu = 0 \quad (7.100)$$

Dans ce cas on obtient

$$-p^2 \eta_{\mu\nu} \tilde{A}^\mu + \underbrace{p_\nu p_\mu \tilde{A}^\mu}_{=0} = \tilde{J}_\nu$$

7. On remarque que la fonction de Green contient toujours deux fois plus de variables.

d'où

$$-p^2 \eta_{\mu\nu} G^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \quad (7.101)$$

soit au final

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} \quad (7.102)$$

On voudrait avoir

$$p^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (7.103)$$

et dans ce cas

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{p_\mu p_\nu / p^2}{p^2} \quad (7.104)$$

car

$$G_{\mu\nu} = p^2 \Pi_{\mu\nu} \quad (7.105)$$

où Π est le projecteur orthogonal à p :

$$\Pi = \begin{cases} 0 & \mathbf{v} \parallel \mathbf{p} \\ 1 & \mathbf{v} \perp \mathbf{p} \end{cases} \quad (7.106)$$

Ce dernier n'est inversible que dans le sous-espace où il projette. On a les relations

$$\Pi^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad (7.107a)$$

$$\Pi^2 = \Pi \quad (7.107b)$$

$$\Pi^{\mu\nu} \Pi_\nu^\rho = \Pi^{\mu\rho} \quad (7.107c)$$

$$\Pi^{\mu\nu} p_\nu = 0 \quad (7.107d)$$

Soit V_μ tel que $p^\mu V_\mu = 0$, alors

$$\Pi^{\mu\nu} V_\mu = \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) V_\mu = p^\nu \quad (7.108)$$

Sur l'espace orthogonal à p_μ on a

$$(\Pi^{-1})^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \quad (7.109)$$

8 Brisures de symétries

8.1 Brisure explicite de symétrie

Considérons le lagrangien

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (8.1)$$

L'invariance sous $U(1)$ conduit au courant conservé

$$j^\mu = -i \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (8.2)$$

Ajoutons alors un terme qui brise explicitement la symétrie :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mu^2 (\phi + \phi^*)^2 \quad \mu^2 \ll m^2 \quad (8.3)$$

Nous avons vu que nous avons $\partial^\mu J_\mu = \delta \mathcal{L}$. Ainsi on peut voir de quelle manière le courant n'est pas conservé lorsqu'un terme brise la symétrie. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L}_0 + (e^{i\theta} \phi + e^{-i\theta} \phi^*)^2 \\ &= \mathcal{L}_0 + \mu^2 (e^{2i\theta} \phi^2 + e^{-2i\theta} \phi^{*2} + 2\phi\phi^*) \end{aligned}$$

et en faisant un développement limité, on obtient

$$\delta \mathcal{L} = \mu^2 (2i\theta \phi^2 - 2i\theta \phi^{*2}) \quad (8.4)$$

d'où

$$\partial_\mu J^\mu = 2i\mu^2 (\phi^2 - \phi^{*2}) \quad (8.5)$$

En choisissant la valeur de μ on peut paramétriser la violation.

8.2 Brisure globale de symétrie, théorème de Goldstone

Une particule correspond à une excitation élémentaire d'un champ autour d'une certaine configuration (solution de vide, minimum). Sous l'action d'une symétrie, une solution ϕ_1 se transforme en une solution $\phi_2 \neq \phi_1$. Ainsi, pour une solution de vide, si $\phi_0 \rightarrow \phi'_0 = \phi_0$, alors le vide préserve la symétrie.

Exemple 8.1.

Soit le lagrangien

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2 \quad (8.6)$$

qui donne l'équation du mouvement

$$\square \phi - m^2 \phi + \lambda \phi^* \phi^2 = 0 \quad (8.7)$$

Les solutions de vide sont

$$\phi_0 = 0 \quad (8.8)$$

et $|\phi_0|^2 = \frac{m^2}{\lambda}$, soit

$$\phi_\alpha = e^{i\alpha} \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \quad (8.9)$$

Alors on a $\phi_0 \rightarrow e^{i\theta} \phi_0 = \phi_0$ qui est invariant, mais $\phi_\alpha \rightarrow e^{i\theta} \phi_\alpha = \phi_{\alpha+\theta} \neq \phi_\alpha$.

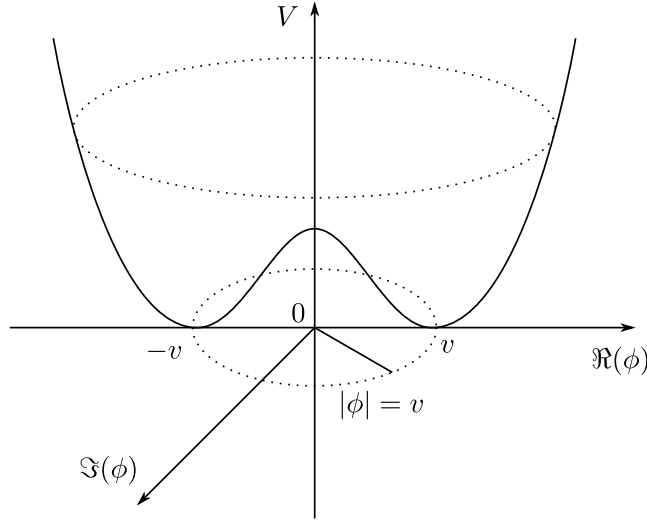


FIGURE 9 – Potentiel (8.11).

Une symétrie $O(2)$ pour le lagrangien de Klein–Gordon libre entraîne une dégénérescence du spectre de masse.

Exemple 8.2 (Potentiel en chapeau mexicain).

Considérons le lagrangien

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \quad (8.10)$$

avec

$$V = \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (8.11)$$

présenté sur la figure 9.

Ce lagrangien est invariant par la transformation globale $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$. Toutefois, le système, à temps long, choisit dynamiquement un état non symétrique par $U(1)$: une configuration en $\phi = 0$ va "tomber" dans un minimum (puisque $\phi = 0$ est instable).

Plaçons nous dans le vide $\bar{\phi} = v$. Écrivons un petit déplacement en dehors de cette position :

$$\phi(x) = v(1 + \rho(x)) e^{i\alpha(x)} \quad \alpha, \rho \in \mathbb{R} \quad (8.12)$$

Pour $\phi = \bar{\phi}$, on a $\alpha = \rho = 0$.

On a

$$\partial_\mu \phi = v(\partial_\mu \rho + i \partial_\mu \alpha (1 + \rho)) e^{i\alpha}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\partial_\mu \phi|^2 &= v^2 (\partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + (1 + \rho)^2 \partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha) \\ &\approx v^2 \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + v^2 \partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha + O(\rho \alpha^2) \end{aligned}$$

et

$$V = \frac{\lambda}{2} (v^2 (1 + \rho)^2 - v^2)^2 = 2\lambda v^4 \rho^2 + O(\rho^4) \quad (8.13)$$

On obtient donc le lagrangien

$$\mathcal{L}_{fluc} = v^2(\partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha) - 2\lambda v^4 \rho^2 + \text{interactions} \quad (8.14)$$

Ainsi, α correspond à un champ de masse nulle tandis que ρ possède une masse $2\lambda v^2$.

Théorème de Goldstone : Pour chaque symétrie globale brisée, il existe une particule de masse nulle associée, appelée boson de Goldstone.

Démontrons ce théorème. Soit le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V(\phi_i) \quad (8.15)$$

On considère une transformation continue linéaire

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = U(\theta)_i^j \phi_j \quad (8.16)$$

telle que

$$U(0) = 1 \quad (8.17a)$$

$$U(\varepsilon) = 1 + \varepsilon T + O(\varepsilon^2) \quad (8.17b)$$

On obtient l'invariance pour les dérivées :

$$\begin{aligned} \sum_i \partial_\mu \phi'_i \partial^\mu \phi'_i &= \partial_\mu \phi_k \underbrace{U_i^k U_i^\ell}_{=\delta^{k\ell}} \partial^\mu \phi_\ell \\ &= \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à $U^\dagger U = 1$, soit $U \in O(N)$.

Écrivons maintenant la condition d'invariance du potentiel

$$V(\phi'_i) = V(\phi_i + \varepsilon T_i^j \phi_j) = V(\phi_i) \quad (8.18)$$

dans le vide

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = 0 \quad (8.19)$$

Cette condition donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_k} (V(\phi_i + \varepsilon T_i^j \phi_j) - V(\phi_i)) &= O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_\ell}(\phi_i + \varepsilon T_i^j \phi_j) (\delta_\ell^k + \varepsilon T_\ell^k) - \frac{\partial V}{\partial \phi_k} &= O(\varepsilon^2) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \phi_\ell}(\phi_i) + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_\ell \partial \phi_m} \varepsilon T_m^j \phi_j \right) (\delta_\ell^k + \varepsilon T_\ell^k) - \frac{\partial V}{\partial \phi_k} &= O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

soit en prenant le point $\phi = \bar{\phi}$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_\ell \partial \phi_m} \varepsilon T_m^j \bar{\phi}_j (\delta_\ell^k + \varepsilon T_\ell^k) + \frac{\partial V}{\partial \phi_\ell}(\bar{\phi}_i) \varepsilon T_\ell^k = O(\varepsilon^2)$$

ce qui donne l'équation aux valeurs propres (en tenant compte de la condition d'équilibre)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_m} T_m^j \bar{\phi}_j = 0 \quad (8.20)$$

or comme par hypothèse $T_m^j \bar{\phi}_j \neq 0$, on a forcément

$$m_{mk} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_m} = 0 \quad (8.21)$$

ce qui démontre le théorème.

Pour un groupe à plusieurs paramètres ($A = 1, \dots, n$), on a

$$\phi_i \longrightarrow \phi_i + \varepsilon^A T_i^A{}^j \phi_j \quad (8.22)$$

S'il existe k ensemble $\{\varepsilon^A\}$ tels que $\varepsilon^A T_i^A{}^j \bar{\phi}_j = 0$, alors il reste k symétries résiduelles et $n - k$ symétries sont brisées. Il y aura donc $n - k$ bosons de Goldstone.

Un mode de Goldstone se déplace dans le sens de la symétrie, ce qui ne coute pas d'énergie.

Exemple 8.3 (Symétrie résiduelle de $SO(3)$).

Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{R}^3$ qui se transforme par $R \in SO(3) : \phi \rightarrow R\phi$. Soit le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^t \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \quad (8.23)$$

Le vide est donné par $|\phi|^2 = v^2$. Considérons le vide $\phi_0 = (0, 0, v)$. Alors la symétrie résiduelle est $SO(2) : \phi_0 \rightarrow R_2 \phi_0$ avec

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

$SO(3)$ possède trois générateurs $L^a = \{L^1, L^2, L^3\}$ et $SO(2)$ un seul : L^3 . Il y aura donc $3 - 1 = 2$ bosons de Goldstone, qui sont générés par les générateurs qui ne laissent pas le vide invariant.

Idée du calcul : il faut introduire autant de vecteurs que de générateurs (un courant pour chaque paramètre, à coupler) : $\sum_{a=1}^3 J^{a\mu} A_\mu^a$ et

$$\partial_\mu \phi \longrightarrow D_\mu \phi - \sum_{a=1}^3 (L^a A_\mu^a) \phi \quad (8.25)$$

8.3 Brisure locale de symétrie, mécanisme de Higgs

Dans le cas d'une brisure locale de symétrie, il n'y a pas de boson de Goldstone, mais A_μ prend une masse.

Reprenons le lagrangien de la QED scalaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi^* \phi) \\ &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + iq A_\mu (\partial^\mu \phi) \phi^* + \text{c.c.} + q^2 \phi^* \phi A_\mu A^\mu - V(\phi^* \phi) \end{aligned} \quad (8.26)$$

avec

$$V = \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - v^2)^2 \quad (8.27)$$

Les solutions de vide sont données par

$$|\phi_0| = v \quad (8.28)$$

Le système est invariant de jauge

$$\begin{cases} A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta(x) \\ \phi \rightarrow e^{iq\theta(x)} \phi \end{cases} \quad (8.29)$$

On choisit une jauge telle que ϕ soit réel : $\phi(x) = \sqrt{2}\rho(x) e^{i\psi(x)} \rightarrow \rho(x)$ en prenant $q\theta = -\psi$. Il s'agit de la jauge unitaire. Dans ce cas le vide correspond à $\rho_0 = v$.

Une fluctuation autour du vide s'écrit

$$\rho(x) = v + h(x) \quad h \ll v \quad (8.30)$$

et injectons ce résultat dans le lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \underbrace{iq A_\mu (\partial^\mu \rho)}_{=0} \rho + \text{c.c.} + q^2 \rho^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2} (\rho^2 - v^2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{q^2}{2} (2v^2 + 2\sqrt{2}vh + h^2) A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2} \left(v^2 + \sqrt{2}vh + \frac{h^2}{2} - v^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \lambda v^2 h^2 + O(h^3) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + q^2 v^2 A_\mu A^\mu + O(hA^2) + O(h^2A^2) \end{aligned}$$

Le spectre contient donc :

- un champ scalaire réel de masse $m^2 = 2\lambda v^2$ (un degré de liberté) ;
- un champ vectoriel de masse $m^2 = 2q^2 v^2$ (trois degrés de liberté).

Le champ vectoriel, initialement avec deux degrés de liberté, a récupéré un des deux degrés de liberté du champ complexe.

Soit un lagrangien invariant sous un groupe G . Alors on observe une symétrie résiduelle si le vide considéré est invariant par un sous-groupe $H \subset G$ non réduit à l'identité.

Exemple 8.4 (Symétrie résiduelle $SO(3)$ locale).

Basons nous sur l'exemple 8.3 et la symétrie $SO(3)$. Dans le cas d'une symétrie locale, il n'y aura pas de bosons de Goldstone. À la place, le spectre contiendra :

- un champ scalaire massif ;
- deux champs vectoriels (A_μ^1, A_μ^2) massifs et chargés ;
- deux champs vectoriels A_μ^3 massifs et neutre.

A_μ^1 et A_μ^2 se transforment entre eux par

$$\begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

On définit

$$A^+ = A^1 + iA_2 \quad A^- = A^1 - iA_2 \quad A^+ \rightarrow e^{i\theta} A^+ \quad A^- \rightarrow e^{i\theta} A^- \quad (8.32)$$

Exemple 8.5 ("Unification" électrofaible).

On considère un système invariant par $SU(2) \times U_\gamma(1)$ de générateurs respectifs τ^a ($a = 1, 2, 3$) et γ où τ^a sont les matrices de Pauli. Les quatre bosons associés sont notés A_μ^a et γ_μ .

Soit $H = (\phi_1, \phi_2)$, alors

$$SU(2) : H \rightarrow UH$$

$$U_\gamma(1) : H \rightarrow e^{iq\theta} H$$

où $q = 1/2$ est l'hypercharge. Soit

$$V = \frac{\lambda}{2}(H^\dagger H - v^2)^2 \quad (8.33)$$

et le vide est $H_0^\dagger H_0 = v^2$. On considère le vide $H_0 = (0, v)$. Les symétries $SU(2)$ et $U_\gamma(1)$ ne préserve pas le vide, mais cherchons un sous-groupe de $SU(2) \times U_\gamma(1)$ qui le fasse :

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \times e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Et $U(1) \equiv \tau^3 + \gamma$. Les champs vectoriels d'origine se combinent :

$$A_\mu = A_\mu^3 + \gamma_\mu \quad (8.35a)$$

$$Z_\mu = A_\mu^3 - \gamma_\mu \quad (8.35b)$$

$$W_\mu^\pm = A_\mu^1 \pm iA_\mu^2 \quad (8.35c)$$

Le premier est neutre et sans masse, le second neutre et massif, et les deux derniers chargés et massifs ($q = \pm 1$, $m^2 = gv^2$). Le champ H qui contenait à la base quatre degrés de liberté devient un champ scalaire $(0, v + h)$: il s'agit du champ de Higgs et $m_H = \lambda v^2$.

9 Théories de jauge non abéliennes

Nous avons vu qu'un champ se transformant par $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$ conduit à l'apparition d'un champ de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha$. Une telle transformation appartient au groupe abélien $U(1)$.

Un groupe G est dit abélien si, pour $u(\alpha), u(\beta) \in G$, on a

$$u(\alpha)u(\beta) = u(\beta)u(\alpha) = u(\alpha + \beta) \quad (9.1)$$

c'est à dire que l'action sur le champ ϕ est

$$u(\alpha)u(\beta)\phi = u(\beta)u(\alpha)\phi \quad (9.2)$$

Au contraire, un groupe G' n'est pas abélien si pour $U_1, U_2 \in G'$, on a

$$U_1U_2 \neq U_2U_1 \quad (9.3)$$

Notons que l'on a toujours les propriétés qui définissent un groupe :

$$U_1U_2 \in G' \quad 1 \in G' \quad \exists U^{-1} \mid U^{-1}U = UU^{-1} = 1 \quad (9.4)$$

9.1 Symétrie $U(2)$

Les champs $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{C}^2$ se transforment par

$$\phi' = M\phi \quad (9.5)$$

où on note

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (9.6)$$

Prenons comme lagrangien

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi_1^*\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2^*\partial^\mu\phi_2 = (\partial_\mu\phi)^\dagger\partial^\mu\phi \quad (9.7)$$

avec

$$\phi^\dagger = (\phi_1^* \quad \phi_2^*) \quad (9.8)$$

qui se transforme comme

$$\phi^\dagger \longrightarrow M\phi^\dagger = \phi^\dagger M^\dagger \quad (9.9)$$

Le lagrangien devient ainsi

$$\mathcal{L} \longrightarrow (\partial_\mu\phi)^\dagger M^\dagger M \partial^\mu\phi \quad (9.10)$$

Pour avoir l'invariance du lagrangien, il faut que

$$M^\dagger M = 1 \iff M \in U(2) \quad (9.11)$$

Cela signifie que

$$M^{-1} = M^\dagger \quad (9.12)$$

On peut démontrer que $U(2)$ est bien un groupe. En effet, soit $U_1, U_2 \in U(2)$, alors

$$U_1U_2^\dagger U_1U_2 = U_2^\dagger U_1^\dagger U_1U_2 = 1$$

Le déterminant de $U \in U(2)$ vaut :

$$\begin{aligned}\det(U^\dagger U) &= \det 1 \\ \det U^\dagger \det U &= 1 \\ |\det U|^2 &= 1\end{aligned}$$

soit

$$\det U = e^{i\theta} \quad (9.13)$$

On peut décomposer toute matrice U de $U(2)$ comme

$$U = U_f(\theta) U_s \quad (9.14)$$

où

$$U_f(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} = e^{i\theta/2} \text{id} \quad \det U_s = 1 \quad (9.15)$$

La relation

$$\begin{aligned}\det U &= \det U_f \det U_s = \det U_f \\ &= e^{i\theta}\end{aligned}$$

donne

$$U_f(\theta) = \sqrt{\det U} \text{id} \quad (9.16a)$$

$$U_s = \frac{U}{\sqrt{\det U}} \quad (9.16b)$$

Le groupe $SU(2)$ est défini comme

$$SU(2) = \{U_s \in U(2) \mid \det U_s = 1\} \quad (9.17)$$

On a donc

$$U(2) = U(1) \times SU(2) \quad (9.18)$$

Ce groupe n'est donc pas simple car il est composé de deux sous-groupes : un abélien et l'autre non abélien.

9.2 Symétrie $SU(2)$

Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ deux champs complexes intervenant dans le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi) \quad (9.19)$$

et soit $U \in SU(2)$ (6.4) :

$$U^\dagger U = 1 \quad \det U = 1 \quad (9.20)$$

On note $\phi' = U\phi$.

Considérons une petite transformation :

$$\begin{cases} U = 1 + \varepsilon \omega & \varepsilon \ll 1 \\ \phi' = \phi + \varepsilon \delta \phi \end{cases} \quad (9.21)$$

U dépend de trois paramètres : il existera donc trois courants conservés

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i^*)} \delta \phi_i^* \quad (9.22)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= (1 + \varepsilon \omega)^\dagger (1 + \varepsilon \omega) \\ &= (1 + \varepsilon \omega^\dagger)(1 + \varepsilon \omega) \\ &\approx 1 + \varepsilon(\omega^\dagger + \omega) = 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\omega^\dagger = -\omega \quad (9.23)$$

et ω est antihermitique. Calculons maintenant le déterminant :

$$\det(1 + \varepsilon \omega) \approx 1 + \varepsilon \operatorname{tr} \omega = 1$$

d'où

$$\operatorname{tr} \omega = 0 \quad (9.24)$$

La matrice la plus générale répondant à ces conditions est :

$$\omega = \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \quad x, y, z \in \mathbb{R} \quad (9.25)$$

On peut décomposer cette matrice en utilisant les matrices de Pauli σ^a ($a = 1, 2, 3$) :

$$\omega = i \left[x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (9.26)$$

En notant λ^a les paramètres, on a la notation compacte :

$$\omega = i \lambda^a \sigma^a \quad \lambda^a \in \mathbb{R} \quad (9.27)$$

ω appartient à l'algèbre de Lie $su(2)$, qui possède les propriétés suivantes ($\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in su(2)$) :

- $\omega_1 + \lambda \omega_2 \in su(2)$.
- $[\omega_1, \omega_2] \in su(2)$.
- $[\omega_1, [\omega_2, \omega_3]] + \text{cycliques} = 0$ (identité de Jacobi).

où $[\omega_1, \omega_2]$ est le commutateur de ω_1 et ω_2 , défini par

$$[\omega_1, \omega_2] = \omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1 \quad (9.28)$$

Le lien entre $su(2)$ et $SU(2)$ se fait par exponentiation :

$$U = e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \omega^n \quad (9.29)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} (e^{i\omega})^\dagger &= e^{-i\omega^\dagger} = e^{-i\omega} \\ (e^{i\omega})^\dagger e^{i\omega} &= 1 \\ \det e^{i\omega} &= e^{i \operatorname{tr} \omega} = 1 \end{aligned}$$

D'une manière plus explicite, on a donc

$$U = \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{a=1}^3 \lambda_a \sigma^a\right) \quad (9.31)$$

Pour les matrices de Pauli, on a les propriétés suivantes :

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\varepsilon^{abc} \sigma^c \quad (9.32a)$$

$$\sigma^t = \sigma^* \quad (9.32b)$$

La variation du champ sera donc

$$\begin{cases} \delta \phi_i = i\sigma_{ij}^a \phi_j \\ \delta \phi_i^* = -i(\sigma_{ij}^a \phi_j)^* = -i\phi_j^* \sigma_{ji}^a \end{cases} \quad (9.33)$$

et donc on obtient les trois courants :

$$\begin{aligned} J_\mu^a &= \partial_\mu \phi_i^* (i\sigma_{ij}^a \phi_j) - \partial_\mu \phi_i (i\phi_j^* \sigma_{ji}^a) \\ &= i((\partial_\mu \phi^\dagger)_i \sigma_{ij}^a \phi_j - \phi_j^* \sigma_{ji}^a (\partial_\mu \phi)_i) \end{aligned}$$

d'où

$$J_\mu^a = i(\partial_\mu \phi^\dagger \sigma^a \phi - \phi^\dagger \sigma^a \partial_\mu \phi) \quad (9.34)$$

Considérons le cas où $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$ et $\lambda^3 = \varepsilon$. Dans ce cas on a

$$\begin{cases} \delta \phi_1 = i\phi_1 \\ \delta \phi_2 = -i\phi_2 \end{cases} \quad (9.35)$$

On peut alors définir une transformation de $U(1)$:

$$\begin{cases} \phi_1 \rightarrow e^{i\varepsilon} \phi_1 \\ \phi_2 \rightarrow e^{-i\varepsilon} \phi_2 \end{cases} \quad (9.36)$$

soit

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-i\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

Pour chaque λ^a on peut se restreindre à un sous-groupe abélien : $U(1) \subset SU(2)$.

9.3 Symétrie $SU(2)$ locale

Soit $U(x) \in SU(2)$, alors

$$\delta \phi_i = -\lambda_a(x) \sigma_i^a{}^j \phi_j \quad (9.38)$$

et pour une transformation non infinitésimale :

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-i\Lambda(x)} \phi \quad \Lambda(x) = \lambda_a(x) \sigma^a \in su(2) \quad (9.39)$$

Dans ce cas le terme cinétique hamiltonien se transforme comme

$$\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \longrightarrow \partial_\mu (\phi^\dagger U^\dagger(x)) \partial^\mu (U(x) \phi) = \left((\partial_\mu \phi^\dagger) U^\dagger(x) + \phi^\dagger \partial_\mu U^\dagger(x) \right) \left((\partial^\mu U(x)) \phi + U(x) \partial^\mu \phi \right) = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi$$

qui n'est pas invariant de jauge. Pour $U(1)$ nous avons été amenés à introduire un champ de jauge A_μ et une dérivée covariante associée.

Dans le cas non abélien, on introduit

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + i(A_\mu)_i^j \phi_j \quad (9.40)$$

A_μ est donc une matrice.

Si $D_\mu \phi \rightarrow (D_\mu \phi)' = U D_\mu \phi$, alors $(D_\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi$ est invariant. Explicitement, on a

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)' &= \partial_\mu \phi' + i A'_\mu \phi' \\ &= \partial_\mu (U \phi) + i A'_\mu (U \phi) \\ &= U \partial_\mu \phi + (\partial_\mu U) \phi + i A'_\mu (U \phi) \\ &= U (D_\mu \phi) = U (\partial_\mu \phi + i A_\mu \phi) \end{aligned}$$

où on a utilisé, dans la dernière ligne, la définition de D_μ . On obtient donc la relation

$$(\partial_\mu U) \phi + i A'_\mu U \phi = i U A_\mu \phi$$

soit après simplification :

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - i (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (9.41)$$

Si on considère une transformation infinitésimale : $U = e^{-i\Lambda} \approx 1 - i\Lambda$, on obtient :

$$\begin{aligned} A'_\mu &= (1 - i\Lambda) A_\mu (1 + i\Lambda) - i (\partial_\mu (1 - i\Lambda)) (1 + i\Lambda) \\ &= A_\mu \text{id} - i(\Lambda A_\mu - A_\mu \Lambda) + \partial_\mu \Lambda \end{aligned}$$

soit

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda + i [A_\mu, \Lambda] \quad (9.42)$$

$\Lambda \in su(2)$ donc $\Lambda^\dagger = \Lambda$, $\text{tr} \Lambda = 0$ et on rappelle que $\Lambda = \lambda^a \sigma^a$. De même $A_\mu \in su(2)$ donc

$$A_\mu = A_\mu^a \sigma^a \quad (9.43)$$

On en déduit

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \Lambda^a + \varepsilon^{abc} A_\mu^b \Lambda^c \quad (9.44)$$

Soit $M \in SU(2)$, alors on définit la représentation adjointe de M par

$$M \longrightarrow U M U^{-1} \quad (9.45)$$

Soit $\omega \in su(2)$, alors

$$e^{i\omega} = \sum_n \frac{i^n}{n!} \omega^n \quad (9.46)$$

et donc

$$U e^{i\omega} U^{-1} = U \left(\sum_n \frac{i^n}{n!} \omega^n \right) U^{-1} = \sum_n \frac{i^n}{n!} \omega'^n = e^{i\omega'} \quad (9.47)$$

et dans la représentation adjointe on a donc

$$\omega' = U\omega U^{-1} \quad (9.48)$$

On a $M^\dagger M = M^2 \rightarrow UM^2M^{-1}$ qui n'est pas invariant. Par contre $\text{tr } M$ est un invariant. On a

$$\text{tr } M'^2 = \text{tr}(UM^2U^{-1}) = \text{tr}(UU^{-1}M^2) = \text{tr } M^2$$

Si on a des champs à deux composantes ϕ, χ se transformant sous U , alors les combinaisons $\phi^\dagger\psi, \phi^\dagger M\phi, \text{tr } M^{2n}$ sont invariantes.

Un lagrangien pour A_μ doit être :

- invariant de Lorentz (donc scalaire) ;
- contenir des dérivées d'ordre 1
- invariant sous $SU(2)$ locale.

On définit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \quad (9.49)$$

qui se transforme comme

$$F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}U^{-1}(x) \quad (9.50)$$

On obtient alors le lagrangien de Yang–Mills (1954) :

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (9.51)$$

On peut décomposer $F_{\mu\nu}$ comme

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \sigma^a \quad (9.52)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - i([A_\mu, A_\nu])^a \\ &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - iA_\mu^b A_\nu^c ([\sigma^b, \sigma^c])^a \\ &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - iA_\mu^b A_\nu^c (i\varepsilon^{bca}) \\ &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned}$$

On a la relation

$$\sigma^a \sigma^b = \frac{1}{4} \delta^{ab} + \frac{i}{2} \varepsilon^{abc} \sigma^c \quad (9.53)$$

On peut donc écrire le lagrangien de Yang–Mills comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{2g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu}^a \sigma^a F^{b\mu\nu} \sigma^b) \\ &= -\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{tr}(\sigma^a \sigma^b) \\ &= -\frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{tr}\left(\frac{1}{4} \delta^{ab} + \frac{i}{2} \varepsilon^{abc} \sigma^c\right) \\ &= -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \end{aligned}$$

car $\text{tr}(\varepsilon^{abc}\sigma^c) = 0$.

Le lagrangien ne peut contenir un terme de masse, qui briserait l'invariance de jauge. Toutefois, il peut contenir un terme du type $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})$. Dans un lagrangien général, pour faire apparaître la constante de couplage g , on effectue le remplacement $A \rightarrow A/g$.

Soit $M \rightarrow M' = U M U^{-1}$. On définit la dérivée covariante adjointe comme

$$D_\mu M = \partial_\mu M + ig [A_\mu, M] \quad (9.54)$$

qui est invariant. Dans ce cas $\text{tr}(D_\mu M D^\mu M)$ est aussi invariant. Pour $M = M^a \sigma^a$, on a

$$(D_\mu M)^a = \partial_\mu M^a - g \varepsilon^{abc} A_\mu^b M^c \quad (9.55)$$

Les équations d'Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^a} = 0 \quad (9.56)$$

donnent

$$\partial_\rho F^{b\rho\sigma} - g \varepsilon^{bcd} A_\rho^c F^{d\rho\sigma} = 0 \quad (9.57)$$

qui est non linéaire. On peut l'écrire sous la forme

$$\partial_\rho F^{\rho\sigma} + ig [A_\rho, F^{\rho\sigma}] = 0 \quad (9.58)$$

ou encore

$$D_\rho F^{\rho\sigma} = 0 \quad (9.59)$$

qui est l'équation de Yang-Mills dans le vide. En faisant de même que pour le champ de jauge $U(1)$, on écrit l'identité de Bianchi :

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \quad (9.60)$$

On peut ajouter un courant au lagrangien de Yang-Mills :

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - g J^{a\mu} A_\mu^a \quad (9.61)$$

ce qui donnera

$$D_\rho F^{\rho\sigma} = g J^\sigma \quad (9.62)$$

et en contractant par D_σ , on trouve :

$$D_\sigma J^\sigma = 0 \quad (9.63)$$

car on peut montrer que $D_\sigma D_\rho F^{\rho\sigma} = 0$. Il s'agit donc d'un courant qui est conservé de manière covariante :

$$\partial_\rho J^\rho + ig [A_\rho, J^\rho] = 0 \quad (9.64)$$

Soit $M \in su(2)$, telle que

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M^3 & M^1 - iM^2 \\ M^1 + iM^2 & -M^3 \end{pmatrix} \quad (9.65)$$

On définit le vecteur $\mathbf{M} = (M^1, M^2, M^3)$. M se transforme comme

$$M' = e^{-i\Lambda} M e^{i\Lambda} \approx M - i[\Lambda, M] \quad (9.66)$$

donc $\delta M = -i[\Lambda, M]$ et comme M et Λ peuvent être exprimées comme combinaison des matrices Pauli σ^a : $\Lambda = \lambda^a \sigma^a$ et $M = M^a \sigma^a$, on réécrit la variation comme

$$\delta M^a = \varepsilon^{abc} \lambda^b M^c = T^{ac} M^c \quad (9.67)$$

que l'on met sous la forme

$$\delta M = T M \quad (9.68)$$

et $T^{ac} = \lambda^b (T^{ac})^b$ avec $(T^{ac})^b = \varepsilon^{bac}$, donc $\delta \mathbf{M} = e^{-\lambda^b T^b} \mathbf{M}$ avec $e^{-\lambda^b T^b} \in SO(3)$. Les expressions de T^b sont :

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.69)$$

$SU(2)$	$SO(3)$
τ^a	T^a
$U = e^{-i\lambda^a \tau^a}$	$O = e^{-i\lambda^a (iT)^a}$
$M = \begin{pmatrix} M^3 & M^1 - iM^2 \\ M^1 + iM^2 & -M^3 \end{pmatrix}$	$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M^1 \\ M^2 \\ M^3 \end{pmatrix}$
$M \rightarrow U M U^{-1}$	$\mathbf{M} \rightarrow O \mathbf{M}$
$[\tau^a, \tau^b] = i\varepsilon^{abc} \tau^c$	$[iT^a, iT^b] = i\varepsilon^{abc} iT^c$
$U_2 = -1 \in SU(2)$	$M \rightarrow (-1)M(-1) = M$

TABLE 1 – Comparaison entre les représentations $SU(2)$ et $SO(3)$.

$SU(2)$ et $SO(3)$ ne sont équivalents que dans leurs algèbres de Lie. $\det M = ((M^1)^2 + (M^2)^2 + (M^3)^2) = |\mathbf{M}|^2$ est invariant par rotation.

9.4 Généralisations

On peut étendre les concepts de la section précédente aux groupes $SU(N)$ et $SO(N)$. Un élément s'écrira

$$U = e^{-i\lambda^a \tau^a} \quad a = 1, \dots, d \quad (9.70)$$

et on aura les commutateurs

$$[\tau^a, \tau^b] = i f^{abc} \tau^c \quad (9.71)$$

où $f^{abc} \in \mathbb{R}$ est antisymétrique en a, b, c . Un champ ϕ variera comme

$$\delta \phi_i = i \lambda^a \tau_i^a \phi_j \quad (9.72)$$

et on définit la dérivée covariante :

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + i g A_\mu^a \tau^a \phi \quad (9.73)$$

ainsi que

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (9.74)$$

Chaque groupe peut être associé à un autre groupe :

- $SU(2) \longleftrightarrow SO(3)$ ($d = 3$);
- $SU(4) \longleftrightarrow SO(6)$ ($d = 15$);
- $SO(4) \longleftrightarrow SU(2) \times SO(2)$ ($d = 6$).

Comme exemple considérons $U(2) = U(1) \times SU(2)$. Les matrices carrées τ^a hermitiques de dimension 2 sont données par :

$$\tau^a = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (9.75)$$

On a donc les relations

$$A_\mu = \sum_{a=1}^4 A_\mu^a \tau^a = \underbrace{\sum_{a=1}^3 A_\mu^a \tau^a}_{= A_\mu^S} + \frac{1}{2} B_\mu \mathbf{1}_2 \quad (9.76a)$$

$$\partial A_\mu = \partial_\mu \Lambda + i [A_\mu, \Lambda] \quad (9.76b)$$

$$\Lambda = \underbrace{\sum_{a=1}^3 \lambda^a \tau^a}_{= \Lambda^S} + \frac{1}{2} \lambda^4 \quad (9.76c)$$

$$\delta A_\mu^S = \partial_\mu \Lambda^S + i [A_\mu^S, \Lambda^S] \quad (9.76d)$$

$$\delta B_\mu = \partial_\mu \lambda^4 \quad (9.76e)$$

$$F_{\mu\nu} = \underbrace{\sum_{a=1}^3 F_{\mu\nu}^a \tau^a}_{= F_{\mu\nu}^S} + B_{\mu\nu} \mathbf{1} \quad (9.76f)$$

$$F_{\mu\nu}^S = \partial_\mu A_\nu^S - \partial_\nu A_\mu^S + i [A_\mu^S, A_\nu^S] \quad (9.76g)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (9.76h)$$

$$\text{tr } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (9.76i)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM}^{SU(2)} + \mathcal{L}^{U(1)} \quad (9.76j)$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + i \partial_\mu A_\mu^a \tau^a \phi + ig B_\mu \phi \quad (9.76k)$$

10 Brisures de symétries non abéliennes

On considère une symétrie $SU(2)$ locale, avec $A_\mu = A_\mu^a \tau^a$, $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C^2$ et $\phi'(x) = U(x)\phi(x)$, où $U \in SU(2)$. Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) \quad (10.1)$$

et on définit

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig A_\mu \phi \quad (10.2a)$$

$$(D_\mu \phi)_i = \partial_\mu \phi_i + ig A_\mu^a \tau^a_{ij} \phi_j \quad (10.2b)$$

$$V = \pm m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (10.2c)$$

Pour le signe positif, le spectre est :

- 4 champs scalaires réels de spin nuls de masse m (4 degrés de liberté) ;
- 3 champs de spin 1 et de masse nulle ($3 \times 2 = 6$ degrés de liberté).

On considère le vide $\phi_0 = 0$ laissé invariant pour tout U . Considérons maintenant le cas du signe négatif. La solution $\phi_0 = 0$ est instable. On obtient le minimum pour

$$|\phi_0|^2 = \frac{2m^2}{\lambda} = v^2 \quad (10.3)$$

On note $\phi_0 = (v_1, v_2)$ tel que $|v_1|^2 + |v_2|^2 = v^2$ qui définit une sphère tridimensionnelle. Soit U telle que

$$U = \begin{pmatrix} u & z \\ -z^* & u^* \end{pmatrix} \quad uu^* + zz^* = 1 \quad (10.4)$$

alors $U\phi_0 \neq \phi_0$ et $\delta\phi = -i\Lambda\phi$ donc $\delta\phi_0 \neq 0$ pour chaque transformation a :

$$\delta^1 \phi_0 = -i\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \delta^2 \phi_0 = -i\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} -iv_1 \\ iv_2 \end{pmatrix} \quad \delta^3 \phi_0 = -i\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$$

Il n'y a donc pas de transformation infinitésimale qui laisse ϕ_0 invariant. La symétrie $SU(2)$ est donc brisée à l'unité.

On développe autour $\phi_0 = (v, 0)$ avec $v \in R$. On a

$$\phi(x) = \phi_0 + \delta\phi(x) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

On développe le potentiel :

$$|\phi|^2 = \left(v + \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}$$

donc, à l'ordre 2 :

$$V(|\phi|^2) = m^2 v^2 + \frac{\lambda}{4} v^4 + \frac{1}{2} (2m^2) a \quad (10.6)$$

Pour chaque symétrie brisée on obtient boson de Goldstone, ici b, c et d .

Le terme cinétique vaut

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = (D_\mu \delta\phi)^2 + \frac{(m^2)^{ab}}{2} A_\mu^a A^{b\mu} \quad (10.7)$$

où

$$(m^2)^{ab} = g^2 \phi_0^\dagger (\tau^a \tau^b) \phi_0 = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* \end{pmatrix} \tau^a \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

Et le lagrangien pour les champs A devient

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 A^\mu A^\mu \quad m_v^2 = v^2 g^2 \quad (10.9)$$

et celui pour ϕ :

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \delta \phi)^\dagger (D_\mu \delta \phi) - \frac{1}{2} (2m^2) a^2 \quad (10.10)$$

ce qui fait 13 degrés de libertés, soit 3 en plus. Or le nombre de degrés de liberté doit toujours être fixé. Pour voir apparaître le spectre, il faut fixer la jauge. Pour ce faire, on choisit

$$\lambda^3 = \frac{b}{v} \quad \lambda^1 = -\frac{d}{v} \quad \lambda^2 = \frac{c}{v} \quad (10.11)$$

et donc

$$\phi' = \begin{pmatrix} v & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

et le lagrangien devient

$$\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu a \partial^\mu a + \dots \quad (10.13)$$

Le spectre contient désormais :

- un champ scalaire de spin 0 et de masse $2m^2$ (un degré) ;
- trois vecteurs de spin 1 massifs avec $m_v^2 = g^2 v^2$ (neuf degrés).

Cette théorie n'est pas correcte car tous les champs ne sont pas massifs.

On s'est placé dans la jauge unitaire pour $\phi' = \phi_0 + \delta \phi = (v + \chi, 0)$. $\delta a = 0$ mais $\delta b, \delta c, \delta d = i\lambda$ et donc ne sont pas invariants.

11 Champs de spin 2

11.1 Procédure de Noether

Une autre démonstration consiste à écrire la variation du champ comme

$$\delta \phi = \alpha(x) f(\phi) \quad (11.1)$$

qui est toujours valable pour f quelconque à condition que $\alpha \ll 1$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \alpha f(\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\alpha f(\phi)) \\ &= \alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} f(\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (f(\phi)) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} f(\phi) \partial_\mu \alpha \end{aligned}$$

Si $\delta \mathcal{L} = 0$, alors ceci doit être vrai pour tout α , et en particulier pour $\alpha = cste$. On en déduit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} f(\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (f(\phi)) \quad (11.2)$$

d'où aussi

$$\delta_{\alpha(x)} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} f(\phi) \partial_\mu \alpha = J^\mu \partial_\mu \alpha \quad (11.3)$$

Considérons maintenant l'action

$$S_0 = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (11.4)$$

telle que $\delta_g \mathcal{L} = 0$. Dans ce cas

$$\delta_{\alpha(x)} S_0 = \int d^4x (\partial_\mu \alpha) J^\mu \quad (11.5)$$

Cherchons alors S_1 tel que $\delta_{\alpha(x)} S = 0$, avec $S = S_0 + S_1$:

$$S_1 = - \int d^4x J^\mu A_\mu \quad (11.6)$$

avec

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha \quad (11.7)$$

et alors

$$\delta S = \int d^4x \partial^\mu \alpha J_\mu - \int d^4x J^\mu + \left(- \int d^4x A_\mu \delta_{\alpha_x} J^\mu \right)$$

est nulle si $\delta_{\alpha_x} J^\mu = 0$. Si ce n'est pas le cas, on a

$$\delta S = -e^2 \int d^4x \phi^* \phi \partial_\mu \alpha A^\mu \quad (11.8)$$

comme J^μ est donné par

$$J^\mu = ie \phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (11.9)$$

Alors on peut définir S_2 par

$$S_2 = \frac{e^2}{2} \int d^4x |\phi|^2 A_\mu A^\mu \quad (11.10)$$

tel que $S = S_0 + S_1 + S_2$ soit invariant. On note que S_2 contient des termes non linéaires en A_μ .

Il est ainsi possible d'ajouter des termes jusqu'à obtenir une action invariante.

11.2 Translation locale et champ tensoriel

Considérons une translation locale infinitésimale :

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + a_\mu(x) \quad (11.11)$$

Si $a_\mu = \text{cste}$, alors $\delta S_0 = 0$ comme nous l'avons vu précédemment. Dans ce cas le courant conservé est le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad (11.12)$$

Dans le cas d'une transformation locale, on obtient :

$$\delta_\ell S_0 = \int d^4x \partial^\nu a^\mu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} (\partial^\mu a^\nu + \partial^\nu a^\mu) \quad (11.13)$$

Appliquons la procédure de Noether et cherchons S_1 pour obtenir une action $S = S_0 + S_1$ sous la translation locale :

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (11.14)$$

avec

$$\delta h^{\mu\nu} = -(\partial^\mu a^\nu + \partial^\nu a^\mu) \quad (11.15)$$

Dans ce cas on a bien $\delta S = 0$ puisque $\delta S_1 = -\delta S_0$.

On suppose que h est un tenseur de spin 2 et donc symétrique

$$h^{\mu\nu} = h^{\nu\mu} \quad (11.16)$$

car dans tous les cas la partie antisymétrique n'intervient pas comme $T_{\mu\nu}$ est antisymétrique.

L'action s'écrit donc

$$S = S_0[\phi, A] + \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + S_2$$

où

$$S_2 = \int d^4x (A \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} + B \partial_\rho h^\rho{}_\mu \partial_\sigma h^{\sigma\mu} + C \partial_\rho h^\rho{}_\mu \partial^\mu h_\sigma{}^\sigma \\ + D \partial_\mu h_\rho{}^\rho \partial^\mu h_\sigma{}^\sigma + E h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + F h_\mu{}^\mu h_\nu{}^\nu)$$

La condition $\delta S_2 = 0$ impose $E = F = 0$. En effet, on a $\delta h_\mu{}^\mu = -2\partial_\mu a^\mu$ et alors

$$\delta(E h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + F h_\mu{}^\mu h_\nu{}^\nu) = 4E h_{\mu\nu} \partial^\mu a^\nu + 4F h_\mu{}^\mu \partial_\nu a^\nu = 0$$

Cette condition doit être vraie pour tout h . Si on choisit h tel que $h_{\mu}{}^{\mu} = 0$, alors

$$4E h_{\mu\nu} \partial^{\mu} A^{\nu} = 0$$

ce qui impose $E = 0$. De même on trouve $F = 0$.

On peut aussi montrer que

$$\delta S_2 = 0 \iff B = -C = -2A \quad D = -A \quad \forall A$$

L'action s'écrit finalement

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + A \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_{\rho} h_{\mu\nu} \partial^{\rho} h^{\mu\nu} - \partial_{\rho} h^{\rho}{}_{\mu} \partial_{\sigma} h^{\sigma\mu} + \partial_{\rho} h^{\rho}{}_{\mu} \partial^{\mu} h - \frac{1}{2} \partial_{\mu} h \partial^{\mu} h \right) \quad (11.17)$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent

$$-\square h_{\mu\nu} + \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h^{\sigma}{}_{\mu} + \partial_{\mu} \partial_{\sigma} h^{\sigma}{}_{\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h + \eta_{\mu\nu} (\square h - \partial^{\rho} \partial^{\sigma} h_{\rho\sigma}) = 2k^2 T_{\mu\nu} \quad (11.18)$$

en posant

$$A = -\frac{1}{4k^2} \quad (11.19)$$

T agit comme une source. Comme h est symétrique, il s'agit d'un ensemble de dix équations couplées.

L'analyse dimensionnelle donne :

$$[h] = 0 \quad [A] = M^2 \quad [k] = M^{-1} \quad (11.20)$$

Pour déterminer les constantes A et k^2 , prenons une source ponctuelle :

$$T_{00} = m\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad T_{ij} = T_{i0} = 0 \quad (11.21)$$

Ce choix est dû au fait que, dans la limite classique, T tend vers la masse.

On cherche une solution statique du type

$$\begin{cases} h_{00} = 2\phi(\mathbf{x}) \\ h_{0i} = 0 \\ h_{ij} = 2\eta_{ij}\psi(\mathbf{x}) \\ h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 2\phi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (11.22)$$

En injectant cette solution dans les équations du mouvement (11.18), on obtient les diverses équations :

- Pour $i \neq j$, on a $h_{ij} = T_{ij} = 0$:

$$\begin{aligned} 2\partial_i \partial_j \psi + 2\partial_i \partial_j \psi - \partial_i \partial_j (2\phi + 6\psi) &= 0 \\ -2\partial_i \partial_j (\phi + \psi) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\phi = -\psi \quad (11.23)$$

– 0, 0 :

$$\begin{aligned}
-\square h_{00} + \eta_{00}(\square h - \partial^i \partial^j h_{ij}) &= 2^2 T_{00} \\
-2\square \phi + (-4\square \phi + 2\partial^i \partial^j \eta_{ij} \phi) &= 2k^2 m \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \\
-6\square \phi - 2\nabla^2 \phi &= 2k^2 m \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \\
4\nabla^2 \phi &= 2k^2 m \delta^{(3)}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

car $\square = -\nabla^2$, et on obtient l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \phi = \frac{k^2}{2} m \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (11.24)$$

Cette équation admet pour solution

$$\phi(r) = \frac{-k^2 m}{8\pi r} = -\frac{G_N m}{r} \quad (11.25)$$

où on a écrit l'équation classique. On peut donc déterminer les valeurs des constantes :

$$k^2 = 8\pi G_N \quad A = \frac{1}{64\pi G_N} \quad (11.26)$$

Nulle part nous n'avons parlé de géométrie : on a uniquement considéré l'interaction du point de vue des particules.

Dans le cas sans source, l'équation (11.18) se réduit à

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (11.27)$$

où on a posé

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (11.28)$$

Considérons une transformation générale des coordonnées :

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x) = f^\mu(x) \quad (11.29)$$

avec a^μ quelconque. La procédure de Noether donnerait une infinité de termes. Une autre solution est d'utiliser la géométrie différentielle. On note l'élément de longueur

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \longrightarrow g_{\mu\nu}(x(x')) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma \quad (11.30)$$

où g est le tenseur métrique. De cette loi de transformation on déduit :

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x(x')) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \quad (11.31)$$

Notons

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad h_{\mu\nu}(x) \ll 1 \quad (11.32)$$

Comme $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, on a

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} = \delta_\rho^\mu - \partial_\rho a^\mu \quad (11.33)$$

et alors

$$\begin{aligned}
g'_{\rho\sigma} &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\delta_\rho^\mu - \partial_\rho a^\mu)(\delta_\sigma^\nu - \partial_\sigma a^\nu) \\
&= \eta_{\rho\sigma} + \underbrace{h_{\rho\sigma} - \partial_\rho a_\sigma - \partial_\sigma a_\rho}_{= h'_{\rho\sigma}}
\end{aligned}$$

h représente donc les fluctuations autour de l'espace plat et qui se couplent à la matière. On peut généraliser cette idée à $g_{\mu\nu}$ quelconque.

Pour cela dans l'action on fait les remplacements

$$d^4x \longrightarrow \sqrt{-\det g} d^4x \quad h_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$$

ce qui donne

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left(\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (11.34)$$

Si on reprend l'exemple de la source ponctuelle, on obtient comme élément de longueur

$$ds^2 = (1 + 2\phi)d^2 - (1 - 2\phi)dx_i dx_i \quad (11.35)$$

L'action vaut dans le cas général :

$$\begin{aligned}
S_2 &= -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-\det g} R[g] \\
&= -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-\det g} R[\eta + h] \\
&= S_2[h] + \dots
\end{aligned}$$

où R est la courbure scalaire.

A Théorie des champs conformes⁸

Dans toute cette section on se placera dans un espace à deux dimension muni de la métrique euclidienne :

$$ds^2 = dx_1 + dy_1 \quad (\text{A.1})$$

On définit une transformation d'échelle par

$$x_i \rightarrow \tilde{x}_i = \lambda x_i \quad (\text{A.2})$$

et ds^2 se transforme alors comme

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = \lambda^2 ds^2 \quad (\text{A.3})$$

On généralise ce résultat en définissant une transformation conforme comme étant une transformation des coordonnées

$$x_i \rightarrow \tilde{x}_i(x) \quad (\text{A.4})$$

telle que

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = \lambda^2(x) ds^2 \quad (\text{A.5})$$

Sous une telle transformation, un champ de dimension critique⁹ Δ se transforme comme

$$\phi(x) \rightarrow \lambda(x)^\Delta \phi(\tilde{x}) \quad (\text{A.6})$$

En posant

$$dz = dx + idy \quad (\text{A.7})$$

il est possible de factoriser d^2 :

$$ds^2 = dz dz^* = |dz|^2 \quad (\text{A.8})$$

Considérons alors la transformation

$$z \rightarrow \tilde{z} = f(z) \quad (\text{A.9})$$

où f est une fonction holomorphe. Alors, en se souvenant que $d(f(z)) = f'(z) dz$, on a

$$d\tilde{z} d\tilde{z}^* = |f'(z)|^2 dz dz^* \quad (\text{A.10})$$

ce qui correspond à une transformation conforme avec

$$\lambda(z, z^*) = \left| \frac{df}{dz} \right| \quad (\text{A.11})$$

L'ensemble des fonctions holomorphes permet d'effectuer des transformations conformes.

Considérons maintenant une transformation infinitésimale :

$$z \rightarrow \tilde{z} = z + \alpha(z) \quad \alpha \ll 1 \quad (\text{A.12})$$

8. Ces notes sont basées sur une explication donnée par Vladimir Dotsenko.

9. Par exemple la dimension critique d'un champ tensoriel correspond à son ordre.

Il est alors possible de développer $\alpha(z)$, analytique, en série entière¹⁰ autour de $z = 0$:

$$\alpha(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n z^{n+1} \quad (\text{A.13})$$

Les coefficients $\{\alpha_n\}$ correspondent aux paramètres de la transformation, qui sont donc en nombre infini.

Prenons maintenant un champ $\phi = \phi(z)$ (qui ne dépend que de z pour des raisons de simplicités) et qui se transforme donc comme

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi + \delta\phi = (1 + \alpha'(z))\phi \quad (\text{A.14})$$

On aura

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(z) &= (1 + \alpha'(z))^\Delta \phi(z + \alpha(z)) \\ &\approx (1 + \Delta\alpha'(z))(1 + \alpha(z)\partial_z)\phi(z) \\ &= \phi(z) + (\Delta\alpha'(z) + \alpha(z)\partial_z)\phi(z) \end{aligned}$$

ce qui nous donne la variation de ϕ sous la transformation :

$$\delta\phi = \tilde{\phi} - \phi = (\Delta\alpha'(z) + \alpha(z)\partial_z)\phi(z) \quad (\text{A.15})$$

qui se réécrit

$$\delta_{\alpha(z)}\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} d\xi \alpha(\xi) T(\xi) \phi(z) \quad (\text{A.16})$$

où C_z est un contour qui entoure le point z . T est le tenseur d'énergie impulsion réécrit en terme des variables z et z^* . On a

$$\text{tr } T_{\mu\nu} = T_{zz^*} = 0 \quad (\text{A.17})$$

La variation de l'action sous la transformation [A.12](#) (terme de bord) est

$$\delta S[\phi] = \oint_C ds^\mu \alpha^\nu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} dz \alpha(z) T(z) \quad (\text{A.18})$$

où s est le vecteur normal au contour.

La fonction de corrélation en deux points est

$$\langle \phi(z)\phi(z_0) \rangle = \frac{\int D\phi e^{-S[\phi]} \phi(z)\phi(z_0)}{\int D\phi e^{-S[\phi]}} \quad (\text{A.19})$$

La variation de cette intégrale fonctionnelle doit être nulle sous les transformations [\(A.12\)](#) et [\(A.14\)](#) :

$$\int D\phi (-\delta A[\phi] + \delta\phi) e^{-A[\phi]} \phi(z_0) = 0 \quad (\text{A.20})$$

10. Le décalage d'indice est conventionnel.

Exemple A.1.

Calculons la variation de la valeur moyenne de λ^2 avec une fonction de poids gaussienne $e^{-a\lambda^2}$

$$\langle \lambda^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-a\lambda^2} \lambda^2 \quad (\text{A.21})$$

par la transformation

$$\lambda \rightarrow \lambda + \alpha \quad (\text{A.22})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \langle \lambda^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-a(\lambda+\alpha)^2} (\lambda + \alpha)^2 \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-a\lambda^2} e^{-2a\alpha\lambda} (\lambda^2 + 2\alpha\lambda) \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-a\lambda^2} (1 - 2a\alpha\lambda) (\lambda^2 + 2\alpha\lambda) \\ &= \langle \lambda^2 \rangle + \int d\lambda (-2a\lambda^3\alpha + 2\alpha\lambda) e^{-a\lambda^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\delta I = 2\alpha \langle -a\lambda^3 + \lambda \rangle = 0 \quad (\text{A.23})$$

Ici cette intégrale est trivialement nulle (fonction impaire et intervalle symétrique) mais dans le cas général on peut déduire certaines relations.

On a (en considérant le point $z = 0$) :

$$\begin{aligned} \delta\phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} d\xi \alpha(\xi) T(\xi) \phi(0) \\ &= \sum_n \alpha_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} d\xi \xi^{n+1} T(\xi) \phi(0) \end{aligned}$$

qui donne

$$\delta\phi = \sum_n \alpha_n L_n \phi(0) \quad (\text{A.24})$$

avec

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\xi \xi^{n+1} T(\xi) \quad (\text{A.25})$$

qui sont les générateurs des transformations conformes. Ils satisfont les relations de commutation

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{2\pi} n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \quad (\text{A.26})$$

Il s'agit de l'algèbre de Virasoro. Elle a été créée dans les années 70 pour les besoins de la théorie des cordes. Le paramètre c est appelé charge centrale et dans le cadre d'une théorie des champs elle est égale à la dimension D de l'espace.

Remarque : La valeur $c = 0$ donne l'algèbre de reparamétrisation des fonctions :

$$f(x) \rightarrow f(x + \alpha(x)) \quad (\text{A.27})$$

et alors

$$L_n = -x^n \partial_x \tag{A.28}$$

car

$$\delta f = \alpha(x) \partial_x f(x) = \sum_n \alpha_n x^{n+1} \partial_x f(x) \tag{A.29}$$

Index

- Équation
 - de Maxwell, 48
 - Klein–Gordon
 - avec source, 24
- État instable, 32
- Action, 10
- Algèbre de Lie, 66
- Champ
 - fluctuation, 32
 - scalaire, 9
 - complexe, 46
 - libre, 11
 - tensoriel, 9
 - vectorel, 9
- Charge
 - $U(1)$, 41
 - énergie, 43
 - de Noether, 37
 - de Schrödinger, 4
 - transformation de Lorentz, 45
- Convention de sommation, 6
- Courant
 - $SU(2)$, 67
 - $U(1)$, 41
 - de Noether, 39
 - transformation de Lorentz, 45
- Dérivée covariante, 46
- Développement perturbatif, 34
- Densité
 - de hamiltonien, 16
 - de lagrangien, 11
 - de probabilité, 4
- Equation
 - de conservation
 - Schrödinger, 4
 - de Klein–Gordon, 5
 - de Schrödinger, 4
 - Euler–Lagrange, 11
 - Klein–Gordon, 12
 - libre, 17
 - libre (solution), 18
- Fonction de Green
 - euclidienne (fourier), 25
 - Klein–Gordon, 25
 - avancée, 27
 - de Feynman, 28
 - retardée, 25
 - retardée (fourier), 27
- Force de Lorentz, 49
- Groupe, 36
 - $SU(2)$, 37
 - $U(1)$, 36
 - $U(2)$, 37
 - de Lorentz, 8
- Hamiltonien, 10, 16
 - densité, 16
- Identité
 - de Bianchi, 48
- Indice
 - contravariant, 8
 - covariant, 8
- Intervalle d’espace-temps, 6
- Lagrangien, 10, 11
 - champ vectorel, 47
 - densité, 11
 - Klein–Gordon, 12
 - avec source, 24
 - libre, 17
 - scalaire
 - complexe, 40
- Matrice de masse, 34
- Mesure invariante, 18
- Moment conjugué, 10, 16
- Postulat
 - relativité restreinte, 6
- Produit scalaire, 8
- Relation
 - commutation, 20, 21
 - de commutation, 44
 - de dispersion
 - classique, 4
 - relativiste, 4
- Solution de vide, 32
- Symétrie
 - continue, 36
 - discrète, 36

- Tachyon, 32
- Tenseur, 8
 - énergie-impulsion, 42
 - antisymétrique, 9
 - champ électromagnétique, 47
 - métrique, 6
 - symétrique, 9
- Théorème
 - de Noether, 37
 - Ostrogradski, 13
- Théorie
 - locale, 11
- Trace, 9
- Transformation
 - de Galilée, 6
 - de jauge
 - champ vectoriel, 46
 - locale, 46
 - de Lorentz, 6

Table des figures

1	Possibilités de déformation du contour d'intégration.	26
2	Contour d'intégration pour la fonction de Green retardée avec $t < 0$	26
3	Contour d'intégration pour la fonction de Green retardée avec $t > 0$	27
4	Contour d'intégration, pour la fonction de Green retardée, avec les pôles déplacés.	27
5	Contour d'intégration pour la différence des fonctions de Green.	28
6	Contour d'intégration pour la fonction de Green de Feynman.	28
7	Potentiel de l'équation (5.59).	33
8	Vertex typique d'une autointeraction en ϕ^3	35
9	Potentiel (8.11).	59