

Physique non linéaire — L3

Harold Erbin

Notes de cours de Magistère L3 donné par M. Coste.

Ce texte est publié sous la licence libre

Licence Art Libre :

<http://artlibre.org/licence/lal/>

Version : 27 avril 2011

Site : <http://harold.e.free.fr/>

Sommaire

1	Introduction aux systèmes dynamiques	1
2	Bifurcations des points d'équilibre	10
3	Transition vers le chaos	18
4	Méthodes perturbatives	22
5	Ondes dispersives non linéaires	28
	Index	40
	Table des figures	41
	Table des matières	42

Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques

Définition 1.1 (Système dynamique continu). Un système dynamique continu est défini par

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.1)$$

1.1 Exemples

Exemple 1.1 (Mécanique).

On a les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (1.2)$$

Certains problèmes se posent dans les systèmes dissipatifs. À partir des équations de Newton

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.3)$$

on pose

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda y - \omega_0^2 x \end{cases} \quad (1.4)$$

ou encore dans le cas d'oscillations forcées, on a l'équation

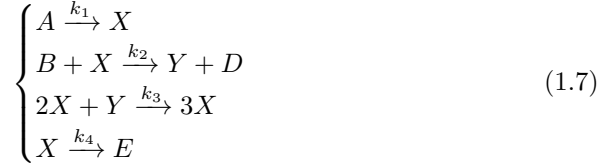
$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (1.5)$$

qui sera associé au système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda y - \omega_0^2 x + f \cos z \\ \dot{z} = \omega \end{cases} \quad (1.6)$$

Exemple 1.2 (Cinétique chimique (Brusselator)).

Il s'agit d'un ensemble de quatre équations



$[A]$ et $[B]$ sont constantes, de même que $[E]$ et $[D]$. Il faut introduire A et B et retirer D et E du réacteur.

On obtient le système d'équation

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1[A] - k_2[X][B] + k_3[Y][X]^2 - k_4[X] \quad (1.8)$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = k_2[B][X] - k_3[X]^2[Y] \quad (1.9)$$

Exercice : choix d'échelle pour $[X]$ et $[Y]$ et un choix d'échelle de temps. On obtient alors un système qui comporte le minimum de constantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (b + 1)x + x^2y \\ \dot{y} = bx - x^2y \end{cases} \quad (1.10)$$

Exemple 1.3 (Modèles d'écosystème (Volterra)).

On les appelle aussi les systèmes prédateurs/proies.

Soient N_1 la population de lapins et N_2 celle des lynx. On a

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = \alpha N_1 - \beta N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 = -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

1.2 Théorème fondamental

Théorème 1.1. Si la fonction f de (1.1) est régulière¹, il existe une solution unique de condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, dépendant de façon régulière de \mathbf{x}_0 .

Remarques :

1. Il s'agit d'un théorème local, c'est à dire valable autour de \mathbf{x}_0 . Il est aussi valable uniquement pour un temps fini.
2. Si \mathbf{x} a n composantes, et si on dispose de n conditions initiales, alors on peut obtenir une solution numérique.
3. Toutefois il est impossible de savoir si le système

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x) \\ x(t_1) = x_1 \\ x(t_2) = x_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

possède une solution (numérique ou non) : il s'agit d'un problème de conditions aux limites.

1. "Smooth" en anglais : suffisamment différentiable.

Le problème que l'on se pose dans le cours est le suivant : que peut-on dire des solutions $\mathbf{x}(t)$ simplement en étudiant la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x})$?

1.3 Points d'équilibre

Définition 1.2 (Points d'équilibre). L'ensemble $\{\mathbf{x}^*\}$ des points d'équilibre est tel que

$$\{\mathbf{x}^* \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}\} \tag{1.13}$$

En effet, en $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ et on a trouvé une solution $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t)$.

1.3.1 Oscillateur harmonique

Soit l'équation

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \tag{1.14}$$

ou encore

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \tag{1.15}$$

Définition 1.3 (Espace des phases). $\{(x, y)\}$ est l'espace de phase du système dynamique. Sa dimension est le nombre de degrés de liberté du système.

Remarque : La définition est différente en mécanique.

La quantité conservée est

$$E_m = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\omega_0^2}{2}x^2 \tag{1.16}$$

Le point d'équilibre est $(0, 0)$. Ce point est stable car les trajectoires ne s'éloignent jamais de \mathbf{x}^* .

Dans l'espace des phases, les trajectoires possibles correspondent à des ellipses (figure 1.1).

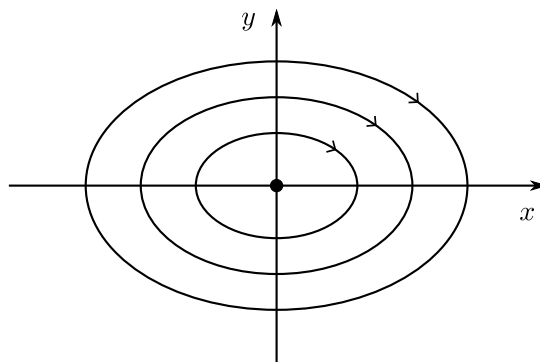


FIGURE 1.1 – Portrait de phase de l'oscillateur harmonique.

1.3.2 Oscillateur harmonique amorti

Soit l'équation

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \alpha \dot{x} \tag{1.17}$$

avec $\alpha = 0$, ou encore

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \alpha y \end{cases} \tag{1.18}$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} x^2 \right) = -\alpha y^2 < 0$$

$(0, 0)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable lorsque $t \rightarrow \infty$: toute trajectoire tend vers $(0, 0)$ (figure 1.2).

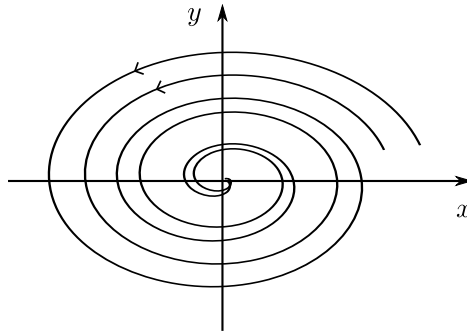


FIGURE 1.2 – Portrait de phase de l'oscillateur harmonique amorti.

1.3.3 Oscillateur anharmonique

L'équation d'un tel système est

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin x \tag{1.19}$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin x \end{cases} \tag{1.20}$$

et les points fixes sont tels que

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ x = 0(2\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pi(2\pi) \end{cases} \tag{1.21}$$

$(0, 0)$ est un point d'équilibre stable. Pour $(\pi, 0)$, on va regarder comment évolue une petite perturbation

$$\begin{cases} x = \pi + \varepsilon(t) \\ y = \eta(t) \end{cases} \tag{1.22}$$

avec $|\varepsilon|, |\eta| \ll 1$ d'où

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -\omega_0^2 \sin(\pi + \varepsilon) \\ &= -\omega_0^2 \sin \pi - \omega_0^2 \cos \pi \times \varepsilon \\ &= \omega_0^2 \varepsilon\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

et on cherche

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 e^{\sigma t} \\ \eta = \eta_0 e^{\sigma t} \end{cases} \quad (1.24)$$

Il y a stabilité si, pour les deux solutions, la partie réelle est négative. On obtient le système

$$\begin{cases} \sigma \varepsilon_0 - \eta_0 = 0 \\ -\omega_0^2 \varepsilon_0 + \sigma \eta_0 = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

ou encore sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & -1 \\ -\omega_0^2 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Il faut que le déterminant du système soit nul pour avoir une autre solution que $\varepsilon_0 = \eta_0 = 0$, c'est à dire

$$\begin{vmatrix} \sigma & -1 \\ -\omega_0^2 & \sigma \end{vmatrix} = 0 \implies \sigma^2 - \omega_0^2 = 0$$

d'où

$$\sigma_{\pm} = \pm \omega_0 \quad (1.27)$$

Le point $(\pi, 0)$ est instable car $\Re(\sigma_+) > 0$. Les vecteurs propres sont déterminés par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} &= \sigma_{\pm} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{cases} -\eta_0 = \mp \omega_0 \varepsilon_0 \\ -\omega_0^2 \varepsilon_0 = \pm \omega_0 \eta_0 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$V_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \omega_0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Il est impossible d'intégrer deux fois l'équation (1.19) (il faut employer une fonction spéciale). Toutefois, il est possible de l'intégrer une fois en multipliant âr \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} \ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x} \sin x &= 0 \\ \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega_0^2 \cos x &= E_m \end{aligned}$$

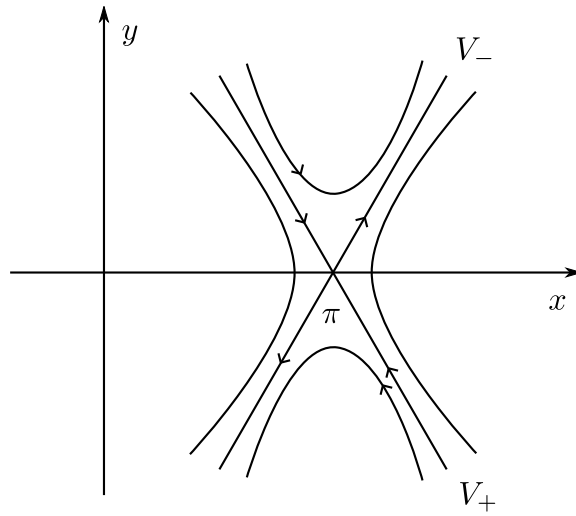


FIGURE 1.3 – Portrait de phase local en $(\pi, 0)$.

d'où

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E_m + \omega_0^2 \cos x)} \quad (1.29)$$

et l'on a aussi

$$\ddot{x} = - \frac{d}{dx} \underbrace{(-\omega_0^2 \cos x)}_{V(x)}$$

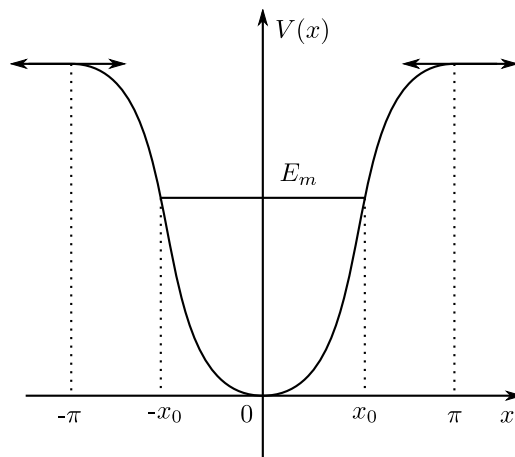


FIGURE 1.4 – Potentiel d'un oscillateur anharmonique.

À partir de l'équation (1.19) et du système (1.20), en prenant l'origine des énergies en $x = 0$, on a l'équation

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \omega_0^2 (1 - \cos x) = E \quad (1.30)$$

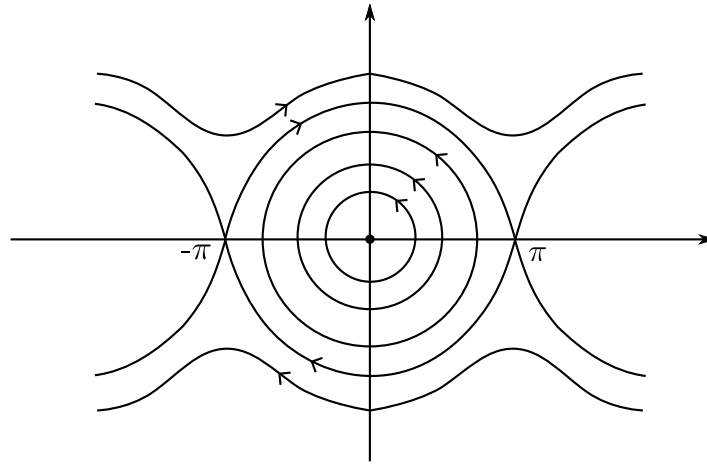


FIGURE 1.5 – Portrait de phase d'un oscillateur anharmonique.

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2E - 2\omega_0^2(1 - \cos x)}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2E - 2\omega_0^2(1 - \cos x)}}$$

ce qui permet de trouver la période du système :

$$T = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2E(x_0) - 2\omega_0^2(1 - \cos x)}} \quad (1.31)$$

On a $E(\pi) = 4\omega_0^2$ d'où

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{2\omega_0^2(1 + \cos x)}} \\ &= \underbrace{\int_0^{\pi-\varepsilon} (\dots)}_{T_0} + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi \frac{1}{\omega_0\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}} \\ &= T_0 + \int_0^\varepsilon \frac{du}{ku} \end{aligned}$$

car en posant $u = \pi - x$, on a

$$\cos(\pi - u) = \cos \pi - u \sin \pi - \frac{u^2}{2} \cos \pi = \frac{u^2}{2} - 1$$

T_0 est finie, tandis que le deuxième membre diverge en $\ln \varepsilon$.

1.4 Un exemple de système non conservatif

Exemple 1.4 (Oscillateur de van der Pol).

Il est représenté par l'équation

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1.32)$$

Le terme en \dot{x} est un terme de dissipation non linéaire.

– Si $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = -|\varepsilon|$ et

$$\ddot{x} + (|\varepsilon| + x^2)\dot{x} + x = 0$$

et le terme est toujours dissipatif.

La solution $x = 0, \dot{x} = 0$ est stable.

– Si $\varepsilon > 0$, ε correspond à un apport d'énergie : $x(t)$ croît, jusqu'à ce que le terme x^2 deviennent prépondérant, puis $x(t)$ décroît à cause de cette dissipation, et ainsi de suite.

Le système aura donc un comportement oscillant.

L'énergie du système E est

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 \quad (1.33)$$

et sa variation vaut

$$\frac{dE}{dt} = (\varepsilon - x^2)\dot{x}^2 \quad (1.34)$$

On peut penser qu'en moyenne, sur une période :

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = 0 \quad (1.35)$$

Faisons l'hypothèse que $0 < \varepsilon \ll 1$ et $x(t) = a \cos t$. Alors de (1.35), on tire

$$\varepsilon \langle \dot{x}^2 \rangle = \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle$$

et puisque

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}^2 \rangle &= \langle a^2 \sin^2 t \rangle = \frac{a^2}{2} \\ \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle &= \langle a^4 \sin^2 t \cos^2 t \rangle \\ &= a^4 \left\langle \frac{\sin^2 2t}{4} \right\rangle \\ &= \frac{a^4}{8} \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire a :

$$a \approx 2\sqrt{\varepsilon} \quad (1.36)$$

Les deux portraits de phase ne sont pas topologiquement équivalents car on ne peut établir de bijection entre eux. Lorsque l'on passe de $\varepsilon < 0$ à $\varepsilon > 0$, on dit que l'on a une bifurcation.

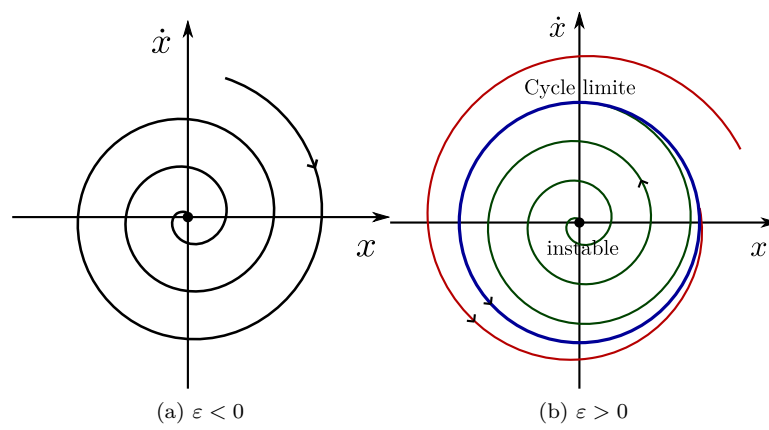


FIGURE 1.6 – Portrait de phase de l'oscillateur de van der Pol.

Chapitre 2

Bifurcations des points d'équilibre

2.1 Stabilité d'un point d'équilibre

On regarde un système dynamique continu (1.1)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Un point fixe noté \mathbf{x}^* est tel que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. Pour $\|\varepsilon\| \ll 1$, on a

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \varepsilon(t)$$

et

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = f_i(x_1^* + \varepsilon_1, \dots, x_n^* + \varepsilon_n) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^*} \varepsilon_j$$

Si $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\lambda t}$, alors

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \lambda \varepsilon_{0i} e^{\lambda t}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda \varepsilon_{0i} e^{\lambda t} &= \sum_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^* \varepsilon_{0j} e^{\lambda t} \\ \implies \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \varepsilon_{01} + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} - \lambda \right) \varepsilon_{0i} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \varepsilon_{0n} &= 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système de n équations linéaires, homogènes, à n inconnues (ε_{0i}). Les λ sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne

$$J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$$

\mathbf{x}^* est stable si et seulement si

$$\forall \lambda \quad \Re(\lambda) \leq 0$$

2.2 Quelques définitions

Définition 2.1 (Équivalence topologique). Un système dynamique défini dans $U \subset \mathbb{R}^n$ est topologiquement équivalent à un système dynamique défini dans $V \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe une bijection continue $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $h(U) = V$, qui envoie chaque orbite $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ d'un système dans l'autre, en conservant le sens du temps.

Définition 2.2 (Stabilité structurelle). Un système est structurellement stable s'il reste topologiquement équivalent à lui-même par une petite variation :

$$\dot{x} = f(x) \sim \dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x) \tag{2.1}$$

Exemple 2.1.

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \lambda \dot{x}$$

est un système structurellement instable car il est impossible de passer de cercles ($\lambda = 0$) à des spirales ($\lambda > 0$).

Définition 2.3 (Point fixe hyperbolique). Un point fixe x^* est dit hyperbolique si la matrice jacobienne $\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x^*}$ n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle.

Théorème 2.1 (Hartman–Grobman). Au voisinage d'un point fixe hyperbolique, un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ est localement topologiquement équivalent à sa linéarisation

$$\dot{\xi} = \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} \right] \xi \tag{2.2}$$

Théorème 2.2. Deux points fixes hyperboliques sont localement topologiquement équivalents si les matrices Jacobiennes ont les mêmes nombres n_+ (resp. n_-) de valeurs propres de parties réelles supérieures (resp. inférieures) ?

Exemple 2.2 (Puits et foyer).

- Puits (figure 2.1) : $n_- = 2, n_+ = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

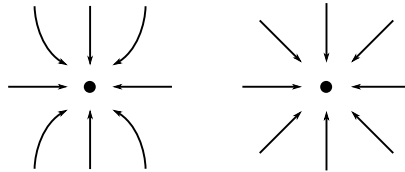


FIGURE 2.1 – Puits.

- Foyer (figure 2.2) : $n_- = 2, n_+ = 0, \lambda \in \mathbb{C}$.
- Point col (figure 2.3) : $n_- = 1, n_+ = 1, \lambda \in \mathbb{R}$.

Localement, les deux premiers sont équivalents.

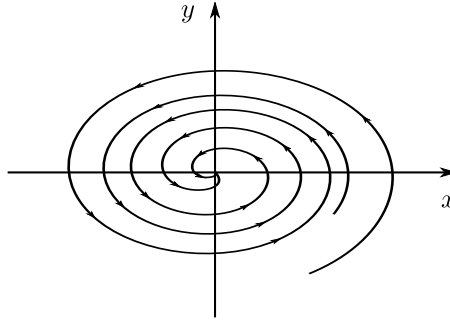


FIGURE 2.2 – Foyer.

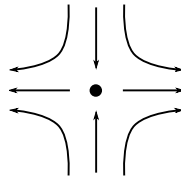


FIGURE 2.3 – Point-col.

2.3 Bifurcations de codimension 1 des points fixes

Définition 2.4 (Bifurcation). Une bifurcation est l'apparition d'un portrait de phase non topologiquement équivalent lors de la variation d'un paramètre.

Elle ne peut se produire que si le point fixe cesse d'être hyperbolique, donc si une valeur propre traverse l'axe imaginaire.

Définition 2.5 (Codimension). Soit $\dot{x} = f(x; \mu)$ où μ est l'ensemble des paramètres. La codimension est la dimension de l'espace des paramètres.

Une codimension de 1 implique que $\mu \in \mathbb{R}$: une valeur propre réelle s'annule et un couple de valeurs propres complexes conjuguées traverse $i\mathbb{R}$.

2.3.1 Cas d'une seule valeur propre réelle non dégénérée

x^* un point fixe ; $\lambda(\mu) = 0$ pour $\mu = \mu^*$. On prend x^* et μ^* comme origines.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x; \mu) & x, \mu \in \mathbb{R} \\ f(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

On fait une étude locale de la bifurcation, c'est à dire $|\mu|, |x| \ll 1$. On développe f au voisinage de $(0, 0)$:

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial \mu} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} x \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \mu^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} x^3 + \dots \quad (2.4)$$

Cas générique (sans hypothèses supplémentaires) :

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \mu \neq 0 \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 \neq 0$$

Par un choix arbitraire d'échelles de temps et pour x , on a

$$\dot{x} = \pm\mu \pm x^2 \quad (2.5)$$

- Cas $(+, +)$: les points fixes sont $x = \pm\sqrt{-\mu}$ définis pour $\mu < 0$. Si on prend $x(t) = \pm\sqrt{-\mu} + \varepsilon(t)$, alors

$$\dot{\varepsilon} = \mu + (\pm\sqrt{-\mu} + \varepsilon)^2 = \pm 2\varepsilon\sqrt{-\mu}$$

On observe une bifurcation noeud-col. Quand $\mu > 0$, les positions d'équilibre disparaissent.

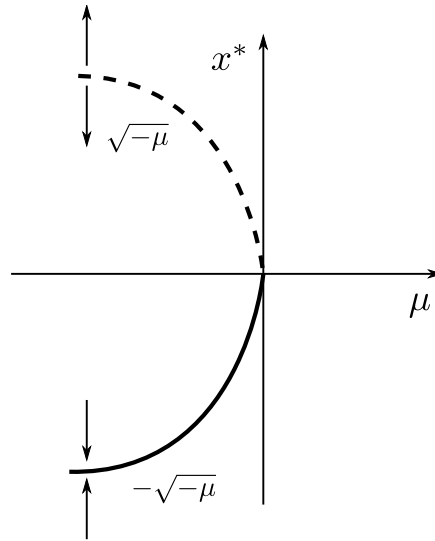


FIGURE 2.4 – Bifurcation noeud-col.

Sur un diagramme de bifurcation, on représente en trait plein les points stables, et en pointillés les points instables.

Si on a persistance d'un équilibre $X(\mu)$ tel que $X(0) = 0$ et $f(X(\mu), \mu) = 0$. On pose $x = X(\mu) + x'$ donc $\forall \mu \quad f(0, \mu) = 0$, d'où

$$\frac{\partial^n f}{\partial \mu^n} = 0$$

Par un autre choix d'échelles de temps et pour x (en fait x'), on a

$$\dot{x} = \pm\mu x \pm x^2$$

Regardons le cas $(+, +)$: $\dot{x} = x(\mu + x)$, et les points fixes sont $x = 0$ et $x = -\mu$. Si $x = -\mu + \varepsilon$, donc $\dot{\varepsilon} \approx -\mu\varepsilon$. On observe une bifurcation avec échange de stabilité, ou encore bifurcation transcritique (figure 2.5).

Faisons l'hypothèse supplémentaire qu'il y a symétrie par réflexion :

$$f(-x, \mu) = f(x, \mu) \implies \frac{\partial^{2p} f}{\partial x^{2p}} = 0 \quad (2.6)$$

et

$$\dot{x} = \pm\mu x \pm x^3 \quad (2.7)$$

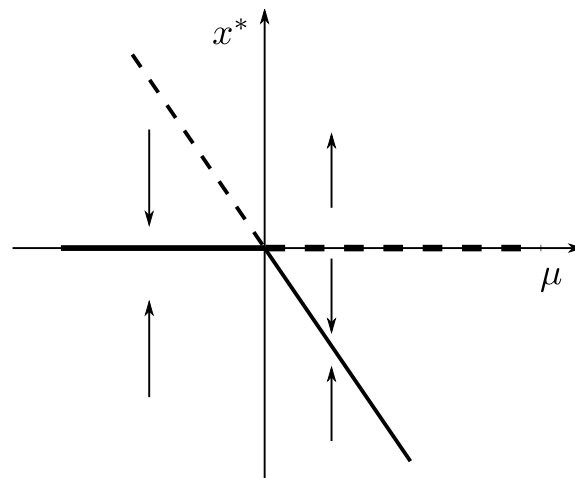


FIGURE 2.5 – Bifurcation transcritique.

Regardons le cas $(+, -)$: $\dot{x} = x(\mu - x^2)$, et les points fixes sont $x = 0$ (stable si $\mu \leq 0$) et $x = \pm\sqrt{\mu}$ (existe si $\mu > 0$). Avec $x(t) = \pm\sqrt{\mu} + \varepsilon$:

$$\dot{\varepsilon} = \mp 2\sqrt{\mu}\varepsilon(\pm\sqrt{\mu} + \varepsilon) \approx -2\mu\varepsilon$$

stable si $\mu > 0$. On observe une bifurcation fourche surcritique¹ (figure 2.6).

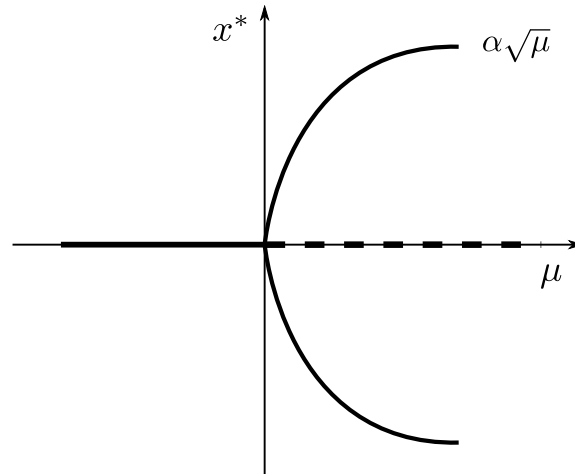


FIGURE 2.6 – Bifurcation fourche surcritique.

Cas $(+, +)$: $\dot{x} = x(\mu + x^2)$ et les points stables sont $x = 0$ (stable si $\mu \leq 0$) et $x = \pm\sqrt{-\mu}$ (existe si $\mu < 0$). $\dot{\varepsilon} = -2\mu\varepsilon$. On observe une bifurcation fourche subcritique (figure 2.7).

Pour voir ce qu'il advient de la solution, on prend un terme de plus dans le développement :

$$\dot{x} = x(\mu + x^2 - gx^4) \quad g > 0$$

1. Pitchfork en anglais.

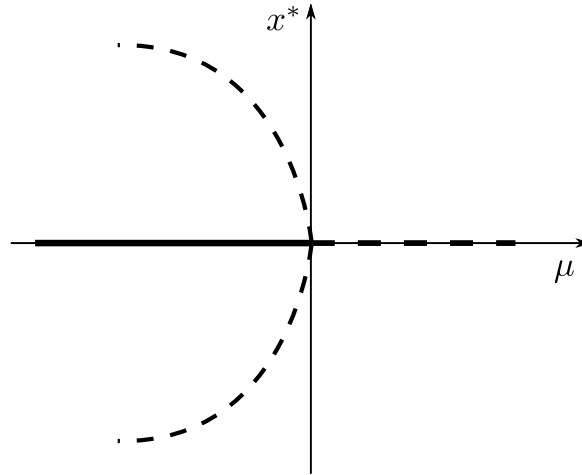


FIGURE 2.7 – Bifurcation fourche subcritique.

On prend le terme suivant :

$$\dot{x} = x(\mu + x^2 - gx^4) \quad (2.8)$$

avec par hypothèse $g > 0$. Les points fixes sont :

- $x = 0$.
- $\mu + x^2 - gx^4$ étant une expression bicarré, on obtient deux autres solutions

$$x^* = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4g\mu}}{2g}} \quad (2.9)$$

Soit $x = x^* + \varepsilon(t)$, alors

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= (x^* + \varepsilon)(\mu + x^{*2} + 2x^*\varepsilon) - gx^{*4} - 4gx^{*3}\varepsilon \\ &= (2x^{*2} - 4gx^{*4})\varepsilon \\ &= \underbrace{2x^{*2}}_{\geq 0} \underbrace{(1 - 4gx^{*4})}_{1 - 1 \mp \sqrt{1 + 4g\mu}} \varepsilon \end{aligned}$$

donc x_{++}^* et x_{-+}^* sont stables, tandis que donc x_{+-}^* et x_{--}^* sont instables.

Conséquences expérimentales de la sous-criticalité : imaginons que l'on fasse varier lentement le paramètre μ .

- Bifurcation surcritique : évolution continue et réversible de x^* , avec $x^* = \alpha\sqrt{\mu - \mu_c}$.
- Bifurcation subcritique : hystérésis sur la valeur μ à la bifurcation. x^* est discontinu à la bifurcation.

2.3.2 Cas d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle nulle

À la bifurcation, $\lambda = \pm i\omega$. En variables complexes :

$$\dot{Z} = (\sigma + i\omega)Z - g|Z|^2 Z$$

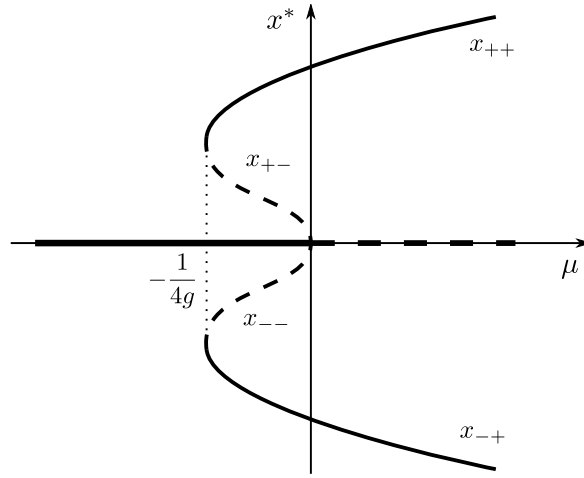


FIGURE 2.8 – Bifurcation fourche subcritique.

avec $g = g_r + ig_i$, alors

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

\mathcal{L} : valeurs propres : $\sigma \pm i\omega$.

On pose $Z = R(t) e^{i\theta(t)}$, alors

$$\dot{Z} = (\dot{R} + iR\dot{\theta}) e^{i\theta}$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \sigma R - g_r R^3 \\ \dot{\theta} &= \omega - g_i R^2 \end{aligned}$$

Les points fixes sont :

– $R = 0$.

–

$$R^* = \sqrt{\frac{\sigma}{g_r}}$$

Cas $g_r > 0$. R^* existe si $\sigma > 0$.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \sigma(R^* + \varepsilon) - g_r(R^{*3} + 3R^{*2}\varepsilon) \\ &= (\sigma - 3R^{*2}g_r)\varepsilon \\ &= -2\sigma\varepsilon \end{aligned}$$

stable si $\sigma > 0$. Donc

$$Z = R^* e^{i(\omega t - g_i R^{*2} t)}$$

Pour $g_r < 0$, on a une bifurcation subcritique et il faut introduire des termes d'ordre 5 :

$$\dot{Z} = (\sigma + i\omega)Z + (|g_r| + ig_i)|Z|^2 Z - (h_r + ih_i)|Z|^4 Z$$

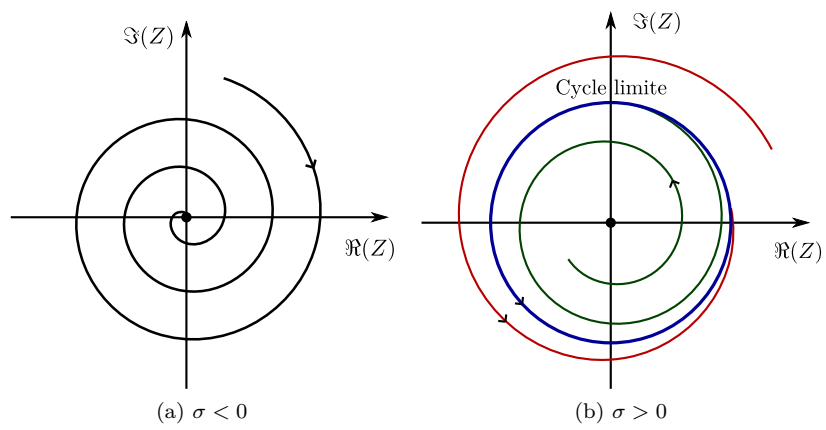


FIGURE 2.9 – Bifurcations d'Andronov-Hopf surcritique.

Chapitre 3

Transition vers le chaos

3.1 Instabilités des cycles limites

3.1.1 Section de Poincaré

Hypothèse : le système dynamique admet un cycle limite : une courbe fermée de \mathbb{R}^n .

Problème : si on veut étudier la stabilité du cycle, il faut a priori étudier tout un domaine de l'espace.

On coupe le cycle limite \mathcal{C} par un plan Π , en un point M . Soit un point $P \in \mathcal{C}$. Le système dynamique est en P aux dates $t, t+T, t+2T \dots$

Prenons un point M_1 voisin de P , mais $M_1 \notin \mathcal{C}$. Une trajectoire partant de M_1 va croiser le plan Π en un point M_2 voisin de M_1 . On construit M_3, \dots, M_n .

On construit une application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ M_i &\longmapsto M_{i+1} = \Phi(M_i)\end{aligned}$$

Cette application est l'application de premier retour.

Le plan Π est la section de Poincaré.

Si P est un point fixe de Φ , on a $\Phi(P) = P$. On pose

$$\begin{aligned}P &= \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ M_1 &= \begin{pmatrix} x_1^0 + \varepsilon_1 \\ x_2^0 + \varepsilon_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}M_2 \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1^0 + \varepsilon_1, x_2^0 + \varepsilon_2) \\ \Phi_2(x_1^0 + \varepsilon_1, x_2^0 + \varepsilon_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1^0, x_2^0) + \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ \Phi_2(x_1^0, x_2^0) + \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ \implies M_2 &= P + \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire

$$M_2 = P + J(\Phi)\varepsilon \quad (3.1)$$

où $J(\Phi)$ est la matrice Jacobienne de Φ . On trouve finalement

$$M_n = P + J(\Phi)^n \varepsilon \quad (3.2)$$

Si toutes les valeurs propres de $J(\Phi)$ sont de module inférieur à 1, l'écart avec P se réduit et P est stable, donc le cycle limite est stable. S'il existe une valeur propre de module supérieur à 1, P est instable et le cycle limite est instable.

Il y a bifurcation si une valeur propre traverse le cercle unité.

3.1.2 Forme normale de la bifurcation

On prendra l'origine du plan en P . La régularité de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ assurent la régularité de Φ . Donc Φ admet un développement limité au voisinage de l'origine.

$$Z_{n+1} = \lambda Z_n + \sum_{m \geq 2} \left(\sum_{0 \leq j \leq m} a_{mj} Z_n^{m-j} \underline{Z}_n^j \right) \quad (3.3)$$

Par hypothèse, $|\lambda| = 1$.

- Idée directrice : on fait un changement de variable, proche de l'identité, non linéaire afin d'éliminer les termes linéaires du développement.
- Technique : on procède ordre par ordre : termes quadratiques, cubiques...

Termes quadratiques

On a

$$Z = z + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_{2j} z^{2-j} \underline{z}^j \quad (3.4)$$

et

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= z_{n+1} + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_{2j} z_{n+1}^{2-j} \underline{z}_{n+1}^j + O(|z|^3) \\ &= z_{n+1} + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_{2j} \lambda^{2-j} \underline{\lambda}^j z_n^{2-j} \underline{z}_n^j + O(|z|^3) \\ &= \lambda \left(z_n + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_{2j} z_n^{2-j} \underline{z}_n^j \right) + \sum_{0 \leq j \leq 2} a_{2j} z_n^{2-j} \underline{z}_n^j + O(|z|^3) \end{aligned}$$

avec

$$z_{n+1} = \lambda z_n + \sum_{0 \leq j \leq 2} (a_{2j} + (\lambda - \lambda^{2-j} \underline{\lambda}^j) c_{2j}) z_n^{2-j} \underline{z}_n^j + O(|z|^3)$$

On choisit

$$c_{2j} = \frac{1}{\lambda^{2-j} \underline{\lambda}^j - \lambda} a_{2j}$$

sous réserve que $\lambda^{2-j} \underline{\lambda}^j - \lambda \neq 0$.

- Cas $j = 0$: $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.
- Cas $j = 1$: $|\lambda|^2 - \lambda = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 1$.
- Cas $j = 2$: $\underline{\lambda}^2 - \lambda = 0 \Rightarrow 1 - \lambda^3 = 0$ ou encore $\lambda = e^{2i\pi/3}$.

On appelle cas de résonance forte $\lambda = 1$, qui sera étudié à part. λ^3 ne sera pas étudié non plus.

Termes cubiques

On a

$$z = w + \sum_{0 \leq j \leq 3} c_{3j} w^{3-j} \underline{w}^j \quad (3.5)$$

et

$$z_{n+1} = \lambda z_n + \sum_{0 \leq j \leq 3} a'_{3j} z_n^{3-j} \underline{z}_n^j + O(|z|^4)$$

Les coefficients a'_{3j} sont différents de ceux apparaissant dans (3.3) car l'étape précédente les a changé. O, aura

$$w_{n+1} = \lambda w_n + \sum_{0 \leq j \leq 3} (a'_{3j} + (\lambda - \lambda^{3-j} \underline{\lambda}^j) c_{3j}) w_n^{3-j} \underline{w}_n^j + O(|z|^4)$$

- Cas $j = 0$: $\lambda - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$ donc $\lambda = \pm 1$. Le cas $\lambda = -1$ sera vu en détails.
- Cas $j = 1$: $\lambda - \lambda^2 \underline{\lambda} = 1 \Rightarrow 1 - |\lambda|^2 = 0$. Il n'est pas possible d'enlever ce terme. Il est associé à a'_{31} .
- Cas $j = 2$: $\lambda - \lambda \underline{\lambda}^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$.
- Cas $j = 3$: $\lambda - \underline{\lambda}^3 = 0 \Rightarrow \lambda^4 = 1$. Cette dernière résonance forte ne sera pas étudiée.

3.2 Bifurcations des cycles limites

3.2.1 Bifurcation de Hopf secondaire

Dans le cas général : $\lambda \neq \pm 1, \lambda^3 \neq 1, \lambda^4 \neq 1$. Au voisinage du point fixe $w = 0$, et au voisinage de la bifurcation :

$$\lambda = (1 + \alpha) e^{i\theta} \quad \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| \ll 1$$

$$w_{n+1} = \lambda w_n + a w_n^2 \underline{w}_n$$

et en écrivant $a = d e^{i\theta}, d \in \mathbb{C}$ et $w = \rho e^{i\theta}$, on obtient :

$$w_{n+1} = e^{i\theta} w_n (1 + \alpha + d |w_n|^2)$$

$$\rho_{n+1} = \rho_n |1 + \alpha + d \rho_n^2| \quad d = d_r + i d_i$$

$$\rho_{n+1} = \rho_n (1 + \alpha) \sqrt{1 + \frac{2d_r}{1 + \alpha} \rho_n^2 + \frac{|d|^2}{(1 + \alpha)^2} \rho_n^4}$$

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \theta + O(\rho_n^2)$$

donc

$$\rho_{n+1} = \rho_n (1 + \alpha + d_r \rho_n^2) + O(\rho_n^4)$$

Les points fixes sont $\rho^* = 0$, stable si $\alpha < 0$:

$$1 = 1 + \alpha + d_r \rho^{*2} \Rightarrow \rho^* = \sqrt{\frac{-\alpha}{d_r}}$$

Hypothèse : $d_r < 0$ donc ρ^* existe si $\alpha \geq 0$. Posons $\rho_n = \rho^* + \varepsilon_n$, alors

$$\begin{aligned}\rho^* + \varepsilon_{n+1} &= (\rho^* + \varepsilon_n) \left(1 + \alpha - |d_r| (\rho^{*2} + 2\rho^* \varepsilon_n) \right) \\ &= (\rho^* + \varepsilon_n) (1 - 2|d_r| \rho^* \varepsilon_n)\end{aligned}$$

donc

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n (1 - 2|d_r| \rho^*) = \varepsilon_n (1 - 2\alpha)$$

stable si $\alpha > 0$. Il s'agit d'une bifurcation de Hopf secondaire surcritique.

Le cycle limite (oscillations périodiques de pulsation ω_1) se destabilise au profit d'un tore \Rightarrow oscillations quasipériodiques de périodes ω_1, ω_2 et de tous leurs harmoniques.

- $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, le cycle limite dans le plan Π est le cercle entier, et les orbites sont denses sur le tore.
- $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$, il y a résonance et le cycle bifurqué est un nombre fini de points.

Chapitre 4

Méthodes perturbatives

4.1 Oscillations d'amplitude finie d'une pendule pesant

L'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (4.1)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (4.2)$$

qui s'intègre en

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos \theta = cste \quad (4.3)$$

On choisit l'origine des énergies potentielles en $\theta = 0$ donc

$$\frac{E}{m\ell^2} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \theta) \quad (4.4)$$

Avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, on a

$$E(0) = \omega_0^2 (1 - \cos \theta_0) \quad (4.5)$$

ce qui signifie que l'on a des oscillations d'amplitude θ_0 . Comme l'énergie est conservée, on a

$$\omega_0^2 (1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos \theta \quad (4.6)$$

que l'on inverse en

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (4.7)$$

Calculons maintenant la période d'oscillations $T(\theta_0)$:

$$T(\theta_0) = 4 \int_0^{\theta_0} dt = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

On a $\dot{\theta} > 0$ et

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

donc

$$T(\theta_0) = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta_0/2 - \sin^2 \theta/2}}$$

et on procède au changement de variable

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \phi \\ \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta &= \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \phi d\phi \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} T(\theta_0) &= \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta_0/2 \cos \phi}{\sin \theta_0/2 \cos \phi \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0/2 \sin^2 \phi}} d\phi \\ &= \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \end{aligned}$$

que l'on note

$$T(\theta_0) = \frac{4}{\omega_0} K(k^2 = \sin^2 \theta_0/2) \quad (4.8)$$

où K est l'intégrale elliptique complète.

Calculons la première correction en θ_0 à $T(\theta_0)$: $\theta_0 \ll 1$, donc $k \approx \theta_0^2/2 \ll 1$ et

$$(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} \approx 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \phi$$

donc

$$\begin{aligned} T(\theta_0) &\approx \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \phi\right) d\phi \\ &= \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{4} \cos 2\phi\right) d\phi \\ &= \frac{4}{\omega_0} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right) \frac{\pi}{2} - \frac{k^2}{\omega_0} \frac{\sin 2\phi}{2} \Big|_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

et finalement on obtient

$$T(\theta_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) + O(\theta_0^4) \quad (4.9)$$

4.2 Résolution approchée des équations du mouvement

On prend les conditions initiales $\theta(0) = \varepsilon \ll 1$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

4.2.1 Développement asymptotique "naïf"

$$\theta(t) = \varepsilon \theta_1(t) + \varepsilon^2 \theta_2(t) + \dots \quad (4.10)$$

On calcule ordre par ordre les fonctions $\theta_i(t)$. On veut que ce développement soit asymptotique, c'est à dire

$$\frac{|\theta_i|}{|\theta_{i+1}|} \quad (4.11)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \theta_1(0) = 1 \\ \theta_i(0) = 0 & i > 1 \\ \dot{\theta}_j(0) = 0 & \forall j \end{cases} \quad (4.12)$$

On a pour $\sin \theta$:

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5) = \varepsilon\theta^1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3 \left(\theta_3 - \frac{\theta_1^3}{6} \right) + O(\varepsilon^4) \quad (4.13)$$

– Ordre ε :

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = 0 \implies \theta_1(t) = \cos \omega_0 t$$

– Ordre ε^2 :

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = 0 \implies \theta_2(t) = 0$$

– Ordre ε^3 :

$$\ddot{\theta}_3 + \omega_0^2\theta_3 - \frac{\omega_0^2}{6}\theta_1^3 = 0 \implies \ddot{\theta}_3 + \omega_0^2\theta_3 = \frac{\omega_0^2}{24}(\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)$$

qui est une équation différentielle avec deux termes de forçage.

Pour $\theta_3 = \alpha \cos 3\omega_0 t$ on a

$$-8\omega_0^2\alpha = \frac{\omega_0^2}{24} \implies \alpha = -\frac{1}{192}$$

Pour le forçage en ω_0 , on a $\theta_3 = \beta t \sin \omega_0 t$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_3 &= \beta \sin \omega_0 t + \beta \omega_0 t \cos \omega_0 t \\ \ddot{\theta}_3 &= 2\omega_0\beta \cos \omega_0 t - \beta \omega_0^2 t \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

ce qui donne

$$2\omega_0\beta = \frac{\omega_0^2}{8} \implies \beta = \frac{\omega_0}{16}$$

donc

$$\theta_3 = \frac{1}{192} \cos \omega_0 t + \underbrace{\frac{\omega_0 t}{16} \sin \omega_0 t}_{\text{diverge}} - \frac{1}{192} \cos 3\omega_0 t \quad (4.14)$$

Le terme divergent est appelé terme séculaire. Il n'est pas acceptable car non périodique et il ne laisse pas l'énergie conservée.

4.2.2 Double développement : la méthode de Poincaré–Lindstedt

On intègre directement au début du calcul le fait que la période dépend de l'amplitude. On prend

$$\begin{cases} \theta(t) = \varepsilon\theta_1(t) + \varepsilon^3\theta_3(t) + \dots \\ \tau = \omega t = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)t \end{cases} \quad (4.15)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{d\theta}{d\tau} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= (\omega_0^2 + 2\omega_0\omega_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon_4)) \frac{d^2\theta}{d\tau^2} \end{aligned}$$

– Ordre ε :

$$\omega_0^2 \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} = -\omega_0^2\theta_1 \implies \theta_1 = \cos \tau$$

– Ordre ε^3 :

$$\omega_0^2 \frac{d^2\theta_3}{d\tau^2} + 2\omega_0\omega_2 \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} = -\omega_0^2 \left(\theta_3 - \frac{\theta_1^3}{6} \right)$$

ce qui se réécrit

$$\frac{d^2\theta_3}{d\tau^2} + \theta_3 = -2\frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \frac{\theta_1^3}{6} = \frac{1}{4} \cos 3\tau + \underbrace{\cos \tau \left(\frac{1}{8} + \frac{2\omega_2}{\omega_0} \right)}_{\text{terme résonant}}$$

On choisit

$$\omega_2 = \frac{-\omega_0}{16} \quad (4.16)$$

qui supprime le terme résonant.

La solution complète à l'ordre 3 est alors

$$\theta(\tau) = \varepsilon \cos \tau + \frac{\varepsilon^3}{192} (\cos \tau - \cos 3\tau) + O(\varepsilon^5) \quad (4.17)$$

et finalement en revenant à t :

$$\theta(t) = \varepsilon \cos \omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right) t + \frac{\varepsilon^3}{192} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) + O(\varepsilon^5) \quad (4.18)$$

La période est donc

$$\frac{2\pi}{\omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right)} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{16} \right) \quad (4.19)$$

4.2.3 Méthode des échelles multiples

Il s'agit d'un double développement. Son intérêt est de ne pas être restreinte aux problèmes d'oscillations.

Appliquons la encore à l'équation

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \quad (4.20)$$

L'idée est de faire une séparation formelle des échelles de temps :

- $T_0 = t$: échelle rapide.
- $T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$: échelles lentes ($\varepsilon \ll 1$).
- Ici $T_1 = 0$.

Nous avons aussi

$$\theta = \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^3 \theta + \dots$$

Les T_i seront traités comme des variables indépendantes : $\theta(t) \rightarrow \theta(T_0, T_1, \dots)$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial \theta}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial T_2} + \dots \\ \ddot{\theta} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial T_1 \partial T_2} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial T_1^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

- À l'ordre ε :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 \theta_1 = 0 \quad (4.21)$$

et la solution est

$$\theta_1 = A(T_2, T_3, \dots) e^{i\omega_0 T_0} + A^*(T_2, T_3, \dots) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (4.22)$$

- À l'ordre ε^3 :

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 \theta_3}_{\text{EDP linéaire}} = \underbrace{-2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\omega_0^2}{6} \theta_1^3}_{\text{terme de forçage}} \quad (4.23)$$

On a

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0 \partial T_2} = i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_2} e^{i\omega_0 T_0} - i\omega_0 \frac{\partial A^*}{\partial T_2} e^{-i\omega_0 T_0}$$

et

$$\theta_1^3 = A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + 3A^2 A^* e^{i\omega_0 T_0} + 3AA^{*2} e^{-i\omega_0 T_0} + A^{*3} e^{-3i\omega_0 T_0}$$

Condition de solvabilité : annulation du terme de forçage résonant :

$$\begin{aligned} -2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_2} + \frac{\omega_0^2}{6} A^2 A^* &= 0 \\ \implies \frac{\partial A}{\partial T_2} &= -i \frac{\omega_0}{4} A^2 A^* \end{aligned}$$

Si on pose

$$A(T_2) = R(T_2) e^{i\phi(T_2)}$$

alors

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \frac{\partial R}{\partial T_2} e^{i\phi} + iR \frac{\partial \phi}{\partial T_2} e^{i\phi}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial T_2} + iR \frac{\partial \phi}{\partial T_2} &= -i \frac{\omega_0}{4} R^3 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial T_2} = 0 \implies R = R(T_3, \dots) \\ \frac{\partial \phi}{\partial T_2} = -\omega_0^2 \frac{R^2}{4} \implies \phi = \phi_0 - \frac{R^2}{4} \omega_0 T_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exemple 4.1 (Forme normale de la bifurcation de Hopf).

$$\dot{z} = i\Omega z + g_{20}z^2 + g_{11}zz^* + g_{02}z^{*2} + g_{30}z^3 + g_{21}z^2z^* + g_{12}zz^{*2} + g_{03}z^{*3} \quad (4.24)$$

On pose

$$\begin{cases} z = \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^3 z_3 + \dots \\ z(t) = z(T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 T_2, \dots) \end{cases} \quad (4.25)$$

- À l'ordre ε :

$$\frac{\partial z_1}{\partial T_0} = i\Omega z_1 \quad (4.26)$$

donc

$$z_1 = A(T_1, T_2, \dots) e^{i\Omega T_0} \quad (4.27)$$

A ne dépend pas de T_1 .

- À l'ordre ε^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_2}{\partial T_0} - i\Omega z_2 &= -\frac{\partial z_1}{\partial T_1} + g_{20}A^2 e^{2i\Omega T_0} + g_{11}|A|^2 + g_{02}A^{*2} e^{-2i\Omega T_0} \\ \frac{\partial z_1}{\partial T_1} &= \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\Omega T_0} \end{aligned}$$

La seconde équation est résonante : la condition de solvabilité est

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} \quad (4.28)$$

Alors $z_2 = \alpha e^{2i\Omega T_0}$ et $i\Omega \alpha = g_{20}A^2$ donc

$$z_2 = \frac{g_{20}A^2}{i\Omega} e^{2i\Omega T_0} - \frac{g_{11}|A|^2}{i\Omega} - \frac{g_{02}A^{*2}}{3i\Omega} e^{-2i\Omega T_0} \quad (4.29)$$

À l'ordre ε^3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_3}{\partial T_0} - i\Omega z_3 &= -\frac{\partial z_1}{\partial T_2} + 2g_{20}z_1z_2 + g_{11}(z_1z^*{}_2 + z_2z^*{}_1) \\ &\quad + 2g_{02}z_1^*z_2^* + g_{30}z_1^3 + g_{21}z_1^2z_1^* + g_{12}z_1z_1^{*2} + g_{03}z_1^{*3} \end{aligned}$$

On ne cherche que le terme résonant en $e^{i\Omega T_0}$:

$$-\frac{\partial A}{\partial T_2} + g_{21}A^2A^* - \frac{2g_{20}g_{11}}{i\Omega}A|A|^2 + \frac{|g_{11}|^2}{i\Omega}|A|^2A + \frac{2|g_{02}|^2}{3i\Omega} = 0$$

donc

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \left(g_{21} - \frac{g_{20}g_{11}}{i\Omega} + \frac{|g_{11}|^2}{i\Omega} + \frac{2|g_{02}|^2}{3i\Omega} \right) |A|^2 A \quad (4.30)$$

Chapitre 5

Ondes dispersives non linéaires

5.1 Ondes de gravité à la surface d'un fluide

5.1.1 Hypothèses générales

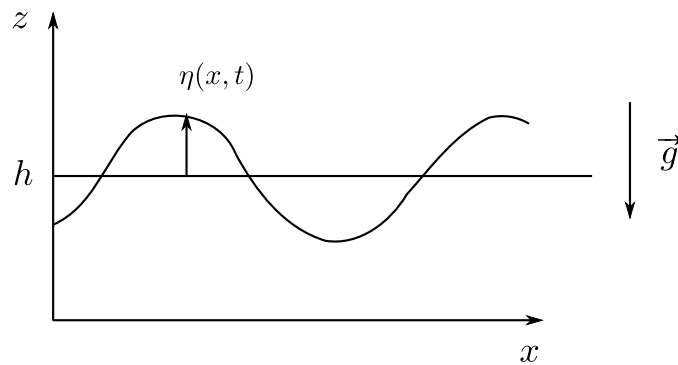


FIGURE 5.1 – Onde de gravité.

Hypothèses :

- Fluide parfait ($\eta = 0$).
- Fluide incompressible.
- On néglige les forces capillaires :

$$\lambda \gg l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (5.1)$$

Puisque le fluide est incompressible on a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

et puisque le fluide est parfait, il existe un potentiel scalaire ϕ tel que

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (5.3)$$

En combinant ces deux équations, on obtient l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.4)$$

On considère le fond comme étant imperméable, c'est à dire que l'on a la condition

$$v_z(z = 0, t) = 0 \quad (5.5)$$

On a un problème de surface libre : les autres conditions doivent être écrites à la surface du fluide :

$$z = h + \eta(x, t) \quad (5.6)$$

Écrivons l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(gz) \quad (5.7)$$

où on peut réécrire le second terme du membre de gauche :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (5.8)$$

où le dernier terme est nul car $\nabla \times \mathbf{v}$ est conservé pour un fluide parfait : s'il est nul au départ, il est nul pour tout t . En combinant les deux dernières équations, on obtient

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (5.9)$$

À la surface, $p = p_0$, donc on a

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz \right]_{z=h+\eta(x,t)} = f(t) \quad (5.10)$$

Or, puisque ϕ est défini à une fonction du temps près, on peut prendre $f(t) = 0$. De plus, on peut écrire

$$\frac{p_0}{\rho} = -gh$$

Pour définir l'interface, on établit la continuité de la vitesse :

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \eta = v_z(h + \eta, t) \quad (5.11)$$

5.1.2 Ondes linéaires

En utilisant (5.10) et (5.11), on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=h} + g\eta = 0 \quad (5.12)$$

où on a négligé v^2 puisque l'on s'intéresse à des ondes linéaires¹, et

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_z(h, t) \quad (5.13)$$

1. Il faudrait mettre l'équation sous une forme adimensionnée, en construisant des nombres sans dimension grâce à une unité de longueur (h) et à une unité de temps ($\sqrt{h/g}$). On trouvera que v est presque négligeable, ce qui justifie l'approximation.

On cherche des solutions de la forme

$$\eta(x, t) = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.14a)$$

$$\phi(x, z, t) = f(z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.14b)$$

et, en injectant dans (5.4), on obtient

$$-k^2 f + f'' = 0 \quad (5.15)$$

donc

$$f(z) = A e^{kz} + B e^{-kz} \quad (5.16)$$

et les conditions aux limites donnent

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \implies A = B$$

donc

$$\phi(x, z, t) = \phi_0 \operatorname{ch} kz e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.17)$$

et

$$\begin{cases} -i\omega\phi_0 \operatorname{ch} kh + g\eta_0 = 0 \\ k\phi_0 \operatorname{sh} kh + i\omega\eta_0 = 0 \end{cases}$$

La relation de dispersion $\omega(k)$ s'obtient par l'annulation du déterminant

$$\begin{vmatrix} -i\omega \operatorname{ch} kh & g \\ k \operatorname{sh} kh & i\omega \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh \quad (5.18)$$

– Si $kh \ll 1$, c'est à dire $h \ll \lambda$, on peut effectuer un développement limité

$$\operatorname{th} kh = kh - \frac{(kh)^3}{3} \approx kh$$

– Si $\lambda \gg h$, on a

$$\omega = \sqrt{gh} k \quad (5.19)$$

5.2 L'équation de Korteweg–de Vries

5.2.1 Ondes faiblement dispersives

On a

$$\omega^2 = gk \left(kh - \frac{k^3 h^3}{3} \right) \quad (5.20)$$

ou encore

$$\omega \approx \sqrt{gh} k \left(1 - \frac{k^2 h^2}{6} \right) \quad (5.21)$$

On pose

$$c_0 = \sqrt{gh} \quad (5.22)$$

qui correspond à la vitesse des ondes pour $\lambda \rightarrow \infty$. On devine, à partir de la relation de dispersion, l'équation

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (5.23)$$

5.2.2 Ondes dispersives faiblement non linéaires

Pour des ondes linéaires, $\eta \ll h$, qui correspond à la vitesse $c_0 = \sqrt{gh}$. Si cette condition n'est plus vérifiée, localement la vitesse est

$$c = \sqrt{g(h + \eta)} = c_0 \sqrt{1 + \frac{\eta}{h}}$$

donc

$$c \approx c_0 \left(1 + \frac{\eta}{2h}\right) \quad (5.24)$$

Par ailleurs, la vitesse du fluide dépend de l'élévation :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &\sim \frac{g\eta_0 \operatorname{ch} k(h + \eta)}{\omega \operatorname{ch} kh} e^{i(kx - \omega t)} \\ &\sim gh \frac{\eta}{h} \frac{k}{\omega} \sim c_0 \frac{\eta}{h} \end{aligned}$$

Pour un observateur au repos, la vitesse de l'onde est donnée par la composition des vitesses de Galilée et vaut

$$v = c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h}\right) \quad (5.25)$$

Dans le cas d'ondes faiblement dispersives et faiblement non linéaires, on obtient l'équation de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (5.26)$$

Cette équation décrit des ondes se propageant vers les x positifs uniquement.

5.2.3 Notions d'onde solitaire

Effets dispersifs

La solution générale à une équation d'onde dispersive linéaire s'obtient par une superposition d'ondes monochromatiques.

Un paquet d'onde est de la forme

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (5.27)$$

où $A(k)$ est l'amplitude du mode de vecteur d'onde k . On peut préciser l'évolution de $\eta(x, t)$ sous deux hypothèses :

1. $\omega(k)$ ne varie pas trop avec k .
2. La distribution $A(k)$ est piquée autour d'un nombre d'onde k_0 , c'est à dire $A(k) \approx 0$ si $k \notin [k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$.

On a

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\omega'(k_0) + \frac{(k - k_0)^2}{2}\omega''(k_0) + \dots$$

et en remplaçant ω dans (5.27) par les deux premiers termes

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[kx - \omega_0 t - (k - k_0)\omega'(k_0)t]} dk \\ &\approx \frac{e^{-i\omega_0 t + ik_0 \omega'_0 t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik[x - \omega'(k_0)t]} dk \\ &= e^{-i\omega_0 t + ik_0 \omega'_0 t} \eta(x - \omega'(k_0)t, 0)\end{aligned}$$

Au premier ordre en $k - k_0$, le signal se propage sans déformation à la vitesse $\omega'(k_0) = v_g(k_0)$ qui est la vitesse de groupe au nombre k_0 . Il s'agit de la vitesse de propagation de l'énergie.

Pour $\eta(x, 0)$ on prendra une distribution gaussienne, c'est à dire

$$\eta(x, 0) = \eta_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2}\right) e^{ik_0 x} \quad (5.28)$$

On obtient $A(k)$ par transformée de Fourier

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2} - i(k - k_0)x\right) dx$$

c'est à dire

$$A(k) = \eta_0 L \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2 L^2}{2}\right) \quad (5.29)$$

et ainsi

$$\begin{cases} \Delta x \propto L \\ \Delta k \propto 1/L \end{cases} \quad (5.30)$$

Dans la suite, on pose $\delta k = k - k_0$. $\eta(x, t)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &\approx \frac{\eta_0 L}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta k^2 L^2}{2} + ik_0 x + i\delta k(x - \omega'_0 t) - i\omega_0 t - \frac{i}{2}\omega''_0 \delta k^2 t\right) d\delta k \\ &= \frac{\eta_0 L}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta k^2 \tilde{L}(t)^2}{2} + i\delta k(x - \omega'_0 t)\right) d\delta k\end{aligned}$$

en posant

$$\tilde{L}(t)^2 = L^2 + i\omega''_0 t \quad (5.31)$$

On écrit alors le terme dans l'exponentielle sous la forme d'un carré parfait :

$$-\frac{\delta k^2 \tilde{L}(t)^2}{2} + i\delta k(x - \omega'_0 t) = -\left(\delta k \sqrt{\frac{\tilde{L}(t)^2}{2} - i\frac{x - \omega'_0 t}{\sqrt{2\tilde{L}(t)^2}}}\right)^2 - \frac{(x - \omega'_0 t)^2}{2\tilde{L}(t)^2}$$

Pour calculer l'intégrale, on utilise la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-u\sqrt{a + ib} + ic\right)^2 du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a + ib}} \quad a > 0 \quad (5.32)$$

ce qui donne

$$\eta(x, t) = \frac{\eta_0 L}{\sqrt{L^2 + i\omega''_0 t}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \exp\left(-\frac{x - \omega'_0 t}{2(L^2 + i\omega''_0 t)}\right) \quad (5.33)$$

et l'amplitude est alors

$$|\eta(x, t)| = \underbrace{\frac{|\eta_0| L}{(L^4 + \omega_0''^2 t^2)^{1/4}}}_{\text{amplitude}} \exp\left(\underbrace{-\frac{x - \omega_0' t}{2(L^2 + \omega_0''^2 t^2 / L^2)}}_{\text{largeur}}\right) \quad (5.34)$$

Quand $t \rightarrow \infty$, on obtient

$$A \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\ell(t) = \sqrt{L^2 + \frac{\omega_0''^2 t^2}{L^2}} \sim \frac{|\omega_0''| t}{L}$$

On a bien une conservation de l'énergie (sans déformation) puisque $a^2 \ell$ est conservée. La largeur du signal augmente : le paquet d'onde s'élargit, quelque soit la courbure de la relation de dispersion.

La dispersion dans l'équation de Korteweg–de Vries entraîne un élargissement du signal.

Effets non linéaires

On considère l'équation

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3}{2} c_0 \frac{\eta}{h} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (5.35)$$

Si $\eta/h = 1$, une solution est

$$\eta = f\left(x - \frac{3}{2} c_0 t\right) \quad (5.36)$$

La non-linéarité entraîne un raidissement du front avant.

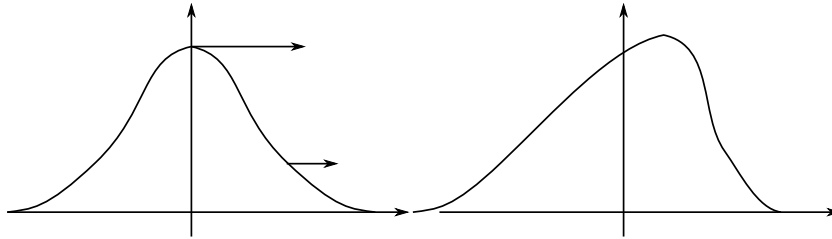


FIGURE 5.2 – Raidissement du front d'une onde non linéaire.

On a

$$\Delta c_{NL} \propto A$$

$$\Delta c_{disp} \propto k^2 \propto \frac{1}{L^2}$$

Les deux effets se compensent :

$$\Delta c_{NL} \sim \Delta c_{disp}$$

$$A \sim \frac{1}{L^2}$$

Posons

$$\xi = x - c_0 t \quad (5.37)$$

et les échelles sont

- longueur : h ;
- vitesse : \sqrt{gh} ;
- temps : $\sqrt{h/g}$.

On considère l'équation

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \frac{3}{2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \quad (5.38)$$

On va chercher une excitation localisée se déplaçant à vitesse constante V :

$$\eta(\xi, t) = \eta(\xi - Vt \equiv \chi) \quad (5.39)$$

avec $\eta(\chi \rightarrow \pm\infty) = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= \frac{\partial \eta}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta}{\partial \chi} \equiv \eta' \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \eta' \frac{\partial \chi}{\partial t} = -V \eta' \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation différentielle

$$-V \eta' + \frac{1}{6} \eta''' + \frac{3}{2} \eta \eta' = 0 \quad (5.40)$$

qui s'intègre en

$$-V \eta + \frac{1}{6} \eta'' + \frac{3}{4} \eta^2 = 0 \quad (5.41)$$

la constante étant nulle grâce aux conditions initiales. On récrit

$$\eta'' = 6V \eta - \frac{9}{2} \eta^2 = -\frac{d}{d\eta} \left(\frac{3}{2} \eta^3 - 3V \eta^2 \right)$$

Ce système est équivalent à un système mécanique comportant une particule (on reconnaît l'analogie avec le gradient) :

- position : η ;
- potentiel :

$$U(\eta) = \frac{3}{2} \eta^3 - 3V \eta^2 \quad (5.42)$$

Les points d'équilibre sont tels que

$$U'(\eta) = \frac{9}{2} \eta^2 - 6V \eta = 0 \quad (5.43)$$

ce qui correspond aux valeurs

$$\eta = 0 \quad \eta = \frac{4}{3} V \quad (5.44)$$

On a

$$U\left(\frac{4}{3} V\right) = -\frac{16}{9} V^3$$

Dans le portrait de phase, on remarque la présence d'une séparatrice. L'onde solitaire correspond à une énergie nulle. Alors

$$\eta' = \pm\sqrt{6V\eta^2 - 3\eta^3} \quad (5.45)$$

qui donne

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{3}d\chi &= \frac{d\eta}{\eta\sqrt{2V-\eta}} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{V}}d\left(\operatorname{argth}\frac{\sqrt{2V-\eta}}{\sqrt{2V}}\right) \end{aligned}$$

qui s'intègre donc en

$$\eta = \frac{2V}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{3V/2}(\xi - Vt)\right)} \quad (5.46)$$

La version dimensionnée est

$$\eta(x, t) = Ah \operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{3A}{4}}\frac{x - \sqrt{gh}(1 + A/2)t}{h}\right) \quad (5.47)$$

5.3 Interactions d'ondes solitaires

On écrit l'équation de Korteweg–de Vries sous la forme

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \quad (5.48)$$

On pose

$$\eta = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.49)$$

et on intègre sur x avec $p \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. On obtient

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad (5.50)$$

On pose

$$p(x, t) = 12\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} \quad (5.51)$$

Cette transformation est la transformation de Cole–Hopf.

On obtient

$$F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right) - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right) + 3\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right] \quad (5.52)$$

On observe que tous les termes sont quadratiques, et aussi l'apparition d'un opérateur linéaire que l'on notera D :

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \quad (5.53)$$

Une onde solitaire est donnée par

$$F = 1 + e^{\theta(x,t)} \quad (5.54a)$$

$$\theta(x,t) = -\alpha(x-a) + \alpha^3 t \quad (5.54b)$$

On introduit artificiellement un petit paramètre ε :

$$F = 1 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots \quad (5.55)$$

On espère que $|F_n| \ll |F_{n-1}|$, on tronque le développement et on fait $\varepsilon = 1$.

On obtient les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3} \right) = -3 \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3} \right] \end{cases} \quad (5.56)$$

donc

$$F_1 = e^{\theta(x,t)} \quad (5.57)$$

et $DF_1 = 0$. On prend F_1 sous la forme

$$\tilde{F}_1 = e^{\theta_1(x,t)} + e^{\theta_2(x,t)} \quad (5.58)$$

avec

$$\theta_i = -\alpha_i(x - a_i) + \alpha_i^3 t \quad (5.59)$$

car, l'opérateur étant linéaire, on peut sommer des solutions. On a alors $D\tilde{F}_1 = 0$ et donc

$$\tilde{F}_2 = \gamma e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (5.60)$$

avec

$$\gamma = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} \quad (5.61)$$

Et ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} D(F_3) = SM(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) = 0 &\implies \tilde{F}_3 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} D(F_4) = SM(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3) = 0 &\implies \tilde{F}_4 = 0 \end{aligned}$$

et $\tilde{F}_n = 0$ si $n \geq 5$. On a donc une solution exacte

$$F = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \gamma e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (5.62)$$

Cette solution est la solution à deux solitons.

La solution à N solitons est

$$F = \det \left(\delta_{mn} + \frac{2\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_n} e^{\theta_m} \right) \quad (5.63)$$

avec $m \in [1, N]$.

5.4 Intégrabilité de Korteweg–de Vries

On cherche des solutions à N solitons, avec N quelconque. On montre que (5.48) a une infinité de quantités conservées :

$$\partial_t Q + \partial_x J = 0 \implies \int_{-\infty}^{\infty} Q(\eta, \partial_x \eta, \dots) dx \quad \text{conservée}$$

Par exemple

$$\begin{cases} Q_1 = \eta & \text{conservation de la quantité de mouvement} \\ Q_2 = \eta^2 & \text{conservation de l'énergie} \\ Q_3 = \frac{\eta^3}{3} - (\partial_x \eta)^2 & \text{sans lien avec une propriété de symétrie} \end{cases}$$

L'équation est intégrable, c'est à dire que donné $\eta(x, 0)$ on peut calculer $\eta(x, t)$ quelque soit t .

5.5 Solitons de Sine–Gordon

On couple des pendules de masse m et de longueur ℓ par des ressorts exerçant une force de rappel $-c\Delta\theta$. On note θ_n le déplacement du n -ième pendule par rapport à la verticale.

Le théorème du moment cinétique donne

$$m\ell^2 \ddot{\theta}_n = -mgl \sin \theta_n - \beta(\theta_n - \theta_{n+1}) - \beta(\theta_n - \theta_{n-1}) \quad (5.64)$$

On pose (approximation continue)

$$\theta_n(t) = \theta(x = na, t) \quad (5.65)$$

ce qui permet de réécrire (5.64) :

$$m\ell^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -mgl \sin \theta - \beta \left(2\theta(x, t) - \theta(x + a, t) - \theta(x - a, t) \right) \quad (5.66)$$

Un développement limité donne

$$\theta(x \pm a, t) = \theta(x, t) \pm a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (5.67)$$

et donc (5.66) devient l'équation de Sine–Gordon

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (5.68)$$

avec

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \\ c^2 = \frac{\beta a^2}{m\ell^2} \end{cases} \quad (5.69)$$

et dans le cas $\theta \ll 1$ on obtient l'équation de Klein–Gordon :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (5.70)$$

On fait les changements de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \omega_0 t \\ X = \frac{\omega_0}{c} x \end{array} \right. \quad (5.71)$$

et (5.68) se récrit

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \sin \theta = 0 \quad (5.72)$$

Cette dernière équation est Lorentz-invariante, et on pose $c = 1$. Une solution sous forme d'une onde solitaire est

$$\theta(X, T) = \theta(X - vT \equiv \xi) \quad (5.73)$$

On a

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = -v \frac{d\theta}{d\xi} \implies (v^2 - 1) \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} = -\sin \theta$$

et

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} = -\frac{d}{d\theta} \frac{\cos \theta}{1 - v^2} = -\frac{dU(\theta)}{d\theta} \quad (5.74)$$

On multiplie par $\partial_\xi \theta$ et on intègre :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 = C - \frac{\cos \theta}{1 - v^2}$$

L'onde solitaire relie $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$ donc

$$C = \frac{1}{1 - v^2} \quad (5.75)$$

donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 - v^2} \quad (5.76)$$

On a

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} = d \left(\sqrt{2} \ln \tan \frac{\theta}{4} \right) = \pm \sqrt{\frac{2}{1 - v^2}} d\xi$$

donc

$$\theta(x, t) = 4 \arctan \left(\exp \pm \frac{X - vT}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (5.77)$$

Il existe une onde pour $v = 0$. On parle de soliton topologique.

Regardons l'énergie d'une onde solitaire. Deux approches sont possibles. La première est de retourner à la chaîne discrète et d'écrire

$$E = \sum_n \left[\frac{m\ell^2}{2} \left(\frac{d\theta_n}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta_n) + \frac{\beta}{2} (\theta_n - \theta_{n-1})^2 \right] \quad (5.78)$$

et on transforme la somme en intégrale pour passer en continu :

$$E = m\ell^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \theta) + \frac{\beta a^2}{2m\ell^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{dx}{a} \quad (5.79)$$

que l'on écrit sous forme adimensionnée

$$\tilde{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dT} \right)^2 + 1 - \cos \theta + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] dX \quad (5.80)$$

Or

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 - v^2}$$

donc

$$\tilde{E} = \int_0^{2\pi} \frac{2(1 - \cos \theta)}{1 - v^2} \frac{1}{\partial_X \theta} d\theta = \frac{8}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (5.81)$$

L'approche 2 consiste à écrire le lagrangien

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dT} \right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - (1 - \cos \theta) \quad (5.82)$$

et l'équation d'Euler-Lagrange pour un champ est

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_T \theta)} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_X \theta)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (5.83)$$

ce qui redonne bien (5.72).

Le tenseur énergie-impulsion du champ, avec $x_0 = T$ et $x_1 = X$, est donné par

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \theta)} \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} - L \delta_{\mu\nu} \quad (5.84)$$

T_{00} donne la densité d'énergie et vaut :

$$T_{00} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_T \theta)} \frac{\partial \theta}{\partial T} - L \quad (5.85)$$

et on retrouve

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dT} \right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - (1 - \cos \theta) \quad (5.86)$$

T_{01} donne la densité d'impulsion

$$T_{01} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_X \theta)} \frac{\partial \theta}{\partial T} = - \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial T} \quad (5.87)$$

et donc p vaut

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial T} dX &= - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial T} d\theta = v \int_0^{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\theta = \frac{2v}{\sqrt{1 - v^2}} \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{8v}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned}$$

Index

- Équation
 - de Hamilton, [1](#)
- Équivalence
 - topologique, [11](#)
- Application de premier retour, [18](#)
- Bifurcation, [12](#)
 - Andronov–Hopf
 - surcritique, [16](#)
 - de Hopf, [27](#)
 - fourche
 - subcritique, [14](#), [15](#)
 - surcritique, [14](#)
 - noeud–col, [13](#)
 - transcritique, [13](#)
- Brusselator, [2](#)
- Espace des phases, [3](#)
- Modèle
 - de Volterra, [2](#)
- Oscillateur
 - anharmonique, [4](#)
 - de van der Pol, [7](#)
 - harmonique, [3](#)
 - amorti, [4](#)
- Point
 - d'équilibre, voir Point fixe
 - fixe, [3](#)
 - hyperbolique, [11](#)
- Section de Poincaré, [18](#)
- Système
 - dynamique, [1](#)
- Théorème
 - de Hartman–Grobman, [11](#)
 - fondamental, [2](#)

Table des figures

1.1	Portrait de phase de l'oscillateur harmonique.	3
1.2	Portrait de phase de l'oscillateur harmonique amorti.	4
1.3	Portrait de phase local en $(\pi, 0)$	6
1.4	Potentiel d'un oscillateur anharmonique.	6
1.5	Portrait de phase d'un oscillateur anharmonique.	7
1.6	Portrait de phase de l'oscillateur de van der Pol.	9
2.1	Puits.	11
2.2	Foyer.	12
2.3	Point-col.	12
2.4	Bifurcation noeud-col.	13
2.5	Bifurcation transcritique.	14
2.6	Bifurcation fourche surcritique.	14
2.7	Bifurcation fourche subcritique.	15
2.8	Bifurcation fourche subcritique.	16
2.9	Bifurcations d'Andronov–Hopf surcritique.	17
5.1	Onde de gravité.	28
5.2	Raidissement du front d'une onde non linéaire.	33

Table des matières

1	Introduction aux systèmes dynamiques	1
1.1	Exemples	1
1.2	Théorème fondamental	2
1.3	Points d'équilibre	3
1.3.1	Oscillateur harmonique	3
1.3.2	Oscillateur harmonique amorti	4
1.3.3	Oscillateur anharmonique	4
1.4	Un exemple de système non conservatif	7
2	Bifurcations des points d'équilibre	10
2.1	Stabilité d'un point d'équilibre	10
2.2	Quelques définitions	11
2.3	Bifurcations de codimension 1 des points fixes	12
2.3.1	Cas d'une seule valeur propre réelle non dégénérée	12
2.3.2	Cas d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle nulle	15
3	Transition vers le chaos	18
3.1	Instabilités des cycles limites	18
3.1.1	Section de Poincaré	18
3.1.2	Forme normale de la bifurcation	19
3.2	Bifurcations des cycles limites	20
3.2.1	Bifurcation de Hopf secondaire	20
4	Méthodes perturbatives	22
4.1	Oscillations d'amplitude finie d'une pendule pesant	22
4.2	Résolution approchée des équations du mouvement	23
4.2.1	Développement asymptotique "naïf"	23
4.2.2	Double développement : la méthode de Poincaré–Lindstedt	25
4.2.3	Méthode des échelles multiples	25
5	Ondes dispersives non linéaires	28
5.1	Ondes de gravité à la surface d'un fluide	28
5.1.1	Hypothèses générales	28
5.1.2	Ondes linéaires	29
5.2	L'équation de Korteweg–de Vries	30
5.2.1	Ondes faiblement dispersives	30
5.2.2	Ondes dispersives faiblement non linéaires	31

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	43
5.2.3 Notions d'onde solitaire	31
5.3 Interactions d'ondes solitaires	35
5.4 Intégrabilité de Korteweg–de Vries	37
5.5 Solitons de Sine–Gordon	37
Index	40
Table des figures	41
Table des matières	42