Mathématiques — Cours PC

Harold Erbin

Contact : harold.erbin@gmail.com
Version : 20 avril 2009

Sommaire

Ces cours ont été copiés lors des cours de mathématiques de PC, de l'année 2008–2009, de fait, il se peut que des erreurs se soient glissés à certains endroits. Le chapitre d'algèbre linéaire est encore incomplet tandis que celui sur les arcs paramétrés n'est constitué que de notes parcellaires. De même, certaines preuves sont absentes, et quelques exemples n'ont pas été recopiés dans leur intégralité.

Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 Vocabulaire

Définition :

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev si, par définition :
– $(\mathbb{K}, +)$ groupe abélien
– $\cdot$ loi externe :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

De plus, $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K$

$$\begin{aligned} \lambda(x+y) &= \lambda x + \lambda y \\ (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x \\ (\lambda\mu)x &= \lambda(x\mu) \\ 1 \cdot x &= x \end{aligned}$$

Définition :

$(E, +, \cdot, \times)$ est une algèbre si :
– $(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev
– $\times$ est une loi de composition interne telle que $(E, +, \times)$ soit un anneau
– $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$

$$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$$

Définition : **Combinaison linéaire**

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev

$(e_1, \dots, e_n)$ famille de $n \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de E

$x \in E$ est combinaison linéaire (CL) de $(e_1, \dots, e_n)$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Plus généralement $(e_i)_{i \in I}$ famille quelconque de E, on appelle x : CL de $(e_i)_{i \in I}$ tout vecteur s'exprimant comme la combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $(e_i)_{i \in I}$, c'est à dire qu'il existe J partie finie de I :

$$\exists (\lambda_j)_{j \in J} \diagup x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$$

L'ensemble des CL sera noté $\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$.

Définition : **Famille génératrice**

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev

$F = (e_i)_{i \in I}$ famille quelconque de E

On dit que F est génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(e_i)$.

Définition : **Famille libre**

$F = (e_1, \dots, e_n)$ famille de vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

F est libre si $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Plus généralement, $F = (e_i)_{i \in I}$ famille quelconque de E.

F est libre si toute sous-famille de $(e_i)_{i \in I}$ est libre.

Définition : **Famille liée**

$(e_i)_{i \in I}$ est liée si elle n'est pas libre, c'est à dire si l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme CL des autres.

Par exemple si $\lambda_n \neq 0$ alors :

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1})$$

Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Théorème :

E $\mathbb{K}$-ev

Toute famille de $n+1$ vecteurs s'exprimant chacun comme CL de n vecteurs est une famille liée.

Définition : **Base**

Toute famille $(e_1, \dots, e_n)$ libre et génératrice de E est une base si et seulement si

$$\forall x \in E \quad \exists (x_1, \dots, x_n)! \in \mathbb{K}^n \ / \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Définition :

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev, on appelle sev de E toute partie de F non vide, stable par $+$ et $\cdot$, et tel que F, muni des lois induites, soit lui-même un ev.

Proposition :

Caractérisation :

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev, et F une partie de E.

F sev de $E \Leftrightarrow 0 \in F$ et F stable par CL.

Définition :

F, G deux sev de E.

On pose $F + G = \{x + y \ / \ x \in F, y \in G\}$.

Donc $F + G$ est un sev de E appelé somme des sev F et G.

Plus généralement : $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ famille de n vecteurs de E, on définit

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \{x_1 + \cdots + x_n \ / \ \forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i \in F_i\}$$

et il s'agit d'un sev de E.

Définition : **Somme directe de sous-espaces vectoriels**

F, G deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que $F + G$ est directe si

$$\forall x \in F, y \in G \quad x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

Proposition :

Caractérisation :

$$\begin{aligned} H = F \oplus G &\Longleftrightarrow \forall w \in H, \exists (x, y)! \in F \times G \ / \ w = x + y \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} H = F + G \\ F \cap G = \{0\} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition :

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de E, $p \in \mathbb{N}^*$.
On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si

$$\begin{aligned}\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \quad & x_1 + \cdots + x_p = 0 \\ & \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0\end{aligned}$$

Notation : $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = \bigoplus\limits_{i \in [\![1,p]\!]} F_i$

Proposition :

Caractérisation :

$F_1, \dots, F_p$, p sous-espaces vectoriels de E, $p \geq 2$

Il y a équivalence entre :

1. $G = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$
2. $\forall x \in G$
$$\exists (x_1, \dots, x_p)! \in F_1 \times \cdots \times F_p \;/\; x = x_1 + \cdots + x_p$$
3. $G = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ et

Définition : **Application linéaire**

E, F deux $\mathbb{K}$-ev, on appelle application linéaire de E vers F toute aplication $u : E \to F$ vérifiant

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E \qquad u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$$

Proposition :

$E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$, et F un $\mathbb{K}$-ev.

Toute application linéaire de$E$ vers F est déterminée de manière unique par la connaissance des $u_{|E_i}$ $(i \in [\![1,p]\!])$.

Définition :

Soients $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E', F' sous-espaces vectoriels de E, F, on note

$$u(E') = \{u(x), x \in E'\} \quad u^{-1}(F') = \{x \in E \;/\; u(x) \in F'\}$$

(u' n'est pas forcément bijective)

Cas particuliers :

– $E' = E$, $u(E) = \operatorname{Im} U = \{u(x), x \in E\}$

– $F' = \{0\}$, $u^{-1}(\{0\}) = \ker u = \{x \in E, u(x) = 0\}$

Proposition :

$u(E')$ sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ sous-espace vectoriel de E
– $\operatorname{Im} u = F \Leftrightarrow u$ surjective.
– $\ker u = \{0\} \Leftrightarrow u$ injective.

Proposition :

Principe de résolution d'une équation linéaire.

Position du problème : $u \in \mathcal{L}(E, F), b \in F$, et on cherche $x \in E \ / \ u(x) = b$, c'est à dire à déterminer l'ensemble $\Gamma = \{x \in E \ / \ u(x) = b\}$.

– 1^{er}cas : $b \notin \operatorname{Im} u \Rightarrow \Gamma = \emptyset$
– 2^{e}cas : $b \in \operatorname{Im} u \Rightarrow \exists x_0 \in E \ / \ u(x_0) = b$
  x_0 s'appelle solution particulière de l'équation et

$$\Gamma = \{x_0 + x \ / \ x \in \ker u\}$$

Théorème :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors u réalisé un isomorphisme de tout supplémentaire de $\ker u$ sur $\operatorname{Im} u$.

Proposition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in I}$
– si $\mathcal{F}$ famille génératrice de E alors $(u(\mathcal{F})$ famille génératrice de $\operatorname{Im} u$;
– si $\mathcal{F}$ famille liée de E alors $(u(\mathcal{F})$ famille liée de $\operatorname{Im} u$;
– si $\mathcal{F}$ famille libre de E alors $(u(\mathcal{F})$ famille libre de $\operatorname{Im} u$ si et seulement si

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) \cap \ker u = \{0\}$$

Définition : **Forme linéaire**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

Notation : $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. C'est un espace vectoriel appelé espace dual de E.

Définition : **Hyperplan**

On appelle hyperpan de E $\mathbb{K}$-ev tout sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension 1.

Proposition :

Soit H un hyperplan de E, alors

$$\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\} \ / \ H = \ker \varphi$$

Proposition :

Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ alors $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.

Proposition :

Soit H un hyperplan de E défini par $H = \ker \varphi$ avec $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$.

Soit $\Psi \in E^* \;/\; \Psi_{|H} = 0$, alors Ψ est proportionnelle à φ.

1.2 Étude des endomorphismes

Définition : **Endomorphisme**

On appelle endomorphisme de E toute application de E vers E.

Notation : $\mathcal{L}(E)$, ensemble des endomorphismes de E.

Définition : **Automorphisme**

On appelle automorphisme de E tout endomorphisme bijectif.

Notation : $GL(E)$, ensemble des automorphismes de E.

Définition : **Projection**

Soit $E = F \oplus G$. Posons

$$p : E \longrightarrow E, x = y + z \longrightarrow y$$
$$q : E \longrightarrow E, x = y + z \longrightarrow z$$

avec $x \in E, y \in F, z \in G$.

Alors p s'appelle le projecteur sur F, parallèlement à G, et q le projecteur sur G, parallèlement à F.

Proposition :

On a les relations et propriétés suivantes

$$p, q \in \mathcal{L}(E) \qquad p + q = \mathrm{id}$$
$$\ker p = \ker(q - \mathrm{id}) = \{x \in E \;/\; p(x) = 0\} = G$$
$$\ker q = F$$
$$p^2 = p \qquad q^2 = q$$
$$p \circ (\mathrm{id} - p) = p \circ q = 0$$

Proposition :

Caractérisation fonctionnelle d'un projecteur.

Soit $u \in \mathcal{L}(E) \ / \ u^2 = u$, alors u est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id}) = \operatorname{Im} u$, parallèlement à $\ker u$.

$$u^2 = u \Leftrightarrow u \circ (u - \mathrm{id}) = 0$$

– Si $u = 0$, alors u est le projecteur sur $\{0\}$, parallèle à E.
– Si $u = \mathrm{id}$, alors u est le projecteur sur E, parallèle à $\{0\}$.
– Ces deux projecteurs sont appelés projecteurs triviaux.

Proposition :

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i, \forall i \in [\![1, n]\!]$, posons :

$$p_i : E \longrightarrow E$$
$$p_i = \begin{cases} x & x \in E_i \\ 0 & x \in E_j, j \neq i \end{cases}$$

p_i est linéaire, et c'est un projecteur de E et c'est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E_j$.

Définition : **Sous-espace stable d'un endomorphisme**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle sous-espace stable par ûu tout sous-espace vectoriel F de E tel que $u(F) \subset F$.

Définition : **Valeur propre d'un endomorphisme**

$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si $u - \lambda \,\mathrm{id}$ n'est pas injective.

Autres formulations :
– $\ker(u - \lambda \,\mathrm{id}) \neq \{0\}$
– $\exists x \neq 0 \ / \ u(x) = \lambda x$

Définition : **Sous-espace propre de u associée à une valeur propre**

Soit λ valeur propre de u, on appelle sous-espace propre de u associé à λ le sous-espace vectoriel noté $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \,\mathrm{id})$ = ensemble des vecteurs propres associés à λ.

Définition : **Vecteur propre associé à une valeur propre**

Soit λ valeur propre de u, on appelle vecteur propre de u associé à λ tout vecteur de $E_\lambda(u) \setminus \{0\}$.

Définition : **Spectre**

Le spectre de u est l'ensemble des valeurs propres de u. On le note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.

Proposition :

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.

Proposition :

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux différentes sont en somme directe.

On notera :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$$

Proposition :

Ψ vérifie les propriétés suivantes, $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha \in \mathbb{K}$:
- $\Psi(P+Q) = \Psi(P) + \Psi(Q)$
- $\Psi(\alpha P) = \alpha \Psi(P)$
- $\Psi(P \times Q) = \Psi(P) \circ \Psi(Q)$

Donc Ψ est un morphisme de l'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ sur l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$.

Posons $\mathbb{K}[u] = \Psi(\mathbb{K}[X])$, alors $(\mathbb{K}[u], +, \cdot, \circ)$ est une algèbre commutative appelée algèbre des polynômes de l'endomorphisme u.

Notation : $\Psi(P) = P(u) \in \mathbb{K}[u] \subset \mathcal{L}(E)$.

Théorème :

- si λ est valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$
- si de plus P est annulateur de u ($P(u) = 0$), alors les valeurs propres de u sont inclues dans l'ensemble des racines de P.

Théorème :

$P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - a_k)$ est annulateur pour u si $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux différents, et alors

$$E = \bigoplus_{k=0}^{n} \ker(u - a_k \,\mathrm{id})$$

1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème :

Soit E un espace vectoriel possédant une famille génératrice finie $(e_i)_{i \in I}$ (de cardinal finie) te tel que $(e_i)_{i \in J}$ ($J \subset I$) soit libre, alors $\exists H$ vérifiant $J \subset H \subset I$

tel que $(e_k)_{k\in H}$ soit une base de E.

Corollaire :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, alors :
– on peut extraire de toute famille génératrice de E une base de E
– on peut complémenter toute famille libre $(f_j)_{j\in J}$ de E par des vecteurs d'une famille génératrice $(e_i)_{i\in J}$ pour obtenir une base de E.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul possédant une famille génératrice finie, alors E possède une base de cardinal fini, et toute les bases ont le même cardinal, appelé dimension de E.

Par convention, on a $\dim\{0\} = 0$.

Théorème :

Soit $\dim E = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a l'équivalence entre :

1. $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de E
2. $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de E
3. $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soit F un sev de E, alors F est de dimension finie et

$$F = E \Longleftrightarrow \dim E = \dim F$$

Proposition :

Un peu de vocabulaire :

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$, une famille de vecteurs d'un ev E.

$\mathcal{F}$ est de rang fini si $\operatorname{Vect}\mathcal{F}$ est un sev de dimension finie de E. On note

$$\operatorname{rg}\mathcal{F} = \dim \overrightarrow{E}$$

Si de plus E est lui-même de dimension finie, soit $B_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ famille de p vecteurs de E, alors $\operatorname{rg}\mathcal{F} \leq p$.

Posons $\forall j \in [\![1,p]\!] \quad x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. On appelle matrice de la famille $(x_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ relativement à la base B_E la matrice

$$A = (a_{ij})_{i,j} \qquad A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et on appelle rang de A le rand de $(x_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$.

Théorème : Formule de Grassmann

Soient F, G deux sev de dimension finie d'un ev E, alors $F+G$ est un sev de E et

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Proposition :

Soient F, G deux sev de dimension finie d'un ev E, alors

$$F+G \text{ directe} \Longleftrightarrow \dim(F+G) = \dim F + \dim G$$

Proposition :

Soient $E_1, \dots, E_p$, p sev de dimension finie d'un ev E, alors

$$\sum_{i=1}^{p} E_i \text{ somme directe} \Longleftrightarrow \dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} (\dim E_i)$$

Proposition :

Soient E, F deux ev avec E de dimension finie, $B_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Étant donnée $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de p vecteurs de F alors il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad u(e_i) = f_i$$

Proposition :

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors

$$E \simeq F \Longleftrightarrow \dim E = \dim F$$

Définition : Rang d'une application linéaire

Soient E, F deux ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\operatorname{Im} u = u(E)$ est de dimension fini. En ce cas

$$\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u$$

Théorème : Théorème du rang

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors u est de rang fini et
$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u$$

Proposition :

Caractérisation des isomorphismes

Soient E, F deux ev de dimension finie et $\dim E = \dim F$, $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a l'équivalence entre :

1. u injective
2. u surjective
3. u bijective
4. $\operatorname{rg} u = \dim F$
5. u inversible à droite
6. u inversible à gauche

Proposition :

Comportement par rapport à la somme

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, si u, v sont de rang fini, alors

$$|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$$

Proposition :

Comportement par rapport à la composition Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $0 \leq \operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$ et $0 \leq \operatorname{rg} v \leq \min(\dim F, \dim G)$.

On introduit $\tilde{v} = v_{/\operatorname{Im} u}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \tilde{v} : \operatorname{Im} u &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto \tilde{v}(y) = v(y) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \ker \tilde{v} &= \{y \in \operatorname{Im} u \;/\; v(y) = 0\} = \operatorname{Im} u \cap \ker v \\ \operatorname{Im} \tilde{v} &= \tilde{v}(\operatorname{Im} u) = v(\operatorname{Im} u) = v(u(E)) = \operatorname{Im}(v \circ u) \end{aligned}$$

On obtient donc
$$\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \cap \ker v + \operatorname{rg}(v \circ u)$$

Définition : Matrice de changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $B_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(e'_1, \dots, e'_p)$ une famille de p vecteurs de E, $\forall j \in [\![1, n]\!]\quad e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]^2}$ la matrice de $(e'_1, \dots, e'_p)$ relaativement à B_E. Si de plus on suppose que $p = n$ et $(e'_1, \dots, e'_n) = B'_E$ base de E, $P = (p_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]^2}$, $\forall j \in [\![1, n]\!]\quad e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. On note aussi $P = \mathrm{Mat}_{B'_E, B_E}(\mathrm{id})$ et P s'appelle la matrice de passage de B_E à B'_E.

Proposition :

Soient B_E, B'_E deux bases de E, P la matrice de passage de B_E à B'_E. Soient B_F, B'_F deux bases de F, Q la matrice de passage de B_F à B'_F. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F), A = \mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u), A' = \mathrm{Mat}_{B'_E, B'_F}(u)$, alors on a

$$A' = Q^{-1} A P$$

Définition : **Matrice équivalente**

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on dit que A et A' sont équivalentes si

$$\exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_q(\mathbb{K}) \;/\; A' = Q^{-1} A P$$

Proposition :

Si A et A' sont équivalentes, alors elles représentent la même application dans des bases différentes.

Proposition :

Soient B_E, B'_E deux bases de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, P la matrice de passage de B_E à B'_E, A et A' les matrices de u dans B_E et B'_E alors

$$A' = P^{-1} A P$$

Définition : **Matrice semblable**

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et A' sont semblables si

$$\exists in GL_n(\mathbb{K}) \;/\; A' = P^{-1} A P$$

Proposition :

Si A et A' sont semblables, alors elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Définition : **Rang d'une matrice**

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B_p la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $B_p =$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ / $\mathrm{Mat}_{B_p,B_n}(v) = A$, alors on a

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, v$$

Théorème :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, B_E, B_F les bases respectives de E et F, alors $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, A$ avec $A = \mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(u)$.

Théorème :

Représentation d'une matrice de rang r :

Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\Bigg| n$$

1.4 Déterminants

Définition : **Forme linéaire**

On appelle forme linéaire sur E toute application notée

$$\begin{aligned} \ell : E^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \ell(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

telle que ℓ soit linéaire par rapport à chacune des variables, c'est à dire $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \alpha_i \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} &\ell(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_i x_i + x_i', x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ &\qquad\qquad \alpha_i \ell(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \ell(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n) \end{aligned}$$

Définition : **Forme linéaire alternée**

On dit qu'une forme linéaire ℓ est alternée (antisymétrique) si de plus elle vérifie $\forall i \neq j \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$

–

$$x_i = x_j \Longrightarrow \ell(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$$

– ou bien encore

$$\ell(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\ell(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Théorème :

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E, ev de dimension n, est un espace de dimension 1. En particulier, si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_B$ telle que

$$\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$$

En outre l'expression analytique de $\det_B$ est

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \qquad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

Proposition :

Soient B, B' deux bases de E, alors $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$\det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B'}(e_1, \dots, e_n) \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition :

1. $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ dépend linéairement de chaque vecteur
2. $\forall i + j, x_i = x_j \Rightarrow \det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$
3. $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ reste inchangé lorsque l'on remplace un vecteur auquel on ajoute une combinaison linéaire des autres.

Théorème :

Soient $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E, et B une base de E, alors

$$(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \text{ base de } E \iff \det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

Définition : **Déterminant d'un endomorphisme**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Pour toute forme linéaire alternée non nulle, on introduit la forme notée

$$\begin{aligned} \ell_u : E^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \ell_u(x_1, \dots, x_n) = \ell(u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{aligned}$$

alors ℓ_u est une forme n-linéaire alternée et $\exists k \in \mathbb{K} \;/\; \ell_u = k\ell$. De plus, k ne dépend pas de ℓ et il s'appelle le déterminant de u.

Proposition :

Propriétés ($\forall \lambda \in \mathbb{K}, u, v \in (E)$) :

– $\det(\mathrm{id}) = 1$ et $\det(\lambda\,\mathrm{id}) = \lambda^n$
– $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
– $\det(v \circ u) = \det u \det v = \det(u \circ v)$
– si de plus $u \in GL_n(E)$, alors $\det u \neq 0$ et

$$\det u^{-1} = \frac{1}{\det u}$$

Définition :

Orientation d'un ev réel de dimension finie :

Soient B, B' deux bases de E, et soit u l'unique automorphisme de E vérifiant $u(B) = B'$, alors on dit que B et B' ont la même orientation si $\det u > 0$.

Définition : **Déterminant d'une matrice**

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors on appelle déterminant de A le déterminant de u.

Proposition :

Propriétés ($\forall \lambda \in \mathbb{K}, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) :
– $\det(I) = 1$ et $\det(\lambda I) = \lambda^n$
– $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
– $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$
– si de plus $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det A \neq 0$ et

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

– si A et B sont semblables, alors $\det A = \det B$
– $\det A = \det A^t$

Théorème :

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), 0 \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, avec

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

alors on a

$$\det M = \det A \det B$$

Plus généralement, si

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_n \end{array}\right)$$

alors on a

$$\det M = \prod_{i=1}^{n} \det A_i$$

Théorème :

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. Notons $\mathrm{Com}(A) = (A_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$, définie par $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ avec Δ_{ij} le déterminant de A après avoir supprimé la i$^{\text{e}}$ ligne et la j$^{\text{e}}$ colonne.

On a alors

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!] \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \forall j \in [\![1,n]\!] \end{aligned}$$

On appelle $\mathrm{Com}\, A$ la comatrice de A et A_{ij} s'appelle le cofacteur de A.

1.5 Réduction des endomorphismes en dimension finie

Définition : **Polynôme caractéristique**

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on appelle polynôme caractéristique de u le polynôme noté

$$\chi_u = \det(u - X\,\mathrm{id})$$

En outre, on a les propriétés suivantes :
- $\deg \chi_u = n$
- $$\chi_u = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(u) X^{n-1} + \cdots + \det u$$

Définition : **Valeur propre**

On dit que λ est une valeur propre de u si

$$u(x) = \lambda c$$

avec $x \in E$.

On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}\, u$, l'ensemble des valeurs propres de u.

Théorème :

Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\text{racines dans } \mathbb{K} \text{ de } \chi_u\}$.

Définition : **Ordre de multiplicité**

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, λ valeur propre de u, alors l'ordre de miltiplicité de λ est égal à l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Proposition :

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), \lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}} u$, alors

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) = \dim \ker(u - \lambda \operatorname{id}) \leq \text{ordre de multiplicité}$$

Définition : **Endomorphisme trigonalisable**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est trigonalisable s'il existe une base B de E telle que $\operatorname{Mat}_B u \in T_n^+(\mathbb{K})$.

Théorème :

u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Définition : **Endomorphisme diagonalisable**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est diagonalisable s'il existe une base B de E telle que $\operatorname{Mat}_B u \in D_n(\mathbb{K})$.

Proposition :

u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base formée des vecteurs propres de u.

Proposition :

u est diagonalisable

$$\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \;/\; E = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(y\lambda_i \operatorname{id})$$

Proposition :

u est diagonalisable

$$\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \;/\; \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim \ker(y\lambda_i \operatorname{id})$$

Proposition :

u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ sous la forme $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{n_i}$ et de plus $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \dim E_{\lambda_i}(u) = n_i$.

Proposition :

u est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$. On dit alors que P est un polynôme annulateur de u.

Proposition :

Condition suffisante de diagonalisation :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E = n$, alors si u admet n valeurs propres distinctes, u est diagonalisable.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est diagonalisable si et seulement si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \in D_n(\mathbb{K}) \;/\; A = PDP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Proposition :

Si $A = PTP^{-1}$, alors

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

Définition :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \in I, B(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $B : t \mapsto B(t)$ continue sur I, on appelle alors système différentiel d'ordre 1 l'écriture

$$X' = AX + B(t)$$

Proposition :

Soit l'équation $X' = AX$ avec A diagonalisable, tel que $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i. Alors l'ensemble des solutions est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n dont une base est définie par les n applications $t \mapsto \exp(\lambda_i t)X_i$.

Théorème :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec u diagonalisable et F un sev stable par u, alors l'endomorphisme induit par u sur F est aussi diagonalisable.

Proposition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F tels que $u(F) \subset F$, avec u diagonalisable. Si $\operatorname{Sp} u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, alors

$$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})$$

Chapitre 2

Séries à termes réels ou complexes

2.1 Généralités

Définition :
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ associée à la suite (u_n) ou série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définition :
Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on dira que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente. On notera : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
S_n s'appelle la somme partielle d'indice n de la série de terme général u_n.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Dans tous les autres cas, on parle de suite divergente.

Proposition :
Formule ($u_0 = S_0$) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = S_n - S_{n-1}$$

Définition :
Suite reste d'une série convergente
On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente
On appelle suite reste de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$R_n = S - S_n$$

Avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n + R_n = S$$

$$\begin{aligned} R_n = S - S_n &= \lim_{p\to+\infty}(S_{n+p}) - S_n = \lim_{p\to+\infty}(S_{n+p} - S_n) \\ &= \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{p+n} u_k\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \end{aligned}$$

Proposition :
Lien entre suite et série (notion de téléscopage)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1},\ u_0 = S_0,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Etudier la série de terme général u_n revient à étudier la série de terme général $S_n - S_{n-1}$.
Soit $v_n = S_n - S_{n-1} \quad n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1}) = S_n - S_0$$

Proposition :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite
$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, on dit que la série diverge grossièrement.

Théorème : **Théorème des séries alternées**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors la série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ est une série convergente et, de plus, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ a même signe que u_{n+1} et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |R_n| \leq |u_{n+1}| = a_{n+1}$$

2.2 Séries à termes réels positifs

Définition :
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série à termes positifs si à partir d'un certain rang $u_n \geq 0$.

Théorème :
Fondement de l'étude des séries à termes positifs
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente $\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.

Théorème :
Soit u_n et v_n les termes généraux de deux suites à termes positifs vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \geq u_n \geq v_n$
Alors
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ divergente

Théorème : Théorème de domination

Soit u_n et v_n les termes généraux de deux séries à termes positifs.
On suppose que $u_n = O(v_n)$
- si $\sum v_n$ convergente alors $\sum u_n$ convergente
- si $\sum u_n$ divergente alors $\sum v_n$ divergente

Théorème : Théorème de l'équivalent

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Proposition :

Règle de Riemann (règle $n^\alpha u_n$). Soit u_n le terme général d'une série à termes positifs :
- si $\exists\alpha > 1$ vérifiant $u_n = O(1/n^\alpha)$ (cas notamment si $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n \in \mathbb{R}_+$) alors $\sum u_n$ est convergente.
- si $\exists\alpha \leq 1$ vérifiant $1/n^\alpha = O(u_n)$ (cas notamment si $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n \in \mathbb{R}_+^*$) alors $\sum u_n$ est divergente.

Comparaisons logarithmiques]Comparaisons logarithmiques de deux séries à termes strictement positifs

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0\ v_n >\ 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$
- Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente
- Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ divergente

Proposition :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$ alors si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et vaut ℓ :
- si $\ell < 1$ alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente
- si $\ell > 1$ alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente (grossière)

Théorème :

Soit $f \in C_m(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et f décroissante.

Alors la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t - f(n)$ est une série à termes positifs convergentes.

En outre $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

De plus si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ est divergente alors $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$ et $\displaystyle\int_0^n f(t)\ \mathrm{d}t$ sont des infiniment grands équivalents.

2.3 Convergence absolue

Définition :

Soit u_n le terme général d'une série réelle ou complexe, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente.

Théorème :

La convergence absolue d'une série implique la convergence de cette série.

Définition :

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries réelles ou complexes

On appelle produit de Cauchy de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \sum_{p+q=n} u_n v_q = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0$$

Théorème :

La série produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergente. En outre :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Définition :

Exponentielle complexe :

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est convergente (absolument). En effet :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|z^n|}{n!}}_{\text{convergente}}$$

Par définition, posons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z$$

Proposition :

Soient $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ alors

$$\exp(z + z') = \exp z \cdot \exp z'$$

2.4 Exemples classiques

Chapitre 3

Espaces préhilbertiens

3.1 Produit scalaire réel ou complexe

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle forme sesquilinéaire hermitienne toute application

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y) \end{aligned}$$

Et vérifiant :

1. $\forall x \in E \quad \varphi(x, .) : E \longrightarrow \mathbb{K}; \quad y \longmapsto \varphi(x, .)(y) = \varphi(x, y)$ est linéaire, c'est-à-dire

$$\forall y_1, y_2 \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$
$$\varphi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$

2. $\forall y \in E \quad \varphi(., y) : E \longrightarrow \mathbb{K}; \quad x \longmapsto \varphi(., y)(x) = \varphi(x, y)$ est semilinéaire, c'est à dire

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$
$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \overline{\lambda} \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$$

3. $\forall (x, y) \in E^2 \qquad \varphi(x, y) = \overline{\varphi(x, y)}$

Il s'agit de la forme quadratique associée à une forme sesquilinéaire hermitienne

Posons

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto q(x) = \varphi(x, x) \end{aligned}$$

En effet, $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)} \Rightarrow \varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$ donc $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$

Proposition :

Règle de calcul : $\forall x, y \in E \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$q(\alpha x + \beta y) = |\alpha|^2 q(x) + 2\Re\left(\overline{\alpha}\beta\varphi(x,y)\right) + |\beta|^2 q(y)$$

Cas réel :

$$q(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 q(x) + 2\alpha\beta\varphi(x,y) + \beta^2 q(y)$$

Proposition :

Identités de polarisation :

– Cas réel :

$$q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$$

$$\varphi(x,y) = 1/2\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big)$$

– Cas complexe :

$$\varphi(x,y) = 1/4\Big(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy)\Big)$$

Définition :

Soit φ une forme sesquilinéaire hermitienne sur E, $\mathbb{K}$-ev. On dit que φ est positive si :

$$\forall x \in E \qquad q(x) = \varphi(x,x) \in \mathbb{R}_+$$

On dit que φ est définie si :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \qquad q(x) = \varphi(x,x) > 0$$

Définition :

Tout ev muni d'une forme sesquilinéaire définie positive s'apelle espace préhilbertien, et φ s'apelle produit hermitien (scalaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Théorème : **Inégalité !de Cauchy-Schwartz**

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad |\langle\, x \,|\, y \,\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si (x,y) est liée.

Théorème : **Inégalité de Minkowski**

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $x = 0$ ou $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3.2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien

Définition :
Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ espace préhilbertien
Soient $x, y \in E$, on dit que x et y sont orthogonaux si

$$\langle\, x \mid y \,\rangle = 0$$

On notera $x \perp y$

Théorème : **Théorème de Pythagore**

Soient $x, y \in E$, on a

$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$

Définition :
Soient X, Y, deux arties non vides de E. On dit que X et Y sont orthogonales (notation $X \perp Y$) si

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \qquad \langle\, x \mid y \,\rangle = 0$$

Définition :
Soit X une partie non vide de E, on appelle orthogonal de X la partie notée $X^\perp$ définie par

$$X^\perp = \{y \in E \;/\; \forall x \in X \quad x \perp y\}$$

Il s'agit d'un sev de E.

Cas particuliers :
– $X = \{x\}$ avec $x \neq 0$

$$\begin{aligned} X^\perp &= \{y \in E \;/\; x \perp y\} \\ &= \{y \in E \;/\; \langle\, x \mid y \,\rangle = 0\} = \ker \varphi_x \end{aligned}$$

Donc $\{x\}^\perp$ est un hyperplan de E ($x \neq 0$)
$X = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, \mathrm{e}_p)$

$$\begin{aligned} X^\perp &= \{y \in E \;/\; \forall i \;/\; e_i \perp y\} \\ &= \{y \in E \;/\; \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \langle\, e_i \mid y \,\rangle = 0\} \end{aligned}$$

Définition :
On appelle famille orthogonale de $(E, \langle \mid \rangle)$ toute famille $(e_i)_{i \in I}$ vérifiant
– $\forall i \in I \quad e_i \neq 0$

– $\forall i, j \in I \quad i \neq j \Rightarrow \langle e_i \,|\, e_j \rangle = 0$

Proposition :

Toute famille orthogonale de E est libre.

Définition :

On appelle famille orthonormale de $(E, \langle\,|\,\rangle)$ toute famille $(e_i)_{i\in I}$ vérifiant

$$\forall i, j \in I \qquad \langle e_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Théorème :

Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ espace préhilbertien de dimension finie. Alors E possède au moins une base orthonormale.

Supplémentaire orthogonal]Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel en dimension finie

Théorème :

Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit F sev de E avec F de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

$F^{\perp}$ s'appelle dans ce cas le supplémentaire orthogonal de F.

Définition :

Soit F un sev de $(E, \langle\,|\,\rangle)$ préhilbertien.

Si $E = F \oplus F^{\perp}$ (c'est le cas si F est de dimension finie), le projecteur de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.

Notation :

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^{\perp} &\longrightarrow E \\ x = y + z &\longmapsto p_F(x) = y \end{aligned}$$

Expression analytique en dimension finie :

Soit $B = (e_1, \cdots, e_p)$ BON de F, alors

$$\begin{aligned} p_F : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i \,|\, x \rangle \; e_i \end{aligned}$$

Théorème : **Inégalité de Bessel**

$(e_1, \ldots, e_p)$ BON de F, alors

$$\forall x \in E \qquad \sum_{i=1}^{p} |\langle e_i \,|\, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Plus généralement, $(E, \langle\,|\,\rangle)$ préhilbertien, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthogonale de E. Alors

$$\forall x \in E \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n \,|\, x \rangle|^2 \quad \text{convergente}$$

En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} |\langle e_k \,|\, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Donc la suite des sommes partielles de la suite est majorée.

Définition :

$(E, \langle\,|\,\rangle)$ préhilbertien

Soit $x \in E$ et F sev de E.

On appelle distance de x à F le réel positif défini par :

$$d(x, F) = \inf(\|x - z\|, z \in F)$$

Théorème : **Théorème de minimisation**

$(E, \langle\,|\,\rangle)$ préhilbertien et F sev de dimension finie. Alors

$$\forall x \in E \quad d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

De plus, si $z \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - z\|$ alors $z = p_F(x)$.

Proposition :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille libre dénombrable de $(E, \langle\,|\,\rangle)$ préhilbertien.

Alors il existe une unique famille orthonormale de E vérifiant :

1. $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$$
2. $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \langle e_n \,|\, u_n \rangle = 0$$

On construit la famille de manière récurrente.

- Amorçage : $n = 0$, $\mathrm{Vect}(u_0) = \mathrm{Vect}(e_0)$ et $\langle e_0 \,|\, u_0 \rangle > 0$.
  Donc $e_0 = \lambda u_0$, $\|e_0\|^2 = 1$

$$\langle e_0 \,|\, u_0 \rangle = \langle \lambda u_0 \,|\, u_0 \rangle = \overline{\lambda}\|u_0\|^2$$

Donc $\overline{\lambda}\|u_0\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $\|e_0\|^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2\|u_0\|^2 = 1$
On trouve :

$$e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}$$

– On suppose la famille construite jusqu'à l'indice $n-1$. On la note $(e_0, \dots, e_{n-1})$.
On passe à l'indice n : on désigne la famille par $(e'_1, \dots, e'_n)$.

$$\left.\begin{array}{r}\forall i \in [\![0,n]\!] \quad \langle\, e_i \,|\, u_i \,\rangle > 0 \\ \forall i \in [\![0,n]\!] \quad \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)\end{array}\right\} \Rightarrow \forall i \in [\![0,n-1]\!] \quad e'_i = e_i$$

Il reste à définit le vecteur e'_n.

$$\mathrm{Vect}(e'_0, \dots, e'_n) = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)$$

Donc e'_n est combinaison linéaire de $(u_0, \dots, u_n)$ et de $(e'_0, \dots, e'_{n-1}, u_n) = (e_0, \dots, e_{n-1}, u_n)$, car

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n) &= \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_{n-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u_n) \\ &= \mathrm{Vect}(e'_0, \dots, e'_{n-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u_n)\end{aligned}$$

Donc

$$e'_n = \lambda u_n + \alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \langle\, e_k \,|\, e'_n \,\rangle = 0$ C'est à dire

$$\begin{aligned}&\lambda \langle\, e_k \,|\, u_n \,\rangle + \left\langle\, e_k \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_i \,\right\rangle = 0 \\ &\lambda \langle\, e_k \,|\, u_n \,\rangle + \alpha_k = 0\end{aligned}$$

D'où $\alpha_k = -\lambda \langle\, e_k \,|\, u_n \,\rangle \qquad (k \in [\![0, n-1]\!]$, c'est à dire

$$\begin{aligned}e'_n &= \lambda u_n - \lambda \langle\, e_n \,|\, u_n \,\rangle e_0 - \dots - \lambda \langle\, e_{n-1} \,|\, u_n \,\rangle e_{n-1} \\ &= \lambda(u_n - \langle\, e_n \,|\, u_n \,\rangle e_0 - \dots - \langle\, e_{n-1} \,|\, u_n \,\rangle e_{n-1})\end{aligned}$$

Posons

$$y = u_n - \langle\, e_n \,|\, u_n \,\rangle e_0 - \dots - \langle\, e_{n-1} \,|\, u_n \,\rangle e_{n-1}$$

Alors $y \neq 0$ car $(u_0, \dots, u_n)$ libre.

$$u_n = y + \sum_{k=0}^{n-1} \langle\, e_k \,|\, u_n \,\rangle e_k$$

On sait que

$$0 < \langle\, e'_n \,|\, u_n \,\rangle = \langle\, e'_n \,|\, y \,\rangle + 0 = \langle\, \lambda y \,|\, y \,\rangle = \overline{\lambda}\|y\|^2 \quad \text{car} \quad e'_n = \lambda y$$

Donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, or

$$\|e'_n\|^2 = \lambda = \|\lambda y\|^2 = \lambda^2\|y\|^2$$

D'où

$$\lambda = \frac{1}{\|y\|}$$

D'où l'algorithme :

$$e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}$$

Pour $n \geq 1$:

$$e_n = \frac{u_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \langle\, e_k \,|\, u_n \,\rangle\, e_k}{\left\| u_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \langle\, e_k \,|\, u_n \,\rangle\, e_k \right\|} = \frac{u_n - p_{F_n}(u_n)}{\|u_n - p_{F_n}(u_n)\|}$$

Avec P_{F_n} le projeté orthogonal sur F_n avec

$$F_n = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_{n-1}) = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_{n-1})$$

3.3 Espaces euclidiens

Définition :

On appelle espace vectoriel euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est de dimension finie, alors E possède des bases orthonormales.

$$\forall F \; E\text{-sev} \qquad E = F \oplus F^{\perp}$$

Théorème :

Tout espace vectoriel euclidien est canoniquement isomorphe à son dual.

Définition :

$B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E.

On appelle matrice du produit scalaire $\langle \, | \, \rangle$ relativement à B la matrice

$$\Big(\langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle \Big)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$$

Notons

$$A = \mathrm{Mat}_B(\langle \, | \, \rangle) = \Big(\langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle \Big)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$$

Proposition :

$B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. Soit X (Y) la matrice des composantes de x (y) de E relativement à B.

$$A = \mathrm{Mat}_B \Big(\langle \, | \, \rangle \Big) \Leftrightarrow \forall x, y \in E \quad \langle\, x \,|\, y \,\rangle =^t XAY$$

Proposition :

B, B' deux bases de $(E, \langle \mid \rangle)$ euclidien.

Soient $A = \mathrm{Mat}_B\Big(\langle \mid \rangle\Big)$, $A' = \mathrm{Mat}_{B'}\Big(\langle \mid \rangle\Big)$ et P la matrice de passage de B à B', alors

$$A' = ^t PAP$$

Proposition :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice d'un produit scalaire $\Leftrightarrow \exists Q \in GL_n(\mathbb{R}) \;/\; A = ^t QQ$

Chapitre 4

Espaces vectoriels normés

4.1 Normes, suites dans un espace vectoriel normé

Définition :

On appelle norme sur E toute application $N: E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. $\forall x \in E \qquad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. $\forall x, y \in E \qquad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Le couple (E, N) s'appelle espace vectoriel normé et l'application $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ défini par

$$d(x,y) = N(y-x)$$

s'appelle distance associée.

Définition :

- Pour $a \in E,\ r > 0$

$$B(a,r) = \{x, N(x-a) < r\}$$

  s'appelle la boule ouverte de centre a et de rayon r.
- Pour $a \in E,\ r \geq 0$

$$B_f(a,r) = \{x, N(x-a) \geq r\}$$

  s'appelle la boule fermée de centre a et de rayon r.

Définition :

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est convergente si :

$$\exists \ell \in E \diagup \lim_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0$$

C'est à dire si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow N(u_n - \ell) < \varepsilon$$

Proposition :

L'ensemble des suites convergentes de (E, N) est un $\mathbb{K}$-ev. De plus :
– si u est bornée, soit $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \lambda_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$\lambda_n u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

– si $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée alors

$$\lambda_n u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Définition : **Application lipschitzienne**

$(E, N), (F, N')$ deux espaces vectoriels normés et A partie de E. On dit que $f : A \to F$ est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, x') \in A^2 \qquad N'\Big(f(x) - f'(x')\Big) \leq kN(x - x')$$

Proposition :

E $\mathbb{K}$-ev muni de deux normes N et N', il y a équivalence entre :

1. $\exists \alpha > 0$ tel que $N' \leq \alpha N$
   (c'est à dire $\forall x \in E \quad N'(x) \leq \alpha N(x)$).
2. Toute suite convergeant vers 0 pour N converge vers 0 pour N'.

Théorème :

Toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie.

4.2 Espace vectoriel normé de dimension finie

Théorème :

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_{n,1}, \ldots, u_{n,p})$ désignent les composantes de u_n et $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ celles de ℓ alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!] \quad (u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell_k$$

Définition :

$\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u \in E^{\mathbb{N}}$, N norme quelconque sur E.

– $u_n = O(\alpha_n)$ si
$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \diagup \forall n \qquad N(u_n) \leq M|\alpha_n|$$
– $u_n = o(\alpha_n)$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow N(u_n) \leq \varepsilon|\alpha_n|$$
– $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sont dites équivalentes si et seulement si :
$$u_n - v_n = o(v_n)$$
On notera $u_n \sim v_n$.

Définition :

On dit qu'une partie O de E est ouverte si tout élément de O est centre d'une boule ouverte contenue dans O.

On appelle partie fermée de E toute partie dont le complémentaire est une partie ouverte.

Proposition :

La famille des parties ouvertes de E est stable par réunion quelconque et par intersection finie. Au contraire, la famille des parties fermées est stable par réunion finie et par intersection quelconque.

Théorème :

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite u convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

Définition : **Point adhérent**

On dit que $a \in E$ est un point adhérent à la partie non vide de A si toute boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ rencontre A.

Définition :

$(E, N), (F, N')$ deux evn, A partie de E, a point adhérent à A et $f : A \to F$.

On dit que f admet une limite en a s'il existe $b \in F$ vérifiant :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad N(x-a) < \eta \Rightarrow N'(f(x) - b) < \varepsilon$$
Notation : $b = \lim\limits_{a} f$

Théorème :

Lien avec les fonctions composantes.

Si on désigne par $f_1, \ldots, f_q$ les composants de $f : A \to F$ dans une base $B_F = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F.

f admet une limite en a si et seulement si $\forall k \in [\![1, q]\!]$ f_k admet une limite en a.

Si tel est le cas :

$$\lim_a f = \sum_{k=1}^{q} \left(\lim_a f_k \right) \varepsilon_k$$

Théorème :

f admet une limite en a adhérent à A si et seulement si l'image par f de toute suite d'éléments de A convergeant vers a est une suite convergente.

Proposition :

Opérations :
- l'ensemble des applications de A dans F admettant une limite en a adhérent à A est un $\mathbb{K}$-ev et $f \longmapsto \lim\limits_a f$ est linéaire.
- si $A \subset E, B \subset F$, a point adhérent à A, f application de A dans B ayant b pour limite en a, alors b est adhérent à B et, si g, application de B dans G, a pour limite c en b, $g \circ f$ a pour limite c en a.

Définition :

a adhérent à $A \subset E$, $f : A \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{R} \ / \ \varphi(x) \neq 0$ si $x \in A \setminus \{a\}$, N' norme sur F.

On dit que f est dominée par φ en a (notation : $f =_a O(\varphi)$) si et seulement si $\dfrac{f}{\varphi}$ bornée au voisinage de a, c'est à dire :

$$\exists r, M > 0 \quad \forall x \in B(a,r) \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow N'\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) \leq M$$

On dit que f est négligeable devant φ (notation : $f =_a o(\varphi)$) si et seulement si $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\longrightarrow} 0$

Définition :

Soit $a \in A$, on dit que f est continue en a si f admet une limite en a et dans ce cas, nécessairement, $\lim\limits_a f = f(a)$.

Définition :

Si $B \subset A$ alors on dit que f est continue sur B si elle est continue en tout point de B. De même, si f est continue sur A, on dit que f est continue.

Notation : $C(A, F)$ l'ensemble des applications continues.

Proposition :

- $C(A, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev ;
- $C(A, \mathbb{K}) = C(A)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
  Conséquence : si on note $(x_1, \ldots, x_p)$ les coordonnées de $x \in E$ relativement à une base de E, toute application polynomiale en x_k est continue.

– $f \in C(A,B)$ avec $B \subset F$ et $g \in C(B,G)$, G evn de dimension finie, alors $g \circ f$ est continue.

Définition :

Une partie de K de E est dite compacte si elle est fermée et bornée.

Théorème : **Image d'une partie compacte**

Soit $f \in C(A,f)$, alors $f(K)$ est une partie compacte de F lorsque $K \subset A$ est une partie compacte.

Cas particulier des fonctions à valeurs réelles, c'est à dire $F = \mathbb{R}$, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

4.3 Continuité des applications linéaires en dimension finie

Théorème :

$(E,N),(F,N')$ deux ev de dimension quelconque et
$u \in \mathcal{L}(E,F)$. Il y a équivalence entre :

1. u continue en 0 ;
2. u continue sur E ;
3. u lipschitzienne ;
4. $\exists M \in \mathbb{R}_+ \;/\; \forall x \in E \Rightarrow N'\Big(u(x)\Big) \leq MN(x)$.

En particulier si E est de dimension finie, ces quatre propriétés sont vérifiées.

Proposition :

Norme subordonnée d'une application linéaire continue.

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue, alors :

$$\sup\left(\frac{N'\Big(u(x)\Big)}{N(x)},\; x \in E \setminus \{0\}\right) = \sup\Big(N'\Big(u(x)\Big), x \in E, N(x) \leq 1\Big)$$

On notera $|||u|||$ l'un de ces réels positifs ($\forall x \in E$
$N'\Big(u(x)\Big) \leq |||u|||N(x)$).

L'application

$$\begin{aligned} |||\cdot||| :\; \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longmapsto |||u||| \end{aligned}$$

est une norme et elle vérifie :

$$u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,G) \qquad |||v \circ u||| \leq |||v|||\;\;|||u|||$$

Théorème :

$(E,N),(F,N')$ ev de dimension finie et $B:\ E\times F\to G$ bilinéaire, (G,N'') evn de dimension quelconque, alors B est continue sur $E\times F$ et il existe $M\in\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall x\in E\quad \forall y\in F\qquad N''\Big(B(x,y)\Big)\leq MN(x)N'(y)$$

Chapitre 5

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

5.1 Compléments sur les limites et la continuité

Définition :

Soit a point adhérent à I.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I$$
$$|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I$$
$$|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I$$
$$|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| > A$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \quad \forall x \in I$$
$$x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Définition :

- $f : I \to \mathbb{R}_+^{(*)}$, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\ell \geq 0$;
- $f, g : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$, si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existent alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Théorème : Théorème des fonctions encadrantes

$$f, g, h : I \to \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ alors g admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell$$

Théorème : **Théorème de la limite monotone**

Toute fonction monotone sur un intervalle I admet une limite à droite et à gauche de tout point de I autre qu'une extrémité.

Corollaire :

Toute fonction monotone admet une limite finie ou infinie aux extrémités de son intervalle de définition.

Théorème : **Théorème des valeurs intermédiaires**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème : **Théorème de la bijection**

Toute fonction continue strictement monotone d'un intervalle I sur l'intervalle $I = f(I)$ réalise une bijection bicontinue de I sur $f(I)$.

Théorème : **Théorème de Heine**

$f \in C\Big([a,b],\mathbb{R}\Big)$ alors

$$f\Big([a,b]\Big) = [m,M]$$

C'est à dire

$$\exists c,d \in [a,b] \qquad f(c) = m = \inf_{[a,b]} f \qquad f(d) = M = \sup_{[a,b]} f$$

Et de plus f est uniformément continue sur $[a,b]$, C'est à dire f vérifie

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, x' \in [a,b] \qquad |x - x'| < \alpha$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x') < \varepsilon$$

Définition : **Fonction continue par morceaux**

$f : [a,b] \to E$ $(\dim E < +\infty)$.

On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{c_0, \dots, c_p\}$, $c_0 = a < c_1 < \dots < c_{p-1} < c_p = b$ telle que $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$ $\quad f_{|]c_i,c_{i+1}}$ continue sur $]c_i, c_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[c_i, c_{i+1}]$.

Plus généralement, $f : I \to E$, on dit que f est continue par morceaux sur I si $\forall J \subset I$, $f_{|J}$ est continue par morceaux sur J.

Définition : **Fonction en escalier**

$f : [a,b] \to E$, on dit que f est en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_p\}$ telle que $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < x_p)b$ et $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$ $F_{|]c_i,c_{i+1}[}$ est une application constante.

$f : I \to E$, on dit que f est en escalier sur I s'il existe J un segment inclus dans I tel que $f_{|J}$ soit en escalier sur J et f nulle à l'extérieur de J.

Définition :

Soit $f \in \mathcal{F}(I,E)$, et $\mathcal{A}$ un sous ensemble on vide de $\mathcal{F}(I,E)$.

On dit que f peut être approximée uniformément sur I par des fonctions de $\mathcal{A}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in \mathcal{A} \diagup N_\infty(f-g) < \varepsilon$$

(ce qui suppose $f-g$ bornée, N norme sur E, $N_\infty(f-g) = \sup\{N\Big(f(x) - g(x)\Big), x \in I\}$)

Théorème :

Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ peut être approximée uniformément sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier.

Théorème : **Théorème de Weierstrass**

Toute fonction numérique continue sur le segment $[a,b]$ peut être approximée uniformément sur $[a,b]$ pour des fonctions polynomiales.

Théorème : **Théorème de Weierstrass trigonométrique**

Toute fonction continue, T-périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, peut être approximée uniformément par des polynômes trigonométriques, c'est à dire par des applications du type :

$$P_n \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{T}\, t}$$

5.2 Dérivation des fonctions vectorielles

Définition :

$a \in I$ et $f : I \to E$.

On dit que f est dérivable en a si

$$\frac{f(t) - f(a)}{t-a}$$

admet une limite quand t tend vers a.

Cette limite sera notée $f'(a) = Df(a)$.

Ceci revient à dire que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + o(t-a)$$

Définition :

Soit $f : I \to E$ et on suppose que $J = I \cap [a, +\infty[$ non réduit à un point.

On dit que f est dérivable à droite en a si et seulement si $f_{|J}$ est dérivable en a, ce qui impose la continuité à droite de f en a.

Notation : $f'_d(a)$

Proposition :

L'ensemble des fonctions dérivables est stable par combinaison linéaire. En outre, $f \longmapsto Df$ est linéaire.

Proposition :

Composition par une application linéaire : soient $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ dérivable, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ $(\dim E, \dim F < +\infty)$ alors $u \circ f : I \to F$ est dérivable et

$$\forall a \in I, D(u \circ f)(a) = u(Df(a))$$

Proposition :

Produit : $f : I \to F$, $g : I \to G$, dérivables sur I, $B : F \times G \to E$ bilinéaire, E, F, G de dimensions finies. Soit

$$\begin{aligned} h = B(f,g) : \ I &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto h(x) = B(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Alors h est dérivable et

$$h'(x) = B(f'(x), g(x)) + B(f(x), g'(x))$$

Proposition :

Composition : soient $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$, $g : J \to E$, et f dérivable en $a \in I$ et g en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'\Big(f(a)\Big) \cdot f'(a)$$

Définition : **Dérivées successives**

$f : I \to E$. On définit les dérivées successives par réccurence : f est n fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, $n \geq 1$.

En outre

$$\left(f^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}$$

Définition :

On dit que f est de classe C^k $(k \geq 1)$ sur I si f est k fois dérivable sur I et si $f^{(k)}$ est continu sur I.

Définition :

Généralisation : on appelle application de classe C^n par morceaux de I à valeurs dans E.
- 1^er^cas : si $I = [a, b] \;/\; \exists \sigma = (c_0, \dots, c_p)$ de $[a, b]$ et $a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$ et $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $f_{|]c_i, c_{i+1}[}$ prolongeable à $[c_i, c_{i+1}[$ en une application de classe C^n.
- 2^e^cas : si I est un intervalle quelconque, si $\forall J \subset I$ un segment, $f_{|J}$ est C^n par morceaux.

On notera $E = C^n_m(I, E)$ l'ev des fonctions de classe C^n par morceaux sur I.

Proposition :

Formulaire :
- $D^n(\exp)(x) = \exp(x)$
- $D^{2n}(\text{ch})(x) = \text{ch}(x)$
- $D^{2n+1}(\text{ch})(x) = \text{sh}(x)$
- $D^n(\cos)(x) = \cos(x + n\pi/2)$
- $D^n(\sin)(x) = \sin(x + n\pi/2)$
-
$$D^n[(x-a)^p] = \begin{cases} \dfrac{p\,!}{(p-n)!}(x-a)^{p-n} & p \geq n \\ 0 & p < n \end{cases}$$
-
$$D^n\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

Proposition :

Produit de deux applications de classe C^k :

$f, g : I \to \mathbb{K}$ n fois dérivables sur I.

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad f^{(0)} = f$$

Plus généralement : soient $f : I \to F$, $g : I \to G$ n fois dérivables sur I,

$B : F \times G \to E$ bilinéaire, alors $h = B(f, g)$ n fois dérivable sur I. En outre

$$D^n\Big(B(f,g)\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\Big(f^{(k)}g^{(n-k)}\Big)$$

Proposition :

$f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$, $g : J \to E$, n fois dérivables sur I, alors $g \circ f$ n fois dérivable sur I.

Théorème :

I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f continue, strictement monotone, dérivable sur I à valeurs dans $J = f(I)$. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a) \in J$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. En outre

$$(f^{-1})'\Big(f(a)\Big) = \frac{1}{f'(a)}$$

Définition :

On appelle C^n-difféomorphisme de l'intervalle I sur l'intervalle J toute application bijective de classe C^n sur I et telle que son application soit de classe C^n sur J.

Proposition :

Caractérisation :

f un homéomorphisme de I sur J.

f C^n-difféomorphisme de I sur $J \Leftrightarrow f$ est de classe C^n sur I et $\forall x \in I \quad f'(x) \neq 0$.

5.3 Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment

Définition :

E $\mathbb{R}$-ev de dimension p, $B = (e_1, \ldots, e_p), B' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ deux bases de E, $f \in C_m([a, b], E)$, $(f_1, \ldots, f_p), (g_1, \ldots, g_p)$ les composantes de f relativement à B et de g relativement à B'.

Alors

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t\right) e_i = \sum_{j=1}^{p} \left(\int_a^b g_i(t)\mathrm{d}t\right) e'_j$$

Par définition, on posera

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i$$

Proposition :

L'application $C_m([a,b],E) \to E, f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une application linéaire :

$$\begin{gathered} \forall f, g \in C_m([a,b],E) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ \int_a^b \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big) = \lambda \int_a^b f(t) + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \end{gathered}$$

Proposition :
Soient $f \in C_m(I,E)$, I un intervalle, $a,b,c \in I$, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition :
Soit $f \in C_m([a,b],E)$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$u\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right) = \int_a^b \Big(f(t)\Big)\mathrm{d}t$$

Proposition :
Soient $f \in C_m([a,b],E)$, et N une norme sur E. Alors

$$\begin{aligned} N\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right) &\leq \int_a^b N\Big(f(t)\Big)\mathrm{d}t \\ &\leq (b-a)\sup\Big(N\Big(f(t)\Big), t \in [a,b]\Big) \end{aligned}$$

5.4 Intégration et dérivation

Définition :

Soit $f \in C(I, E)$, on appelle primitive de f sur I toute application $F : I \to E$ dérivable sur I et vérifiant

$$F' = f \Longleftrightarrow \forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Proposition :

Deux primitives d'une même application (sur un intervalle I) diffèrent d'une constante.

Définition : **Théorème fondamental de l'intégration**

Soient $f \in C(I, E)$, $a \in I$.

L'application $I \to E, x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

En outre, pour toute primitive F de f sur I :

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

Proposition :

$$F(x) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \qquad F(x) = 0$$

Soit h une autre primitive de f sur I, alors

$$\exists C = cste \in E \;/\; F - h = C$$

Si de plus $h(a) = 0 \Rightarrow F(a) - h(a) = C = 0 \Leftrightarrow F = h$.

Plus généralement, soit F une primitive de f sur I, de même $F - F(a)$ est aussi une primitive de f qui s'annule en a, donc $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

$$\forall a, b \in I \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Proposition :

Conséquences :

– $f \in C^1(I, E)$, alors

$$\forall a, x \in I \qquad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

- $f \in C([a,b],\mathbb{R}_+)$
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$
Ou si f non identiquement nulle, $\displaystyle\int_a^b > 0$.
- si $f \in C(\mathbb{R},E)$ avec f T-périodique ($T > 0$), alors f admet des primitives T-périodiques
$$\Leftrightarrow \int_0^T f = 0$$
- $f \in C(I,E), a \in I, u : J \to I$ dérivable sur J, alors l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et sa dérivée vaut $u'(x)f\Big(u(x)\Big)$.

Théorème : Changement de variable

Soient $f \in C(I,E)$, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}) \,/\, \varphi[\alpha,\beta] \subset I$. Alors
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Théorème : Intégration par parties

Soient $f \in C^1(I,\mathbb{K}), g \in C^1(I,E)$, alors $\forall a,b \in I$, on a
$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Définition :

Soit $f \in C_m(I,E)$. On appelle primitive de f sur I toute application F continue de I à valeurs dans E, C^1 par morceaux sur I, telle que $\forall x \in I$ pour lequel f est continue
$$F'(x) = f(x)$$

Proposition :

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ne diffèrent que d'une constante.

Proposition :

Si f est continue sur I et de classe C^1 par morceaux sur I, alors f est une primitive de f' sur I
$$\Rightarrow \forall a,b \in I \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$$

Proposition :

Changement de variable :

Soit $\in C^1([\alpha,\beta], I)$ strictement monotone et $f \in C_m(I,E)$, alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Théorème : **Intégration par parties**

Soient $f \in C_m^1(I,\mathbb{K})$, $g \in C_m(I,E)$, avec f,g continues sur I, alors

$$\int_a^b f'(x)g(a)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a)\int_a^b f(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Théorème : **Théorème de Rolle**

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ et dérivable sur $]a,b[$, vérifiant $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a,b[\;\diagup\; f'(c) = 0$$

Théorème : **Théorème des accroissements finis**

Soit $f \in ([a,b],\mathbb{R})$, dérivable sur $]a,b[$, alors

$$\exists c \in]a,b[\;\diagup\; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Théorème : **Inégalité des accroissements finis**

Soit $f \in C([a,b],E)$ tel que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \;\diagup\; \forall t \in]a,b[\quad N\Big(f'(t)\Big) \leq \lambda$$

Soit N une norme, alors

$$N\Big(f(b) - f(a)\Big) \leq (b-a)\lambda$$

Théorème :

Soient $f \in C([a,b],E)$. On suppose de plus que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in E$.

Alors l'application f est de classe C^1 sur $[a,b]$ avec $f'(a) = \ell$.

Théorème : **Formule de Taylor avec reste intégral**

Soient $f \in C^n(I,E)$, $f \in C_m^{n+1}(I,E)$ et $a \in I$, alors

$$\forall x \in I \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

avec

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a)$$

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Corollaire :

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $f \in C^{n+1}([a,b],E)$, N norme sur E, alors

$$N\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a)\right) \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} \Big(N\Big(f^{(n+1)}(t)\Big)\Big)$$

Proposition :

Développement limité d'une primitive d'une fonction continue :

Soient $f \in C(I,E)$ et $x_0 \in I$, et on suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, c'est à dire $\exists a_0, \ldots, a_n \in E$ tels que

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\Big((x-x_0)^n\Big)$$

alors l'application $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ admet un $DL_{n+1}(x_0)$ égal à

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(x-x_0)^{k+1}}{k+1} + o\Big((x-x_0)^{n+1}\Big)$$

Proposition :

Développement limité de la dérivée d'une application de classe C^1.

Soit $f \in C^1(I, E)$. Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors f admet un $DL_{n+1}(x_0)$. Plus précisément : si

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\Big((x - x_0)^n\Big)$$

alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + a_n \frac{(x - x_0)^n}{n + 1} + o\Big((x - x_0)^n\Big) \end{aligned}$$

Proposition :

Existence d'un développement limité pour les applications de classe C^n (théorème de Taylor-Young).

Soient $f \in C^n(I, E)$ et $x_0 \in I$, alors f admet un $DL_n(x_0)$ et il vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\Big((x - x_0)^n\Big)$$

Chapitre 6

Intégration sur un intervalle

6.1 Intégrale impropre

Définition : **Intégrale impropre**

Soient $a, b \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $f \in C_m\Big([a,b], \mathbb{K}\Big)$. On dit que l'intégrale impropre de f sur $I = [a, b[$ est convergente si
$F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b.
Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Dans tous les autres cas, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est divergente.

Définition :
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ et $f \in C_m\Big(]a, b[\Big)$ est convergente si et seulement si $\exists c \in]a, b[\;/\; \displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes.
On notera :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition :

Soient $f, g \in C_m(I, \mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$. Si $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors

$$\int_I \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big)\mathrm{d}t$$

est convergente.

En outre
$$\int_I \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big)\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\mathrm{d}t + \int_I g(t)\mathrm{d}t$$

Proposition :

Soient $f \in C_m\Big([a,b[,\mathbb{R}_+\Big)$, $a < b$, et

$F : [a,b[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, alors $f \geq 0 \Rightarrow F$ croissante.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f$ convergente $\Leftrightarrow F$ majorée.

Corollaire :

Soit $f \in C_m\Big(]a,b],\mathbb{R}_+\Big), a < b$, alors

$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ majorée

Théorème :

Soient $f, g \in C_m(I,\mathbb{R}_+)$ $(I = [a,b[)$ vérifiant $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$, alors :

– si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente

– si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ divergente alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ divergente

Théorème :

Soient $f, g \in C_m(I,\mathbb{R}_+)$ / $f =_b O(g)$ $(I = [a,b[)$, alors :

– si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente

– si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ divergente alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ divergente

Théorème : **Théorème de l'équivalent**

Soient $f, g \in C_m(I,\mathbb{R}_+)$ $(I = [a,b[)$ telles que $f \sim_b g$, alors les intégrales de f et g sont de même nature.

Définition :

Soit $f \in C_m(I,\mathbb{K})$, $I =]a,b[$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

Théorème :

Soit $f \in C_m\Big(]a, b[, \mathbb{K}\Big)$, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ absolument convergente} \\ \Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ convergente}$$

6.2 Fonctions intégrables

Proposition :

Soit $f \in C_m(I, \mathbb{K})$. Il y équivalence entre :

1. $\displaystyle\int_I |f(x)|\mathrm{d}x$ convergente.
2. $\exists M > 0 \,/\, \forall J \subset I \quad \displaystyle\int_J |f(x)|\mathrm{d}x \leq M$.
3. $\exists a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec a décroissante et b croissante, telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf(I)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \sup(I)$, et $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\mathrm{d}x$ convergente.

Définition :

Toute fonction vérifiant l'une des trois propriétés précédentes s'appelle fonction intégrable sur I.

Si I est un segment $[a, b]$, on notera

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Si I est un intervalle,on notera

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Proposition :

L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un $\mathbb{K}$-ev et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f, g$ intégrable sur I :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

Proposition :

Relation de Chasles Soit f intégrable sur I et J, qui vérifient $I \cup J$ intervalle, et $I \cup J = \emptyset$ ou réduit à un point, alors f est intégrable sur $I \cap J$ et

$$\int_{I \cap J} f(d)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\mathrm{d}t + \int_J f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition :

Soit $\varphi : I \to J = \varphi(I)$, I intervalle et φ C^1-difféomorphisme, $f \in C_m(I, \mathbb{K})$

$$(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \text{ intégrable sur } I \Leftrightarrow f \text{ intégrable sur } J$$

En outre :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I \Big(f \circ \varphi(t)\Big)|\varphi'(t)|\mathrm{d}t$$

Proposition :

Norme de la convergence en moyenne Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et E ensemble des applications continues et intégrables sur l'intervalle I, alors E est un $\mathbb{K}$-ev et

$$\begin{aligned} N_1 : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto N_1(f) = \int_I f(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

est une norme sur E, appelée norme de la convergence en moyenne.

Proposition :

Norme de la convergence quadratique L'ensemble des fonctions continues sur I et de carrés intégrables sur I noté E est un $\mathbb{K}$-ev. D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} N_2 : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \sqrt{\int_I |f(t)|^2\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

est une norme sur E associée au produit hermitien $\langle\,|\,\rangle : E^2 \to \mathbb{K}, \langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_I \overline{f}(t)g(t)\mathrm{d}t$.

6.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème :

Soient $f_n \in C_m(I, \mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}$, et $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrables sur I.

On suppose que

–
$$\forall x \in I \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$
et $f \in C_m(I, \mathbb{K})$ (on dit simplement que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I).

–
$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$
(hypothèse de domination)

Alors f est intégrable sur I et de plus
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$$

Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre]Continuité d'une intégrale dépendant
d'un paramètre

Théorème :

Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
– si $\forall t \in J$, $I \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I
– si $\forall x \in I$, $J \to \mathbb{K}, t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrables sur J
– s'il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable et vérifiant
$\forall (x,t) \in I \times J \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination)

Alors l'application $F : I \to \mathbb{K}, x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Corollaire :

Soient I, J deux intervalles et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$
– si $\forall t \in J$, $I \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I
– si $\forall x \in I$, $J \to \mathbb{K}, t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrables sur J
– si $\forall K \subset I \quad \exists \varphi_K : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur J et vérifiant
$$\forall x \in K, \forall t \in J \qquad |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
(domination)

Alors $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Théorème : **Théorème de Leibniz**

Soient I, J deux intervalles de $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$ tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe sur $I \times J$.
– $\forall t \in J \quad t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur I.
– $\forall x \in I \quad t \mapsto f(x,t),\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continues par morceaux et intégrables sur I.
– $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur J et vérifiant
$$\forall (x,t) \in I \times J \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

(domination)

Alors $x \mapsto F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est C^1 sur I et

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire :

On travaille localement avec la troisième hypothèse : soient I, J deux intervalles de $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe sur $I \times J$.

- $\forall t \in J \quad t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur I.
- $\forall x \in I \quad t \mapsto f(x,t),\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continues par morceaux et intégrables sur I.
- $\forall K \subset I \quad \exists \varphi_K : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in K \times J \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t)$$

(domination locale)

Alors $x \mapsto F(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est C^1 sur I et

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$, avec existence de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sur $I \times J$ ($k \in [\![1,p]\!]$). Si

-
$$\forall t \in J, \forall k \in [\![1,p]\!] \qquad x \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$$
continue sur I.
-
$$\forall x \in I, \forall k \in [\![0,p]\!] \qquad t \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$$
continue par morceaux et intégrables sur J.
- $\forall K \subset I, \forall k \in [\![1,p]\!] \qquad \exists \varphi_{K,k}$ intégrable sur J et telle que $\forall (x,t) \in K \times J$

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_{K,k}(t)$$

(hypothèse de domination)

Alors $x \mapsto F(x) = \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est C^p sur I et

$$\forall x \in I, \forall k \in [\![0,p]\!] \qquad F^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Chapitre 7

Séries de fonctions

7.1 Modes de convergence

Définition : **Convergence simple**

On dit que la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I si $\forall x \in I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est convergente.

Pour ce cas, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur I.

Définition : **Convergence normale**

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I si à partir d'un certain rang n_0, f_n est bornée et si $\sum_{n\geq n_0} \|f_n\|_\infty$ converge.

De même, on dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur tout segment $K \subset I$ si et seulement si $\sum f_{n|K}$ converge normalement sur K.

Proposition :

$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I est équivalent à :

$$\begin{cases} \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \; / \; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ convergente} \\ \forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x)| \leq a_n \end{cases}$$

Proposition :

La convergence normale sur I implique la convergence normale sur tout segment $K \subset I$.
- la réciproque est fausse ;
- la convergence normale implique la convergence absolue donc la convergence simple de la série de fonctions.

7.2 Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Théorème :
$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : I \to \mathbb{K}$ avec f_n continue sur I. On suppose de plus que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement ur tout segment $J \subset I$.

Alors la fonction somme $S : I \to \mathbb{K}, x \mapsto S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I.

Corollaire :
Théorème de la double limite Si a est une extrémité finie ou infinie de I et si chaque $f_n : I \to \mathbb{K}$ admet une limite ℓ_n en a. Si d'autre part $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I.
Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ est convergente et

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Chapitre 8

Séries entières

Définition :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On étudie la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ avec

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ z &\longmapsto f_n(z) = a_n z^n \end{aligned}$$

8.1 Rayon de convergence

Lemme : **Lemme d'Abel**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors $\forall z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < |z_0|$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition : **Rayon de convergence**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière réelle ou complexe, on appelle rayon de convergence de la série entière le réel positif (éventuellement égal à l'infini) défini par

$$R = \sup\{\rho \in \mathbb{R}_+ \,/\, (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \}$$

Théorème :
Soit $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

– si $R = 0$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$

- si $R = +\infty$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente, et de plus, $\forall r > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \diagup |z| \leq r\}$
- si $R \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\forall z \in \mathbb{C} \diagup |z| < R$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente, et $\forall z \in \mathbb{C} \diagup |z| > R$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est grossièrement divergente, et de plus $\forall r \in]0, R[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \diagup |z| \leq r\}$

Définition : **Disque ouvert de convergence**

Si R rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$, alors

$$D(0, R) = \{z \diagup |z| < R\}$$

s'appelle le disque ouvert de convergence de la série entière.
Posons

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

alors

$$D(0, R) \subset D_S \subset \overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{K} \diagup |z| \leq R\}$$

Proposition :

Continuité de la somme Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors l'application

$$z \longmapsto S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur le disque ouvert de convergence.

Proposition :

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$, dans le cas réel.

- si de plus $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ est convergente alors $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ continu sur $] - R, R]$
- si de plus $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (-R)^n$ est convergente alors $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ continu sur $[-R, R[$

Proposition :

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec $\forall n \quad a_n \neq 0$

$$z \neq 0 \qquad \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \; |z|$$

Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} = L|z|$$

Et $R = 1/L$

8.2 Opérations algrébriques sur les séries entières

Proposition :
Multiplication par un scalaire Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence R_a et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$ admet R_a comme rayon de convergence et $\forall z \;/\; |z| < R_a$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Proposition :
Somme de deux séries entières Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$ et

- $R = \inf(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $\forall z \;/\; |z| < R$
- $R \geq R_a$ si $R_a = R_b$ et $\forall z \;/\; |z| < R_a$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Proposition :
Produit de Cauchy de deux séries entières Soient $\sum_{p\in\mathbb{N}} c_p z^p$ et $\sum_{q\in\mathbb{N}} b_q z^q$ de rayons de convergence R_c et R_b. On appelle produit de Cauchy des deux séries entières précédentes la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{p+q=n} c_p b_q$$

On a $R \geq \inf(R_c, R_b)$. En outre, $\forall z \;/\; |z| < \inf(R_c, R_b)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p \cdot \sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q$$

Définition :
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On appelle
– série dérivée de la série précédente la série entière définie par

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$$

– primitive la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$$

Proposition :
Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

8.3 Série entière réelle ou complexe d'une variable réelle

Théorème :
Soit S la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n t^{n+1}}{n+1}$ admet pour somme sur D_S la primitive de S telle que $S(0) = 0$.

Théorème :
La somme $S : t \mapsto S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et de plus

$$\forall t \in]-R, R[\qquad S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

8.4 Fonctions développables en séries entières à l'origine

Définition :

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ définie au voisiage de 0, on dit que F est développable en série entière à l'origine (DSE) si :

– il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$;

– il existe $0 < \alpha < R$ tel que

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Proposition :

L'ensemble des fonctions DSE à l'origine est une $\mathbb{K}$-algèbre :

– l'application nulle est DSE ;

– stabilité par combinaison linéaire et par produit (Cauchy).

Proposition :

Si F est DSE à l'origine, alors F est C^∞ au voisinage de 0.

Corollaire :

Si F n'est pas C^∞ à l'origine, alors elle n'est pas DSE.

Théorème :

Soit F définie au voisinage de 0. Alors F DSE à l'origine si et seulement si

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in]-\alpha, \alpha[\;/\; \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Chapitre 9

Séries de Fourier

9.1 Somme partielle de Fourier d'une fonction 2π-périodique, continue par morceaux

Définition :

On envisage le produit hermitien :

$$\forall f, g \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \qquad \langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

Posons $\forall n \in \mathbb{Z} \quad e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e_n(t) = e^{int}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ famille orthonormale de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Définition :

Autres normes :
– Norme quadratique

$$f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$$

– Norme de la convergence en moyenne

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

– Norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup(|f(t)|, t \in [0, 2\pi])$$

Et on a les équivalent suivantes :

$$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \qquad \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$$

Définition :

Notons $E = C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques. Soit $f \in E$ telle que
– $f_{|[0,2\pi[}$ soit continue par morceaux et f 2π-périodique.
– $f_{|[0,2\pi[}$ admet un nombre fini de discontinuité de première espèce.
On peut définir les trois objets suivants $\|f\|_1, \|f\|_2, \|f\|_\infty$ tels qu'ils sont définis plus haut. $\|.\|_\infty$ est bien une norme, mais $\|f\|_1, \|f\|_2$ n'en sont pas ici.

Définition :

Soit $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on appelle coefficient de Fourier (exponentiel) de f la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-int} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Avec $\alpha \in \mathbb{R}$, fixé.

Définition :

On appelle somme partielle de Fourier de rang n de $f \in C_{2\pi}$ la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n$, c'est à dire

$$\sum_{k=-n}^{n} \langle\, e_k \,|\, f \,\rangle\ e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

On notera

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{ikt} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt) \Big) \end{aligned}$$

Définition :

Plus généralement, soit $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} S_n(f) : t \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{ikt} = \frac{a_0(f)}{2} \\ + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt) \Big) \end{aligned}$$

On appelle série de Fourier de f

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n = c_0(f) + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(c_n(f) e_n + c_{-n}(f) e_{-n} \Big)$$

Théorème : Inégalité de Bessel

Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=-n}^{n} \Big| \langle e_n \mid f \rangle \Big|^2 \leq \|f\|^2$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

On admet ce résultat pour $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

9.2 Problèmes de convergence

Théorème : Théorème de Bessel-Parseval

Soit $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. En outre f vérifie la formule de Parseval, $\forall f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \Big)$$

Proposition :

Soit $\varphi : C_{2\pi} \to \mathbb{K}^2, f \mapsto \varphi(f) = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$, alors φ est linéaire et injective.

Proposition :

Soient $f, g \in C_{m,2\pi}$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f}(t) g(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n}(f) c_n(g)$$

Théorème : Théorème de Dirichlet de convergence normale

Soit $f \in C_{2\pi}$ et $f \in C^1_{m,2\pi}$. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f. A fortiori elle converge simplement, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \, \mathrm{e}^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \Big)$$

Théorème : Théorème de Dirichlet de convergence simple

Soit $f \in C^1_{m,2\pi}$, alors sa série de Fourier converge simplement vers la régularisée de f notée $\tilde{f}$ et définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{\lim\limits_{n \to t^+} f(t) + \lim\limits_{n \to t^-} f(t)}{2}$$

Traduction pratique :

$$f \in C^1_{m,2\pi} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, \mathrm{e}^{inx}$$

Chapitre 10

Équations différentielles linéaires

10.1 Généralités

Définition :
On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute structure du type

$$X' = a(t)X + b(t) \tag{L}$$

avec

$$\begin{gathered} a : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \\ b : I \longrightarrow \mathbb{K}^n \end{gathered}$$

continues.
On appelle équation homogène associée à (L) l'équation

$$X' = a(t)X \tag{H}$$

Soit J un sous-intervalle de I. On appelle J-solution de (L) toute application $\varphi : J \to \mathbb{K}^n$ de classe C^1 et vérifiant

$$\varphi'(t) = a(t)\Big(\varphi(t)\Big) + b(t)$$

Proposition :
L'ensemble des solutions sur J de l'équation (L) est définie par l'ensemble des solutions sur J de (H) auquel on rajoute une solution particulière de (L).

Théorème : **Principe de superposition**

On suppose que $b = b_1 + \cdots + b_p$, avec $\forall i \in [\![1, p]\!], b_i \in C(I, \mathbb{K})$ et

$$X' = a(t)X + b_i(t) \tag{Li}$$

Si φ_i est solution particulière de (Li), alors $\varphi_1 + \cdots + \varphi_p$ est solution particulière de (L).

Théorème : **Théorème fondamental**

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = a(t)X + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution φ vérifiant, $\forall t \in J$:

$$\begin{cases} \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t) \\ \varphi(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Corollaire :

$S_I(H)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Définition : **Matrice wronskienne**

Système fondamental de solution de l'équation homogène

Désignons par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ n solutions de (H), et $t \in I$.

La matrice des composantes de $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ relativement à la base canonique $\mathbb{K}^n$ s'appelle matrice wronskienne de la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et on appelle wronskien de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ le déterminant de la matrice wronskienne. On note

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) = \det_B(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

Proposition :

Il y a équivalence entre

1. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base de $S_I(H)$
2. $\exists t_0 \in I \quad W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$
3. $\forall t \in I \quad W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) \neq 0$

Dans ce cas on dit que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solution de (H), c'est à dire $S_I(H) = \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Proposition :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ solution de (L) $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_n' \varphi_k = b$

10.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Définition :
Toute écriture du type $x' = a(t)x + b(t)$, avec $a, b \in C(I, \mathbb{K})$ ou du type $\alpha(t)x' + \beta(t)x + \gamma(t) = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in C(I, \mathbb{K})$, et $\alpha(I) \subset \mathbb{K}^*$.

Proposition :
Problème de Cauchy : $\exists! \varphi \in C^1(I, \mathbb{K})$ tel que

$$\begin{cases} \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in (I, \mathbb{K})$

Soit $A : I \to \mathbb{K} \ / \ t \mapsto A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u)\ \mathrm{d}u$, on introduit l'application $\Psi(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$.

On a donc $C'(t) = b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$, d'où $C(t) = C + \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(v)\,\mathrm{e}^{-A(v)}\ \mathrm{d}v$.

Finalement :

$$\Psi(t) = C\,\mathrm{e}^{A(t)} + \mathrm{e}^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(v)\,\mathrm{e}^{-A(v)}\ \mathrm{d}v$$

10.3 Systèmes différentiels à coefficients constants

Définition :
On suppose que $a \in C(I, \mathcal{L}(\mathbb{K}^n))$ est constante sur $I = \mathbb{R}$, cest à dire $\forall t \quad a(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est indépendante de t, et on a

$$X' = AX + b(t)$$
$$X' = AX$$

Si $A = (z_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$, alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i(t)$$

Résolution de (H) lorsque A est diagonalisable sur K]Résolution de (H) lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$

10.4 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Définition :
Il s'agit des équations de la forme

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

avec $a, b, c \in C(I, \mathbb{K})$.

Théorème : **Théorème de Cauchy**

Soit $(t_0, x_0, x_0') \in I \times \mathbb{K}^2$, alors il existe une unique solution φ de l'équation

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

vérifiant

$$\varphi(t_0) = x_0 \qquad \varphi'(t_0) = x_0'$$

Proposition :
Soit $t_0 \in I$, et

$$\begin{aligned} u_{t_0} : S_I(H) &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ \varphi &\longmapsto u_{t_0}(\varphi) = (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{aligned}$$

$u_{t_0} \in \mathcal{L}(S_I(H), \mathbb{K}^2)$ et la traduction du théorème précédent donne la bijectivité de u_{t_0}.
Donc $S_I(H) \simeq \mathbb{K}^2$, donc $\dim S_I(H) = 2$

Définition :
Soit $\varphi_1 ? \varphi_2$ deux solutions. On appelle déterminant wronskien de (φ_1, φ_2) en t_0 le déterminant

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{vmatrix}$$

Théorème :
Soit (φ_1, φ_2) un couple de solution de (H), alors il y a équivalence entre :
1. (φ_1, φ_2) base de l'ensemble des solutions de (H)
2. $\exists t_0 \in I \quad \varphi_1(t_0)\varphi_2'(t_0) - \varphi_2(t_0)\varphi_1'(t_0) \neq 0$
3. $\forall t \in I \quad \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' \neq 0$

(φ_1, φ_2) s'appelle un système fondamental de solution de (H).

Proposition :

Soit l'équation $x'' + ax' + bx = \mathrm{e}^{\alpha t} P_n(t)$, avec P polynôme de degré n, et $a \in \mathbb{K}$.
On recherche des solutions du type (avec $\deg Q = n$) :
- $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} Q_n(t)$, si α n'est pas solution de l'équation carctéristique.
- $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} t Q_n(t)$ si α est une racine simple.
- $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} t^2 Q_n(t)$ si α est une racine double. On peut aussi rechercher une solution particulière du type $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} z(t)$

Chapitre 11

Géométrie des espaces vectoriels euclidiens

11.1 Automorphismes orthogonaux

Définition : **Endomorphisme orthogonal**

On appelle endormorphisme othogonal tout endomorphisme u de E vérifiant

$$\forall x \in E \qquad \|u(x)\| = \|x\|$$

Théorème :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre :

1. $u \in \mathcal{O}(E)$ (u conserve la norme)
2. $\forall x, y \in E \quad \langle\, u(x) \,|\, u(y) \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle$
3. u transforme toute base orthonormée en orthonormale
4. $\exists B$ BON $\;/\;$ $u(B)$ BON
5. Soit B une BON et $A = \mathrm{Mat}_B(u)$ alors $AA^t = I$
6. Soit B une BON et $A = \mathrm{Mat}_B(u)$ alors $A^tA = I$
7. Soit B une BON et $A = \mathrm{Mat}_B(u)$, alors A est inversible et $A^{-1} = A^t$

Théorème :
$(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. On l'appelle groupe orthogonal de E.
Soient $f, g \in \mathcal{O}(E)$, $\forall x \in E \quad f \circ g^{-1} \in \mathcal{O}(E)$

Théorème :

Soit $S\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \ / \ \det u = 1\}$, alors $(S\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$. On l'appelle le groupe spécial orthogonal de E.

On a $u \circ v^{-1} \in S\mathcal{O}(E)$.

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il y a équivalence entre :

1. $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^t$
2. A vérifie $AA^t = I$
3. A vérifie $A^tA = I$
4. Les vecteurs colonnes de A forment une BON de $\mathbb{R}^n$ (structure euclidienne canonique).

Théorème :

– $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times) \subset (GL_n(\mathbb{R}), \times)$. On l'appelle groupe orthogonal d'indice n.
– $(S\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times) \subset (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$. On l'appelle groupe spécial orthogonal d'indice n.

Proposition :

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$:

1. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1, -1\}$, $\ker(u - \mathrm{id}) \perp \ker(u + \mathrm{id})$
2. u diagonalisable $\Leftrightarrow$ u symétrie orthogonale
3. soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Proposition :

Formulaire
– $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$
– $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$
– $S_\varphi \times S_{\varphi'} = R_{\varphi-\varphi'}$
– $R_\theta = S_\varphi \times S_{\varphi-\theta} = S_{\varphi'+\theta} \times S_{\varphi'}$

11.2 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien

Définition : **Endomorphisme symétrique**

Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit u est un endomorphisme symétrique de E si

$$\forall x, y \in E \qquad \langle\, u(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, u(y) \,\rangle$$

Notation : $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E

Proposition :

p projecteur de E, alors p projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p \in S(E)$.

Proposition :

$u \in \mathcal{L}(E)$, B BON de E, $\dim E = n$, alors

$$u \in S(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) \in S_n(\mathbb{R})$$

Proposition :

$(S(E), +, \cdot)$, $\mathbb{R}$-ev isomorphe à $(S_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$. En particulier

$$\dim S(E) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition :

Propriétés spectrales

Soit $u \in S(E)$, alors :

1. χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Soit F sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.
3. Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Théorème : **Théorème spectral**

Soit $u \in S(E)$ avec $(E, \langle \mid \rangle)$, espace vectoriel euclidien, alors u admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Définition : **Endomorphisme symétrique positif**

Soit $u \in S(E)$. On dit que u est positif si $\forall x \in E$, on a $\langle\, x \mid u(x)\, \rangle \geq 0$. De même, $A \in S_n(\mathbb{R})$, on dit que A est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \geq 0$.

De même avec la positivité stricte.

Proposition :

Soit $u \in S(E)$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$.
– u positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$
– A positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$
Donc $\mathrm{Sp}({}^tMM) \subset \mathbb{R}_+$

11.3 Conique et quadrique

Définition : **Conique**

Soit $R = (O, i, j)$ un repère cartésien orthonormé d'un plan affine euclidien. Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \;/\; (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

– On appelle conique du plan affine tout ensemble

$$\Gamma = \{M \;/\; \overrightarrow{\theta M} = xi + yj \;/\; F(x, y) = 0\}$$

– $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2eg + f$

F est une équation implicite de Γ.

Proposition :

Types de coniques :

– Ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– Hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– Parabole :

$$y^2 - 2px = 0$$

Proposition :

On a

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d & 2e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f \end{aligned}$$

Théorème :

Si $\operatorname{Sp} A = \{\lambda, 0\}$ alors la conique est du genre parabole.

Il existe un repère orthonormé direct $(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ tel que Γ admet une équation réduite sous la forme

$$\frac{X^2}{\eta^2} - 2pY + \varepsilon = 0$$

Proposition :

Proposition :

	Équation réduite	Nature de Γ
$p \neq 0$	$\frac{X^2}{\eta^2} = 2p\left(Y - \frac{\varepsilon}{2p}\right)$	parabole
$p = \varepsilon = 0$	$X^2 = 0$	axe $O'Y$ (droite double)
$p = 0, \varepsilon = 1$	$X^2 + b^2 = 0$	$\emptyset$
$p = 0, \varepsilon = -1$	$X^2 - b^2 = 0$	réunion de deux droites

Table 11.1 – Classification des coniques

$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$	Sphère
$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$	H_1 (hyperboloïde à une nappe)
$X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$	H_2 (hyperboloïde à deux nappes)
$X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$	hyperbole
$X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$	PH (paraboloïde hyperbolique)

Table 11.2 – Classification des quadriques

Définition : **Quadrique**

Une quadrique est de la forme :

$$\Gamma = \{M \ / \ ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + \alpha x + \beta y + \gamma z + g = 0\}$$

Ou encore

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + g = 0$$

Chapitre 12

Fonctions de plusieurs variables

12.1 Applications de classe C^1

Définition :

Application partielle en un point selon une direction

Soit $a \in U, h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$

$\exists r > 0 \;/\; B(a,r) \subset U$ et choisissons $X = a + th \;/\; N_p(th) = |t|N_p(h) < r$

Posons

$$\varphi_a : \left]\frac{-p}{N_p(h)}, \frac{p}{N_p(h)}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \varphi_a(t) = f(a+th)$$

Donc φ_a est une fonction vectorielle d'une variable réelle.

φ_a est une fonction vectorielle d'une variable réelle. Elle s'appelle application partielle de f en a selon la direction h.

Définition :

Dérivée selon une direction en un point

On dit que f admet une dérivée en a semon la direction $h \neq 0$ si φ_a est dérivable en 0, c'est à dire si

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_a(t) - \varphi_a(0)}{t - 0}$$

existe.

On notera cette limite $\varphi_a'(0) = D_h f(a)$

Définition : **Dérivée partielle**

On dit que f admet une dérivée partielle en a selon la j$^{\text{e}}$ direction si $D_{e_j}f(a)$ existe.

On notera

$$D_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Applications de classe C1]Applications de classe C^1

Définition :

On dit que f est de classe C^1 sur U si f admet des dérivées partielles sur U continues sur U.

Théorème :

Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, alors $\forall a \in U$, f admet une dérivée partielle selon la direction $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j$ en a et

$$D_h f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Opérations sur l'ensemble des applications de classe C1]Opérations sur l'ensemble des applications de classe C^1

Matrice jacobienne d'une application de classe C1]Matrice jacobienne d'une application de classe C^1

Définition :

On appelle matrice jacobienne de f en $a \in U$ la matrice de $\mathrm{d}f_a$ relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

Notation : J_f

On a

$$J_{f_a} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

C1 difféomorphisme]C^1 difféomorphisme

Définition :

Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$. On dit que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur V si $\phi : U \to V$ est bijective, avec ϕ de classe C^1 sur U et ϕ^{-1} sur V.

Théorème :

Il y a équivalence entre :

1. ϕ réalise un C^1-difféomorphisme de U sur $\phi(U)$
2. $\forall a \in U, \mathrm{d}\phi_a \in GL_n(\mathbb{R})$

12.2 Fonction numériques de classe C^1

L'algèbre C1(U,R)]L'algèbre $C^1(U,\mathbb{R})$

Définition :

$C^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications numériques définies sur U et admettant des dérivées partielles continues sur U.

$\forall a \in U \quad \mathrm{d}f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$, c'est à dire $\mathrm{d}f_a$ est une forme linéaire.

$$J_{f_a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Soit $h = (h_1,\ldots,h_p) \in \mathbb{R}^p$, alors

$$\mathrm{d}f_a(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, h_j$$

Théorème :

$C^1(U,\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. En outre, l'application

$$\begin{aligned} \Psi_a : C^1(U,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \Psi_a(f) = \mathrm{d}f_a \end{aligned}$$

est linéaire, c'est à dire $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^1(U,\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{d}(\lambda f + g)_a = \lambda \mathrm{d}f_a + \mathrm{d}g_a$$

De plus, on a
- $f \times g \in C^1(U,\mathbb{R})$
- $\forall a \in U$

$$\mathrm{d}(f \times g)_a = g(a)\mathrm{d}f_a + f(a)\mathrm{d}g_a$$

- si de plus $f \in C^1(U,\mathbb{R}^*)$, alors $1/f \in C^1(U,\mathbb{R}^*)$ et $\forall a \in U$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{1}{f(a)^2}\, \mathrm{d}f_a$$

Gradient d'une fonction numérique de classe C1]Gradient d'une fonction numérique de classe C^1

Théorème :

$\forall a \in U, \forall f \in C^1(U,\mathbb{R})$, alors il existe un unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ noté $\nabla f(a)$ vérifiant

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \qquad \mathrm{d}f_a(h) = \langle\, \nabla f(a) \,|\, h \,\rangle$$

$\nabla f(a)$ s'appelle le vecteur gradient de f en a.

Si de plus $(e_1,\ldots,e_p)$ base canonique de $\mathbb{R}^p$

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, e_j$$

Définition : **Point critique**

On appelle point critique de f tout point $a \in U$ vérifiant $\nabla f(a) = 0$.

Définition : **Extremum**

On dit que f admet un maximum local en $a \in U$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et vérifiant $\forall x \in B(a,r) \quad f(x) \leq f(a)$.

De même, f admet un maximum local strict en $a \in U$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et vérifiant $\forall x \in B(a,r) \setminus \{a\} \quad f(x) < f(a)$.

Théorème :

Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

12.3 Applications de classe C^k

Définition :

On définit les fonctions de classe C^k par récurrence :$f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\forall j \in [\![1,p]\!] D_j f \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^n)$$

Proposition :

$C^k(U, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel dont $C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace.

En outre, $\forall j \in [\![1,p]\!]$

$$\begin{aligned} D_j : C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^k(U, \mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto D_j f = \frac{\partial f}{\partial j} \end{aligned}$$

est linéaire.

Théorème : **Théorème de Schwarz**

$\forall i, j \in [\![1,p]\!]$ les restrictions de D_i et D_j à $C^2(U, \mathbb{R}^n)$ commutent, c'est à dire :

$$\forall f \in C^2(U, \mathbb{R}^n) \qquad D_i \circ D_j(f) = D_j \circ D_i(f)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Proposition :

- Composition :
  Soient $f \in C^k(U \subset \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n), g \in (V \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, et $f(u) \subset V$, alors $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$.
- $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Proposition :

Caractérisation des C^k-difféomorphisme.

Soit $\phi \in (U, \mathbb{R}^p)$ avec ϕ injective de U sur l'ouvert $V = \phi(U)$. Il y a équivalence entre :
- $\forall x \in U \qquad \mathrm{d}\phi_x \in GL(\mathbb{R}^p)$
- $\phi : U \to V$ est bijective avec ϕ et ϕ^{-1} de classe C^k.

Chapitre 13

Géométrie

13.1 Plan

Définition :

Notation : $D(a, \overrightarrow{u})$, avec $A(a, b)$, et

$$\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{u} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j}$$

Alors

$$M(x, y) \in D(A, \overrightarrow{u}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists\lambda \in \mathbb{R} \\ x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \end{cases}$$

qui est un système d'équations paramétrées (λ est le paramètre).
L'élimination de λ donne une équation cartésienne :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$$

$\overrightarrow{v} = \beta\overrightarrow{i} - \alpha\,\overrightarrow{j}$ est orthogonal à $D(A, \overrightarrow{u})$.

Proposition :

Cas où la droite est définie par deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ distincts.
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. L'équation de la droite est alors :

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B \\ y & y_A & y_B \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Définition :

Distance d'un point M à une droite :

$$d(M, D) = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n} \right\rangle \right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur D et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à D.

Définition :

Équations réduites :
- ellipse :
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- hyperbole :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- parabole :
$$y^2 = 2px$$
  où p est le paramètre.

Définition : **Arc paramétré**

Soit $A(I, f)$ un arc paramétré, avec $f \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$.

$$M \in A(I, f) \iff \begin{cases} \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} \\ f(t) = (x(t), y(t)) \end{cases}$$

Proposition :

Réduction de l'intervalle d'étude
- si $r(-\theta) = r(\theta)$, alors on a une symétrie
- si $r(2\theta_0 - \theta) = r(\theta)$, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[\theta_0, \theta_0 + T]$.

Théorème : **Théorème des fonctions implicites**

Soit $F \in C^1(U, \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma = \{M(x, y) \;/\; F(x, y) = 0\} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \end{array}\right\} \iff y = f(x) \quad \text{localement}$$

avec

$$f(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

13.2 Espace

Définition : **Plan**

$\Pi(M_0, F)$, avec F un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E_3. Il s'agit du plan passant par M_0 et de direction F.

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0), F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}, \overrightarrow{v} = \alpha'\overrightarrow{i} + \beta'\overrightarrow{j} + \gamma'\overrightarrow{k}$ (remarque : $\dim F = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq 0$), alors

$$M(x, y, z) \in \Pi(M_0, F) \Longleftrightarrow \exists\lambda, \mu \in \mathbb{R} \diagup \begin{cases} x = x_0 + \lambda x + \mu x' \\ y = y_0 + \lambda y + \mu y' \\ z = z_0 + \lambda z + \mu z' \end{cases}$$

(système paramétrique)

Enfin, l'équation cartésienne indique que $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée. On élimine λ, μ entre les trois équations :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y' & \beta & \beta' \\ z - z' & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

On obtient alors une équation du type $((a, b, c) \neq (0, 0, 0))$

$$ax + by + cz = h$$

Et $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal au plan.

Proposition :

Equation d'un plan passant par trois points M_0, M_1, M_2 :

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Proposition :

Distance d'un point à un plan.

$$d(A, \Pi) = \|\overrightarrow{AH}\| = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM_0} \mid \overrightarrow{n} \right\rangle\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

avec $\overrightarrow{n}$ normal au plan, et H le projeté orthogonal de A sur Π.

Proposition :

Distance d'un point à une droite

$$d(A, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{M_0A} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

avec $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de Δ.