# Mathématiques — Cours PC

Harold Erbin

18 décembre 2010

# Sommaire

*Ces cours ont été copiés lors des cours de mathématiques de PC, de l'année 2008–2009, de fait, il se peut que des erreurs se soient glissés à certains endroits. Le chapitre d'algèbre linéaire ne comporte que peu d'exemples et de preuves, tandis que celui sur les arcs paramétrés n'est constitué que de notes parcellaires. De même, certaines preuves sont absentes, et quelques exemples n'ont pas été recopiés dans leur intégralité.*

# Chapitre 1

# Algèbre linéaire

## 1.1 Vocabulaire

### 1.1.1 Espace vectoriel

#### Définition

**Définition**

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev si, par définition :
– $(\mathbb{K}, +)$ groupe abélien
– $\cdot$ loi externe :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

De plus, $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K$

$$\begin{aligned} \lambda(x+y) &= \lambda x + \lambda y \\ (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x \\ (\lambda\mu)x &= \lambda(x\mu) \\ 1 \cdot x &= x \end{aligned}$$

---

*Exemples* :

1. $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev
2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$-ev
3. $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ avec X partie non vide
   $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f+g: \quad & X \longrightarrow \mathbb{K}: \quad x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \lambda f: \quad & X \longrightarrow \mathbb{K}: \quad x \longmapsto (\lambda f)(x) = (\lambda f)(x) \end{aligned}$$

4. $E, F$ deux $\mathbb{K}$-ev

$$E \times F = \{(x, y) \;/\; x \in E, y \in F\}$$

   $\forall (x, y), (x', y') \in E \times F$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

   $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

   Donc $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
   Cas particulier : $E = F$

$$E \times F = E \times E = E^2$$

   Plus généralement : $E \times \cdots \times E = E^n$ $\mathbb{K}$-ev

### $\mathbb{K}$-algèbre

**Définition**

$(E, +, \cdot, \times)$ est une algèbre si :
– $(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev
– $\times$ est une loi de composition interne telle que $(E, +, \times)$ soit un anneau
– $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$

$$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$$

---

*Exemples* :

1. $(\mathbb{K}, +, \cdot, \times)$ $\mathbb{K}$-algèbre
2. $(\mathbb{C}, +, \cdot, \times)$ $\mathbb{R}$-algèbre
3. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients réels dans $\mathbb{K}$
4. $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ $\mathbb{K}$-algèbre des applications de X dans $\mathbb{K}$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \quad f \times g : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \end{array}$$

5. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad n \in \mathbb{N}^*$
$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \quad B = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$

$$A + B = (c_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \qquad \forall i, j \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\lambda A = (d_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \qquad \forall i, j \quad d_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$A \times B = (e_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \qquad \forall i, j \quad e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + b_{kj}$$

### Familles génératrice, libre et base

**Définition**

**Combinaison linéaire**

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev

$(e_1, \ldots, e_n)$ famille de $n \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de $E$

$x \in E$ est combinaison linéaire (CL) de $(e_1, \ldots, e_n)$ s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

---

Plus généralement $(e_i)_{i\in I}$ famille quelconque de E, on appelle $x$ : CL de $(e_i)_{i\in I}$ tout vecteur s'exprimant comme la combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $(e_i)_{i\in I}$, c'est à dire qu'il existe J partie finie de I :

$$\exists(\lambda_j)_{j\in J} \;/\; x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j$$

L'ensemble des CL sera noté $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$.

---

**Définition**

**Famille génératrice**

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev

$F = (e_i)_{i\in I}$ famille quelconque de $E$

On dit que $F$ est génératrice de $E$ si $E = \mathrm{Vect}(e_i)$.

---

**Définition**

**Famille libre**

$F = (e_1, \dots, e_n)$ famille de vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

$F$ est libre si $\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Plus généralement, $F = (e_i)_{i\in I}$ famille quelconque de $E$.

$F$ est libre si toute sous-famille de $(e_i)_{i\in I}$ est libre.

---

*Exemples* :

1. $E = \mathbb{K}[X]$
   - Toute famille de polynômes échelonnées en degré est libre.
   - Toute famille de polynômes échelonnées en valuation m est libre.
   - Polynômes interpolateurs de Lagrange.
     $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux différents, $n \in \mathbb{N}$

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \qquad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

$(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$

$$\forall(\lambda_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k = 0$$

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k\right)(a_i) = 0$$

$$\sum_{k=0} \lambda_k L_k(a_i) = 0 \text{ c'est à dire } \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{ik} = 0$$

$$L_k(a_i) = \delta_{ik}$$

**Définition**

**Famille liée**

$(e_i)_{i \in I}$ est liée si elle n'est pas libre, c'est à dire si l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme CL des autres.

Par exemple si $\lambda_n \neq 0$ alors :

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1})$$

Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

---

**Théorème**

$E$ $\mathbb{K}$-ev

Toute famille de $n+1$ vecteurs s'exprimant chacun comme CL de $n$ vecteurs est une famille liée.

---

*Preuve* :

Récurrence sur $n$ :

Initialisation : $n = 1$

$$\begin{cases} f_1 = \lambda_1 e_1 \\ f_2 = \lambda_2 e_2 \end{cases}$$

– $\lambda_1 = 0 \quad f_1 = 0 \quad (f_1, f_2)$ liée

– $\lambda_1 \neq 0 \quad f_2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} f_1$ c'est à dire $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_1 = 0$ donc $(f_1, f_2)$ liée.

Hérédité : si vraie pour $n$, alors on démontre pour $n+1$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1 & = & a_{1,1} e_1 + \cdots + a_{n+1,1} e_{n+1} \\ & \vdots & \\ f_{n+2} & = & a_{1,n+2} e_1 + \cdots + a_{n+1,n+2} e_{n+1} \end{array} \right.$$

Si $\forall k \in [\![1, n+2]\!] \quad a_{n+1,k} = 0$, $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ liée donc $(f_1, \ldots, f_{n+2})$.

Sinon, par exemple si $a_{n+1,n+2} \neq 0$

$$\left. \begin{array}{rcl} f_1 - \frac{a_{n+1,1}}{a_{n+1,n+2}} f_{n+2} & \in & CL(e_1, \ldots, e_n) \\ & \vdots & \\ f_{n+1} - \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n+1,n+2}} f_{n+2} & \in & CL(e_1, \ldots, e_n) \end{array} \right\} \Rightarrow (f_1, \ldots, f_{n+2}) \text{ liée}$$

□

**Définition**

**Base**

Toute famille $(e_1, \ldots, e_n)$ libre et génératrice de $E$ est une base si et seulement si

$$\forall x \in E \quad \exists (x_1, \ldots, x_n)! \in \mathbb{K}^n \ / \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

*Exemples* :

$\mathbb{K}[X]$ : $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$

### 1.1.2 Sous-espace vectoriel

**Définition et caractérisation**

**Définition**

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev, on appelle sev de $E$ toute partie de $F$ non vide, stable par $+$ et $\cdot$, et tel que $F$, muni des lois induites, soit lui-même un ev.

**Proposition**

Caractérisation :

$(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev, et $F$ une partie de $E$.

$F$ sev de $E \Leftrightarrow 0 \in F$ et $F$ stable par CL.

*Exemples* :

1. $F, G$ deux sev, alors $F \cap G$ sev de $E$.
2. $(F_i)_{i \in I}$ famille non vide de sev de E, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ sev de $E$.
3. $A$ partie de $E$, $\mathcal{F} = \{F \text{ sev de } E \ / \ A \subset F\}$, alors $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} F$ sev de $E$ et c'est le plus petit sev de $E$ contenant la partie A.
   Notamment : $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} F = \text{Vect}(A)$
4. Cas particulier : $A = \{e_i\}_{i \in I} \quad e_i \in E$
   $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(e_i)_{i \in I}$ = ensemble des CL de $(e_i)_{i \in I}$.

### Somme de sous-espaces vectoriels

**Définition**

$F, G$ deux sev de $E$.

On pose $F + G = \{x + y \;/\; x \in F, y \in G\}$.

Donc $F + G$ est un sev de $E$ appelé somme des sev $F$ et $G$.

Plus généralement : $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ famille de $n$ vecteurs de $E$, on définit

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \{x_1 + \cdots + x_n \;/\; \forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i \in F_i\}$$

et il s'agit d'un sev de $E$.

---

*Exemples* :

$$x \in \sum_{i=1}^{n} F_i \Leftrightarrow \exists \underbrace{x_1}_{\in F_1}, \ldots, \underbrace{x_n}_{\in F_n} \;/\; x = x_1 + \cdots + x_n$$

### Somme directe de sous-espaces vectoriels

Rappel : on prend le cas de deux sous-espaces vectoriels de $E$.

**Définition**

**Somme directe de sous-espaces vectoriels**

$F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, on dit que $F + G$ est directe si

$$\forall x \in F, y \in G \quad x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

---

**Proposition**

Caractérisation :

$$\begin{aligned} H = F \oplus G &\Longleftrightarrow \forall w \in H, \exists (x,y)! \in F \times G \;/\; w = x + y \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} H = F + G \\ F \cap G = \{0\} \end{array} \right. \end{aligned}$$

---

*Exemples* :

- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $F = S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; {}^tM = M\}$
- $G = A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; {}^tM = -M\}$

On a

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$$

Objectif :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; \exists S! \in S_n(\mathbb{R}), A! \in A_n(\mathbb{R})$$

vérifiant $M = S + A$.

Analyse : supposons le problème résolu

$$\exists S \in S_n(\mathbb{R}), A \in A_n(\mathbb{R}) \begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = S - A \end{cases}$$

donc

$$S = \frac{M +^t M}{2} \qquad A = \frac{M -^t M}{2}$$

On vérifie l'unicité de la décomposition (la somme est directe).

Synthèse : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$M = \underbrace{\frac{M +^t M}{2}}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M -^t M}{2}}_{\in S_n(\mathbb{R})}$$

Généralisation

**Définition**

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de $E$, $p \in \mathbb{N}^*$.

On dit que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \quad x_1 + \dots + x_p = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$$

Notation : $F_1 \oplus \dots \oplus F_p = \bigoplus_{i \in [\![1,p]\!]} F_i$

**Proposition**

Caractérisation :

$F_1, \dots, F_p$, $p$ sous-espaces vectoriels de $E$, $p \geq 2$

Il y a équivalence entre :

1. $G = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

2. $\forall x \in G$

$$\exists (x_1, \dots, x_p)! \in F_1 \times \dots \times F_p \;/\; x = x_1 + \dots + x_p$$

3. $G = \sum_{i=1}^{p} F_i$ et

---

*Preuve* :

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$

L'existence assure que $G = \sum_{i=1}^{p} F_i$. De plus, soit $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$

$$0 = x_1 + \dots + x_p$$
$$0 = 0 + \dots + 0$$

Par identification, $x_1 = 0$, $\dots$, $x_p = 0$.

$\square$

*Exemples* :

$E = MG_n$, ensemble des matrices magiques.

$M \in E$ si et seulement si

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{k=i}^{n} m_{ik} = \sum_{i=1}^{n} m_{kj}$$

Soient :
– $F = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = MG_n \cap A_n(\mathbb{R}) = \{M \in MG_n \;/\; {}^tM = -M\}$
– $G = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = MG_n \cap S_n(\mathbb{R}) = \{M \in MG_n \;/\; {}^tM = M; \operatorname{tr} M = 0\}$
– $H = \operatorname{Vect} J$, où $J = (1)$
A-t-on $MG_n = F \oplus G \oplus H$ ?

Analyse : supposons le problème résolu.

$$M \in MG_n \Rightarrow \begin{cases} M = A + S + \lambda J \\ {}^tM = -A + S + \lambda J \\ \operatorname{tr} M = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} S + \lambda \operatorname{tr} J = \lambda n \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\operatorname{tr} M}{n} \\ S = \frac{M + {}^tM}{2} - \frac{\operatorname{tr} M}{n} J \\ A = \frac{M - {}^tM}{2} \end{cases}$$

Synthèse :

$$M = \underbrace{\frac{M -^t M}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{M +^t M}{2} - \frac{\operatorname{tr} M}{n} J}_{\in G} + \underbrace{\frac{\operatorname{tr} M}{n} J}_{\in H}$$

### 1.1.3 Application linéaire

#### Introduction

**Définition**

**Application linéaire**

$E, F$ deux $\mathbb{K}$-ev, on appelle application linéaire de $E$ vers $F$ toute aplication $u : E \to F$ vérifiant

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E \qquad u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$$

---

*Remarques* :
- $u(O_E) = O_F$
- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, ensemble des applications linéaires de $E$ vers $F$.
- $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev.
- Composition :
$$\left.\begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E, F) \\ v \in \mathcal{L}(F, G) \end{array}\right\} \Rightarrow v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$$
- soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $u$ s'appelle un isomorphisme d'espace vectoriel si $E \cong F$ ($E$ et $F$ sont isomorphes).

**Proposition**

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, et $F$ un $\mathbb{K}$-ev.

Toute application linéaire de$E$ vers $F$ est déterminée de manière unique par la connaissance des $u_{|E_i}$ $(i \in [\![1, p]\!])$.

---

*Preuve* :

Il s'agit de démontrer que $\forall (v_i)_{i \in [\![1,p]\!]}, v_i \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\exists! u \in \mathcal{L}(E, F) \;/\; \forall i \in [\![1, p]\!] \;\; u_{|E_i} = v_i$.

Analyse : si $u$ existe et vérifie $\forall i \in [\![1, p]\!] \;\; u_{|E_i} = v_i$,

$$\forall X \in \bigoplus_{i=1}^{p} E_i \quad \exists!(X_1, \ldots, X_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \;/\; X = X_1 + \cdots + X_p$$

$(u(X) = u(X_1) + \cdots + u(X_p) = u_{|E_1}(X_1) + \cdots + u_{|E_p}(X_p) = v_1(X_1) + \cdots + v_p(X_p)$

On a bien l'unicité.

Synthèse : $\forall X = X_1 + \cdots + X_p$ avec $X_i \in E_i$.

Posons $v(x) = v_1(X_1) + \cdots + v_p(X_p)$.

On vérifie que $u = v$ et $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad u_{|E_i} = v_i$.

---

□

**Noyau et image**

**Définition**

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $E', F'$ sous-espaces vectoriels de $E, F$, on note

$$u(E') = \{u(x), x \in E'\} \quad u^{-1}(F') = \{x \in E \ / \ u(x) \in F'\}$$

($u'$ n'est pas forcément bijective)

Cas particuliers :
- $E' = E$, $u(E) = \operatorname{Im} U = \{u(x), x \in E\}$
- $F' = \{0\}$, $u^{-1}(\{0\}) = \ker u = \{x \in E, u(x) = 0\}$

---

**Proposition**

$u(E')$ sous-espace vectoriel de $F$ et $u^{-1}(F')$ sous-espace vectoriel de $E$
- $\operatorname{Im} u = F \Leftrightarrow u$ surjective.
- $\ker u = \{0\} \Leftrightarrow u$ injective.

---

**Proposition**

Principe de résolution d'une équation linéaire.

Position du problème : $u \in \mathcal{L}(E, F), b \in F$, et on cherche $x \in E \ / \ u(x) = b$, c'est à dire à déterminer l'ensemble $\Gamma = \{x \in E \ / \ u(x) = b\}$.

- $1^{\text{er}}$cas : $b \notin \operatorname{Im} u \Rightarrow \Gamma = \emptyset$
- $2^{\text{e}}$cas : $b \in \operatorname{Im} u \Rightarrow \exists x_0 \in E \ / \ u(x_0) = b$
  $x_0$ s'appelle solution particulière de l'équation et

$$\Gamma = \{x_0 + x \ / \ x \in \ker u\}$$

---

*Preuve* :

$$\begin{aligned} x \in \Gamma &\Leftrightarrow u(x) = b \\ &\Leftrightarrow u(x) = u(x_0) \\ &\Leftrightarrow u(x - x_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x_0 \in \ker u \end{aligned}$$

$$\Gamma = \{x_0 + x \ / \ x \in \ker u\}$$

□

Rappel : équation différentielle linéaire d'ordre 1

Soient $a, b \in C(I, \mathbb{K})$, avec $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

$$(L) \quad x' + a(t)x = b(t)$$

$$(H) \quad x' + a(t)x = 0$$

$a, b$ donnés :

$$\begin{aligned} u:\ C^1(I,\mathbb{K}) &\longrightarrow C^0(I,\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto f' + af \end{aligned}$$

Résoudre $(L)$ c'est déterminer l'ensemble

$$\Gamma = \{f \in C^1(I,\mathbb{K}) \ / \ u(0) = b\}$$

La recherche de $\ker u$ revient à résoudre $(H)$.

Si $\forall t \in I \quad f'(t) + a(t)f(t) = 0$, donc

$$\exists k \in \mathbb{K} \ / \ \forall t \in I \quad f(t) = k\,\mathrm{e}^{A(t)}$$

avec $A$ primitive de $-a$ sur $I$.

$\ker u$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur directeur $t \longmapsto \mathrm{e}^{A(t)}$ $(t \in I)$.

Méthode de la variation de la constance :

$$\begin{aligned} \forall t \in I \qquad f(t) &= k(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} \\ f'(t) &= k'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} - k(t)a(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} \\ k'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} &= b(t) \\ k'(t) &= b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} \end{aligned}$$

$k$ primitive de $t \longmapsto b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$

*Exemples* :

Recherche des solutions réelles de l'équation

$$t(t^2-1)x' + 2x = t^2 \tag{1.1}$$

$$x' + \frac{2x}{t(t^2-1)} = \frac{t}{t^2-1} \qquad t \notin \{0,-1,1\}$$

Résolution sur $I \subset \mathbb{R}^* \setminus \{-1,1\}$.

$$x(t) = k\,\mathrm{e}^{A(t)}$$

Avec

$$A(t) = -\int \frac{2}{t(t^2-1)}\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{t(t^2-1)} &= \frac{-2}{t} + \frac{\delta t + \varepsilon}{t^2-1} \\
\frac{2}{t}\left(\frac{1}{t^2-1}+1\right) &= \frac{2}{t}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right) \\
&= \frac{2t}{t^2-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= k\exp\Big(2\ln|t| - \ln|t^2-1|\Big) \\
&= k\frac{t^2}{|t^2-1|}
\end{aligned}$$

Variation de la constante :

$$k' = \frac{t}{t^2-1} \qquad k(t) = \frac{1}{2}\ln|t^2-1|$$

Solution générale :
– $]-\infty, -1[$

$$x(t) = \frac{k_1 t^2}{t^2-1} + \frac{t^2\ln t}{t^2-1}$$

– $]-1, 0[$

$$x(t) = \frac{k_2 t^2}{t^2-1} + \frac{t^2\ln t}{t^2-1}$$

– etc
Recollement en 0 :

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = 0 = \lim_{t\to 0^-} x(t)$$

En 1 :

$$\frac{t^2\ln t}{t^2-1} \sim_1 \frac{t-1}{2(t-1} = \frac{1}{2}$$

$x(t) \to 1/2$ si et seulement si $k_4 = 0$

$$x(t) = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{t^2\ln t}{t^2-1} & t \neq 1 \\ 1/2 & t = 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2x\ln x + x^3 - x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-2(1+h)(h - h^2/2 + 3h^2 + 2h + o(h^2)}{4h^2 + o(h^2)} \\
&= \frac{2h^2 + o(h^2)}{4h^2 + o(h^2)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**Théorème**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $u$ réalisé un isomorphisme de tout supplémentaire de $\ker u$ sur $\operatorname{Im} u$.

---

*Preuve* :

Il s'agit de montrer : soit $G$ un supplémentaire de $\ker u$ dans $E$, c'est à dire $E = \ker u \oplus G$. Posons

$$\begin{aligned} v :\ G &\longrightarrow \operatorname{Im} u \\ x &\longmapsto v(x) = u(x) \end{aligned}$$

$v$ est un isomorphisme.

On sait que $v \in \mathcal{L}(G, \operatorname{Im} u)$.

- $v$ est injective : en effet, $x \in \ker u \Leftrightarrow v(x) = 0$, c'est à dire $x \in G$ et $x \in \ker u$, donc $x \in \ker u \cap G$.
- $v$ est surjective : $\forall y \in \operatorname{Im} u \quad \exists z \in E \;/\; y = u(z)$

$$\begin{aligned} z &\in E = \ker u \oplus G \\ z &= \underbrace{x}_{\in G} + \underbrace{x'}_{\in \ker u} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y &= u(x'+x) = u(x') + u(x) \\ &= v(x) \end{aligned}$$

□

*Exemples* :

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soient $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires, 2 à 2 différents.

Posons

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto \Big(P(a_0), \dots, P(a_n)\Big) \end{aligned}$$

Cherchons $\ker \Psi$ :

$$\begin{aligned} &P \in \ker \Psi \\ &\iff \begin{cases} P \in \mathbb{K}[X] \\ P(a_0) = \cdots = P(a_n) = 0 \end{cases} \\ &\iff P \in \mathbb{K}[X], (X - a_0)\cdots(X - a_n)/P \end{aligned}$$

Ainsi $\ker \Psi =$ multiples de $(X - a_0)\cdots(X - a_n)$

Recherche d'un supplémentaire de $\ker \Psi$.

En effet : $\mathbb{K}[X] \stackrel{?}{=} \ker \Psi \oplus \mathbb{K}_n[X]$

$$P = \underbrace{(X - a_0)\cdots(X - a_n)}_{\in \ker \Psi} Q + R \qquad \deg R \leq n$$

$\Psi$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\operatorname{Im}\Psi \subset \mathbb{K}^{n+1}$

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{K}^{n+1}$$

donc $\operatorname{Im}\Psi = \mathbb{K}^{n+1}$

Traduction pratique : $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$\exists! P \in \mathbb{K}_n[X] \;/\; \forall i \in [\![1,n]\!] \quad P(a_i) = \lambda_i$$

$$\Psi^{-1} = (1,0,\dots,0) = \frac{(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{(a_0-a_1)\cdots(a_0-a_n)} = L_0$$

$$\Psi^{-1} = \frac{(X-a_0)(X-a_2)\cdots(X-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\cdots(a_0-a_n)} = L_1$$

$$P = \Psi^{-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P^{-1}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$$

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i \in \mathbb{K}_n[X]$$

On a donc

$$1 = \sum_{i=0}^{n} L_i \qquad X = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i \qquad X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i^n L_i$$

### Applications linéaires et familles

**Proposition**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{F} = (e_i)_{i\in I}$

– si $\mathcal{F}$ famille génératrice de $E$ alors $(u(\mathcal{F})$ famille génératrice de $\operatorname{Im} u$ ;

– si $\mathcal{F}$ famille liée de $E$ alors $(u(\mathcal{F})$ famille liée de $\operatorname{Im} u$ ;

– si $\mathcal{F}$ famille libre de $E$ alors $(u(\mathcal{F})$ famille libre de $\operatorname{Im} u$ si et seulement si

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) \cap \ker u = \{0\}$$

---

### Exemple d'application linéaire : forme linéaire

**Définition**

**Forme linéaire**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev, on appelle forme linéaire sur $E$ toute application linéaire de $E$ vers $\mathbb{K}$.

Notation : $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. C'est un espace vectoriel appelé espace dual de $E$.

---

*Exemples* :

- $E = \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \delta_a : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ P &\longmapsto \delta_a(P) = P(a) \end{aligned}$$

alors $\delta_a \in \mathbb{K}[X]^*$

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ P &\longmapsto \delta(P) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ M = (m_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]} &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \end{aligned}$$

**Définition**

**Hyperplan**

On appelle hyperpan de $E$ $\mathbb{K}$-ev tout sous-espace vectoriel de $E$ admettant un supplémentaire de dimension 1.

---

On va voir s'il y a identité entre hyperplans de $E$ et formes linéaires non nulles de $E$.

**Proposition**

Soit $H$ un hyperplan de $E$, alors

$$\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\} \;/\; H = \ker \varphi$$

---

*Preuve* :

$$\exists x_0 \notin H \;/\; E = H \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$$
$$\forall x \in E, \exists! y_x \in \mathbb{K} \;/\; x = y_x + \lambda_x x_0$$

Posons

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x = y_x + \lambda_x x_0 &\longmapsto \lambda_x \end{aligned}$$

On a $\varphi(x_0) = 1$, de plus, $\varphi \in E^*$. En effet :

$$x = y_x + \lambda_x x_0 x' \qquad = y_{x'} + \lambda_{x'} x_0$$
$$\alpha x + x' = \alpha x + x' + (\alpha\lambda_x + \lambda_{x'})x_0$$

L'unicité de la décomposition permet de dire $\alpha\lambda_x + \lambda_{x'} = \lambda_{\alpha x + x'}$, c'est à dire $\alpha\varphi(x) + \varphi(x') = \varphi(\alpha x + x')$

$$\ker\varphi = \{x = y_x + \lambda_x x_0 \ / \ \lambda_x = 0\}$$

$\square$

**Proposition**

Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ alors $\ker\varphi$ est un hyperplan de $E$.

---

*Preuve* :

Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire. Tout supplémentaire de $\ker\varphi$ est isomorphe (via $\varphi$) à $\operatorname{Im}\varphi$.

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}(\varphi \neq 0) \qquad \dim\mathbb{K} = 1$$

Tout supplémentaire de $\ker\varphi$ est de dimension 1, donc $\ker\varphi$ est un hyperplan de $E$.

$\square$

**Proposition**

Soit $H$ un hyperplan de $E$ défini par $H = \ker\varphi$ avec
$\varphi \in E^* \setminus \{0\}$.

Soit $\Psi \in E^* \ / \ \Psi_{|H} = 0$, alors $\Psi$ est proportionnelle à $\varphi$.

---

*Preuve* :

Soient $E = H \oplus \operatorname{Vect}(x_0)$, avec $x_0 \notin H$ et

$$\Psi = \frac{\Psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi$$

En effet

$$\forall x \in H \quad \Psi(x) = 0$$

et

$$\frac{\Psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x) = 0 \qquad \frac{\Psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x_0) = \Psi(x_0)$$

$\square$

*Exemples* :

– $\operatorname{tr} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \setminus \{0\}$. En effet : $\operatorname{tr} I = n \neq 0$.
  $\ker \operatorname{tr} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \operatorname{tr} M = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc $\dim(\ker \operatorname{tr}) = n^2 - 1$.
– Recherche des hyperplans stables par un endomorphisme $u$.
  Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et on cherche $H$ hyperplan de $E$ tel que $u(H) \subset H$. Soit

$$\varphi \in E^* \setminus \{0\} \ / \ H = ker\varphi$$

  Posons $\Psi = \varphi \circ u$ donc $\Psi \in E^*$

$$u(H) \subset H \Rightarrow \forall x \in H$$
$$\Psi(x) = \varphi \circ u(x) = \varphi\Big(u(x)\Big) = 0$$

## 1.2 Étude des endomorphismes

**Définition**

**Endomorphisme**

On appelle endomorphisme de $E$ toute application de $E$ vers $E$.

Notation : $\mathcal{L}(E)$, ensemble des endomorphismes de $E$.

---

*Remarques* :
– $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ algèbre non commutative (en général).
– $u, v \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ v = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} v \subset \ker u$

$$\left.\begin{array}{l} u \circ v = 0 \\ v \text{ surjectif} \end{array}\right\} \Rightarrow u = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} u \circ v = 0 \\ v \text{ injectif} \end{array}\right\} \Rightarrow v = 0$$

– $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n$ est défini par récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} u^0 = id \\ u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n \end{array}\right.$$

**Définition**

**Automorphisme**

On appelle automorphisme de $E$ tout endomorphisme bijectif.

Notation : $GL(E)$, ensemble des automorphismes de $E$.

---

*Remarques* :
– $(GL(E), \circ)$ est un sous groupe du groupe $(\sigma(E), \circ)$, appelé groupe linéaire de $E$ ($\sigma(E)$ : ensemble des applications linéaires).

### 1.2.1 Exemple : projection d'un espace vectoriel

**Définition**

**Projection**

Soit $E = F \oplus G$. Posons

$$p : E \longrightarrow E, x = y + z \longrightarrow y$$
$$q : E \longrightarrow E, x = y + z \longrightarrow z$$

avec $x \in E, y \in F, z \in G$.

Alors $p$ s'appelle le projecteur sur $F$, parallèlement à $G$, et $q$ le projecteur sur $G$, parallèlement à $F$.

---

**Proposition**

On a les relations et propriétés suivantes

$$p, q \in \mathcal{L}(E) \qquad p + q = \mathrm{id}$$
$$\ker p = \ker(q - \mathrm{id}) = \{x \in E \;/\; p(x) = 0\} = G$$
$$\ker q = F$$
$$p^2 = p \qquad q^2 = q$$
$$p \circ (\mathrm{id} - p) = p \circ q = 0$$

---

**Proposition**

Caractérisation fonctionnelle d'un projecteur.

Soit $u \in \mathcal{L}(E) \;/\; u^2 = u$, alors $u$ est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\, u$, parallèlement à $\ker u$.

$$u^2 = u \Leftrightarrow u \circ (u - \mathrm{id}) = 0$$

---

- Si $u = 0$, alors $u$ est le projecteur sur $\{0\}$, parallèle à $E$.
- Si $u = \mathrm{id}$, alors $u$ est le projecteur sur $E$, parallèle à $\{0\}$.
- Ces deux projecteurs sont appelés projecteurs triviaux.

*Preuve* :

En dimension finie, on a $E = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker u$.

- Analyse : si c'est vrai, pour $x \in E$

$$\begin{cases} x = y + z \\ u(x) = y + 0 \end{cases}$$

  avec $y \in \ker(u - \mathrm{id})$ et $z \in \ker u$.
  On a $y = u(x)$ et $z = x - u(x)$. Il y a bien unicité.

– Synthèse : soit $x \in E$, $x = u(x) + x - u(x)$
$u(x) \in \ker(u - \mathrm{id})$, car $u(u(x)) = u^2(x) = u(x)$, et $x - u(x) \in \ker u$, car $u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = u(x) - u(x) = 0$.

□

*Exemples* :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ / $u^2 - 7u + 6\,\mathrm{id} = (u - \mathrm{id}) \circ (u - 6\,\mathrm{id}) = 0$. Montrer que $E = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 6\,\mathrm{id})$.

– Analyse : on suppose le problème résolu.
On a $x = y + z$ avec $y \in \ker(u - \mathrm{id})$ et $z \in \ker(u - 6\,\mathrm{id})$.

$$y \in \ker(u - \mathrm{id}) \iff u(y) = y$$
$$z \in \ker(u - 6\,\mathrm{id}) \iff u(z) = 6z$$
$$\left\{\begin{array}{l} x = y + z \\ u(x) = y + 6z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z = (u(x) - x)/5 \\ y = -(-6x + u(x))/5 \end{array}\right.$$

– Synthèse : $x = (6x - u(x))/5 + (u(x) - x)/5$

$$\begin{aligned}
(u - 6\,\mathrm{id})\Big((u(x) - x)/5\Big) &= 1/5\ (u - 6\,\mathrm{id})\Big(u \circ \mathrm{id})(x)\Big) \\
&= 1/5\ \Big((u - 6\,\mathrm{id}) \circ (u - \mathrm{id})\Big)(x) = 0 \\
(u - \mathrm{id})\Big(1/5\ (6x - u(x))\Big) &= 1/5\ \Big((u - \mathrm{id}) \circ (6\,\mathrm{id} - u)\Big)(x) = 0 \\
(u - \mathrm{id}) \circ (u - 6\,\mathrm{id}) = 0 & \\
u &= p + 6q
\end{aligned}$$

Généralisation : projecteurs associés à une décomposition directe.

**Proposition**

Soit $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i, \forall i \in [\![1, n]\!]$, posons :

$$p_i : E \longrightarrow E$$
$$p_i = \left\{\begin{array}{ll} x & x \in E_i \\ 0 & x \in E_j, j \neq i \end{array}\right.$$

$p_i$ est linéaire, et c'est un projecteur de $E$ et c'est le projecteur sur $E_i$, parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E_j$.

### 1.2.2 Vocabulaire

#### Sous-espaces stables d'un endomorphisme

**Définition**

**Sous-espace stable d'un endomorphisme**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle sous-espace stable par ûu tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ tel que $u(F) \subset F$.

*Exemples* :

1. $u \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par $u$.
2. $u, v \in \mathcal{L}(E)$, tel que $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Im} v$ et $\ker v$ stables par $u$ :
$$\forall y \in \operatorname{Im} v \Rightarrow \exists x \in E \;/\; y = v(x)$$
$$u(y) = u(v(x)) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$$
D'où $u(y) \in \operatorname{Im} v$.
$$\forall x \in \ker v, v(x) = 0$$
$$v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) = u(0) = 0$$
3. Droites stables d'un endormorphisme : soit $F$ unedroite vectorielle de vecteur directeur $x_0$ (c'est à dire $F = \operatorname{Vect}(x_0)$).
$$\begin{aligned} u\Big(\operatorname{Vect}(x_0)\Big) \subset Vect(u(x_0)) &\Leftrightarrow u(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \;/\; u(x_0) = \lambda x_0 \end{aligned}$$
Donc si $\operatorname{Vect}(x_0)$ est stable par $u$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K} \;/\; u(x_0) = \lambda x_0$.
4. Hyperplans stables paar un endormorphisme.
Rappel : $H = \ker \varphi$, avec $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, alors
$$H \quad \text{stable par} \quad u \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \;/\; \varphi \circ u = \lambda \varphi$$

#### Éléments propres d'un endomorphisme

On considère $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

**Définition**

**Valeur propre d'un endomorphisme**

$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $u$ si $u - \lambda \operatorname{id}$ n'est pas injective.

Autres formulations :

– $\ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}$
– $\exists x \neq 0 \;/\; u(x) = \lambda x$

---

*Remarques* :
– Si 0 est une valeur propre de $u$ alors $u$ n'est pas injective. Au contraire, si 0 n'est pas valeur propre de $u$, alors $u$ est injective.

**Définition**

**Sous-espace propre de $u$ associée à une valeur propre**

Soit $\lambda$ valeur propre de $u$, on appelle sous-espace propre de $u$ associé à $\lambda$ le sous-espace vectoriel noté $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$ = ensemble des vecteurs propres associés à $\lambda$.

---

*Remarques* :
– On sait que $E_\lambda(u) \neq \{0\}$.
– Soient $v = u - \lambda\,\mathrm{id}$, $u \circ v = v \circ u$, donc $E_\lambda(u)$ stable par l'endomorphisme $u$ et de plus l'endormorphisme induit par $u$ sur $E_\lambda(u)$ est une homothétie vectorielle de rapport $\lambda$. Posons

$$\begin{aligned}\tilde{u} : E_\lambda(u) &\longrightarrow E_\lambda(u)\\ x &\longmapsto \tilde{u}(x) = u(x) = \lambda x\end{aligned}$$

**Définition**

**Vecteur propre associé à une valeur propre**

Soit $\lambda$ valeur propre de $u$, on appelle vecteur propre de $u$ associé à $\lambda$ tout vecteur de $E_\lambda(u) \setminus \{0\}$.

---

*Exemples* :

1. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ base de $E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_b\, u = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Soit $xe_1 + ye_2 + ze_3$, alors

$$u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = \lambda(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 8x - y - 5z & = & \lambda x \\ -2x + 3y + z & = & \lambda y \\ 4x - y - z & = & \lambda z \end{array}\right.$$

$\lambda$ valeur propre de $u \Leftrightarrow (A - \lambda I) \in GL_3(\mathbb{R})$ :

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -1 & -5 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Longrightarrow -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32 = 0$$
$$(\lambda-2)(\lambda-4)^2 = 0$$

L'ensemble des valeurs propres de $u$ est donc $\{2, 4\}$ et

$$E_2(u) = \left\{ xe_1 + ye_2 + ze_3 \diagup \left\{ \begin{array}{rcl} 6x - y - 5z & = & 0 \\ -2x + y + z & = & 0 \\ 4x - y - 3z & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

De même pour $E_4(u)$. Finalement on trouve

$$E_2(u) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$$
$$E_4(u) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$$

2. $E = C^\infty([0,1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto u(f) = g \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \int_0^1 \max(x,t) f(t) \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x x f(t) \,\mathrm{d}t + \int_x^1 t f(t) \,\mathrm{d}t \\ g'(x) &= \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t \\ g''(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Si $\lambda$ est valeur propre de $u$, alors $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \diagup f(x) = \lambda f''(x)$. On a nécessairement $\lambda \neq 0$ (sinon $f = 0$). Supposons donc $\lambda \neq 0$, et posons $a = 1/2$. On a alors

$$f'' = af$$
$$r^2 - a = 0$$

– si $a > 0, r = \pm\sqrt{a}$, et $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \diagup \forall x \in [0,1]$, on a

$$f(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{\sqrt{a}x} + \beta\, \mathrm{e}^{-\sqrt{a}x}$$

Il reste à vérifier $u(f) = f/a$

– si $a < 0, r = \pm i\sqrt{a}$, et $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \diagup \forall x \in [0,1]$, on a

$$f(x) = \alpha \cos(\sqrt{-a}x) + \beta \sin(\sqrt{-a}x)$$

**Définition**

**Spectre**

Le spectre de $u$ est l'ensemble des valeurs propres de $u$. On le note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.

**Proposition**

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.

*Preuve* :

Soit $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$, avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u) \setminus \{0\}$. A-t-on $(x_1, \ldots, x_p)$ libre ?

Récurrence sur $p$ :
– si $p = 1$, $x_1 \neq 0$, $(x_1)$ libre.
– si $p = 2$, $u(x_1) = \lambda x_1$ et $u(x_2) = \lambda x_2$, alors $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

$$\begin{gathered} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0 \\ u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0 \end{gathered}$$

Ce qui nous donne $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = 0$ en multipliant la première ligne par $-\lambda_2$.
– si vrai à l'indice $p$, alors à l'indice $p+1$ on a :

$$\begin{gathered} \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{p+1} x_{p+1} = 0 \\ u(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{p+1} x_{p+1}) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{p+1} \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0 \end{gathered}$$

Ce qui nous donne $\alpha_1(\lambda_{p+1} - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_p(\lambda_{p+1} - \lambda_p)x_p = 0$ en multipliant la première ligne par $-\lambda_{p+1}$.
A fortiori on a

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_1(\lambda_{p+1} - \lambda_1) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \alpha_p(\lambda_{p+1} - \lambda_p) & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_1 & = & 0 \\ \vdots & & \\ \alpha_p & = & 0 \end{array} \right.$$

Et donc $\alpha_{p+1} = 0$.

$\square$

**Proposition**

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux différentes sont en somme directe.

On notera :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$$

---

*Preuve* :

On fait une récurrence sur $p$. A l'indice $p+1$, on a

$$\forall x_1, \dots, x_{p+1}, \forall i \in [\![1, p+1]\!] \qquad x_i \in E_{\lambda_i}(u)$$

et tel que

$$x_1 + \cdots + x_{p+1} = 0$$
$$u(x_1 + \cdots + x_{p+1}) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0$$
$$(\lambda_{p+1} - \lambda_1)x_1 + \cdots + (\lambda_{p+1} - \lambda_{p+1})x_{p+1} = 0$$

On sait que $E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe, d'où $(\lambda_{p+1} - \lambda_i)x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0$, et donc $x_{p+1} = 0$

□

### 1.2.3 Polynômes d'un endomorphisme

**Algèbre des polynômes d'un endomorphisme**

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, et posons

$$\Psi : \mathbb{K}_p[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \longmapsto \Psi(P) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k$$

*Exemples* :

Soit $P = X^2 + 1$, alors $P(u) = u^2 + \mathrm{id}$.

**Proposition**

$\Psi$ vérifie les propriétés suivantes, $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha \in \mathbb{K}$ :

- $\Psi(P + Q) = \Psi(P) + \Psi(Q)$
- $\Psi(\alpha P) = \alpha \Psi(P)$
- $\Psi(P \times Q) = \Psi(P) \circ \Psi(Q)$

Donc $\Psi$ est un morphisme de l'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ sur l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$.

Posons $\mathbb{K}[u] = \Psi(\mathbb{K}[X])$, alors $(\mathbb{K}[u], +, \cdot, \circ)$ est une algèbre commutative appelée algèbre des polynômes de l'endomorphisme $u$.

Notation : $\Psi(P) = P(u) \in \mathbb{K}[u] \subset \mathcal{L}(E)$.

---

**Lien entre les valeurs propres de l'endomorphisme $u$ et les valeurs propres de $P(u)$**

**Théorème**

- si $\lambda$ est valeur propre de $u$, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$
- si de plus $P$ est annulateur de $u$ ($P(u) = 0$), alors les valeurs propres de $u$ sont inclues dans l'ensemble des racines de $P$.

---

*Exemples* :

Endormorphisme n'admettant pas de valeur propre : soient $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ et $B$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$A = \operatorname{Mat}_B u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

On a donc $u^2 = -\operatorname{id}$, et $P = X^2 + 1$ est annulateur pour $u$. Donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} u = \emptyset$

**Complément sur les polynômes annulateurs**

*Exemples* :

Soit $u \in \mathcal{L}(E) \ / \ (u - \operatorname{id}) \circ (u + 2\operatorname{id}) = 0$. Le polynôme $P = (X-1)(X+2)$ est annulateur pour $u$, donc $\operatorname{Sp} u \subset \{1, -2\} \Rightarrow 0 \notin \operatorname{Sp} u$, donc $u$ est injective.

**Théorème**

$P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - a_k)$ est annulateur pour $u$ si $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux différents, et alors

$$E = \bigoplus_{k=0}^{n} \ker(u - a_k \operatorname{id})$$

---

## 1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

### 1.3.1 Dimension d'un espace vectoriel possédant une famille génératrice finie

**Théorème**

Soit $E$ un espace vectoriel possédant une famille génératrice finie $(e_i)_{i \in I}$ (de cardinal finie) te tel que $(e_i)_{i \in J}$ ($J \subset I$) soit libre, alors $\exists H$ vérifiant $J \subset H \subset I$ tel que $(e_k)_{k \in H}$ soit une base de E.

---

**Existence d'une base dans un espace vectoriel de dimension finie**

**Corollaire**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, alors :
- on peut extraire de toute famille génératrice de $E$ une base de $E$
- on peut complémenter toute famille libre $(f_j)_{j\in J}$ de $E$ par des vecteurs d'une famille génératrice $(e_i)_{i\in J}$ pour obtenir une base de $E$.

**Unicité du cardinal des bases**

**Théorème**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul possédant une famille génératrice finie, alors $E$ possède une base de cardinal fini, et toute les bases ont le même cardinal, appelé dimension de $E$.

Par convention, on a $\dim\{0\} = 0$.

**Cas où l'on connait la dimension**

**Théorème**

Soit $\dim E = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a l'équivalence entre :

1. $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de $E$
2. $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de $E$
3. $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $E$

### 1.3.2 Sous-espace vectoriel de dimension finie

**Proposition**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soit $F$ un sev de $E$, alors $F$ est de dimension finie et

$$F = E \iff \dim E = \dim F$$

**Proposition**

Un peu de vocabulaire :

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$, une famille de vecteurs d'un ev $E$.

$\mathcal{F}$ est de rang fini si $\operatorname{Vect}\mathcal{F}$ est un sev de dimension finie de $E$. On note

$$\operatorname{rg}\mathcal{F} = \dim \overrightarrow{E}$$

Si de plus $E$ est lui-même de dimension finie, soit $B_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ famille de $p$ vecteurs de $E$, alors $\operatorname{rg}\mathcal{F} \leq p$.

Posons $\forall j \in [\![1, p]\!] \quad x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. On appelle matrice de la famille $(x_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$ relativement à la base $B_E$ la matrice

$$A = (a_{ij})_{i,j} \qquad A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et on appelle rang de $A$ le rand de $(x_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$.

---

**Théorème**

**Formule de Grassmann**

Soient $F, G$ deux sev de dimension finie d'un ev $E$, alors $F + G$ est un sev de $E$ et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

---

**Proposition**

Soient $F, G$ deux sev de dimension finie d'un ev $E$, alors

$$F + G \text{ directe} \Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim F + \dim G$$

---

*Remarques* :

– base adaptée à la décomposition directe : soient $(f_1, \ldots, f_q)$ une base de $F$ et $(g_1, \ldots, g_r)$ une base de $G$, alors

$$F \cap G = \{0\} \Longrightarrow (f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_r) \text{ base de } F \oplus G$$

– Soit $E$ un ev de dimension $n$ et $F$ sev de $E$ de dimension $p$, alors

$$\exists G \text{ sev de } E \;/\; E = F \oplus G$$

(théorème de la base incomplète)

**Proposition**

Soient $E_1, \ldots, E_p$, $p$ sev de dimension finie d'un ev $E$, alors

$$\sum_{i=1}^{p} E_i \text{ somme directe} \Longleftrightarrow \dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} (\dim E_i)$$

---

### 1.3.3 Application linéaire et dimension finie

**Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base**

**Proposition**

Soient $E, F$ deux ev avec $E$ de dimension finie, $B_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$.

Étant donnée $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de $p$ vecteurs de $F$ alors il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad u(e_i) = f_i$$

---

**Proposition**

Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors

$$E \simeq F \iff \dim E = \dim F$$

---

*Remarques* :
- $\mathcal{L}(E, F) \simeq F^p$, $p = \dim E$.
  Si $F$ est de dimension finie $n$, alors $\dim \mathcal{L}(E, F) \simeq \dim F^p$, c'est à dire

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$$

- $p = \dim E$ et $F = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est appelé dual de $E$ et noté $E^*$. On a $\dim E = \dim E^*$

**Théorème du rang**

**Définition**

**Rang d'une application linéaire**

Soient $E, F$ deux ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que $u$ est de rang fini si $\operatorname{Im} u = u(E)$ est de dimension fini. En ce cas

$$\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u$$

---

*Remarques* :
- si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini, alors $\operatorname{rg} u$ est invariant par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

**Théorème**

**Théorème du rang**

Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $u$ est de rang fini et

$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u$$

---

**Proposition**

Caractérisation des isomorphismes

Soient $E, F$ deux ev de dimension finie et $\dim E = \dim F$, $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a l'équivalence entre :

1. $u$ injective
2. $u$ surjective
3. $u$ bijective
4. $\operatorname{rg} u = \dim F$
5. $u$ inversible à droite
6. $u$ inversible à gauche

---

**Compléments**

**Proposition**

Comportement par rapport à la somme

Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-ev et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, si $u, v$ sont de rang fini, alors

$$|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$$

---

**Proposition**

Comportement par rapport à la composition Soient $E, F, G$ trois $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $0 \leq \operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$ et $0 \leq \operatorname{rg} v \leq \min(\dim F, \dim G)$.

On introduit $\tilde{v} = v_{/\operatorname{Im} u}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \tilde{v} : \operatorname{Im} u &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto \tilde{v}(y) = v(y) \end{aligned}$$

Alors

$$\ker \tilde{v} = \{y \in \operatorname{Im} u \;/\; v(y) = 0\} = \operatorname{Im} u \cap \ker v$$
$$\operatorname{Im} \tilde{v} = \tilde{v}(\operatorname{Im} u) = v(\operatorname{Im} u) = v(u(E)) = \operatorname{Im}(v \circ u)$$

---

On obtient donc

$$\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \cap \ker v + \operatorname{rg}(v \circ u)$$

---

### 1.3.4 Matrices équivalentes, semblables

**Définition**

**Matrice de changement de base**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$, $B_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Soit $(e'_1, \dots, e'_p)$ une famille de $p$ vecteurs de $E$, $\forall j \in [\![1, n]\!] \quad e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]^2}$ la matrice de $(e'_1, \dots, e'_p)$ relaativement à $B_E$. Si de plus on suppose que $p = n$ et $(e'_1, \dots, e'_n) = B'_E$ base de $E$, $P = (p_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]^2}$, $\forall j \in [\![1, n]\!] \quad e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. On note aussi $P = \operatorname{Mat}_{B'_E, B_E}(\mathrm{id})$ et $P$ s'appelle la matrice de passage de $B_E$ à $B'_E$.

---

*Remarques* :
– $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \operatorname{Mat}_{B_E, B'_E}(\mathrm{id})$
– Effet sur les vecteurs : soit $x \in E$, $X = \operatorname{Mat}_{B_E}(x)$, $X' = \operatorname{Mat}_{B'_E}(x)$, alors

$$X = PX'$$

**Proposition**

Soient $B_E, B'_E$ deux bases de $E$, $P$ la matrice de passage de $B_E$ à $B'_E$. Soient $B_F, B'_F$ deux bases de $F$, $Q$ la matrice de passage de $B_F$ à $B'_F$. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \operatorname{Mat}_{B_E, B_F}(u)$, $A' = \operatorname{Mat}_{B'_E, B'_F}(u)$, alors on a

$$A' = Q^{-1} A P$$

---

**Matrices équivalentes**

**Définition**

**Matrice équivalente**

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on dit que $A$ et $A'$ sont équivalentes si

$$\exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_q(\mathbb{K}) \;/\; A' = Q^{-1} A P$$

---

**Proposition**

Si $A$ et $A'$ sont équivalentes, alors elles représentent la même application dans des bases différentes.

---

**Proposition**

Soient $B_E, B'_E$ deux bases de $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $P$ la matrice de passage de $B_E$ à $B'_E$, $A$ et $A'$ les matrices de $u$ dans $B_E$ et $B'_E$ alors

$$A' = P^{-1}AP$$

---

### Matrices semblables

**Définition**

**Matrice semblable**

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que $A$ et $A'$ sont semblables si

$$\exists inGL_n(\mathbb{K}) \;/\; A' = P^{-1}AP$$

---

**Proposition**

Si $A$ et $A'$ sont semblables, alors elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

---

*Remarques* :
- La similitude des matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet :
  - réflexivité : $A = I^{-1}AI$
  - symétrie : $\exists P, Q \;/\; B = Q^{-1}AP \Rightarrow A = QBP^{-1}$
  - transitivité : $B = Q^{-1}AP, C = T^{-1}AR \Rightarrow C = (TQ)^{-1}A(PT)$

### Rang d'une matrice

**Définition**

**Rang d'une matrice**

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B_p$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $B_p =$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \;/\; \mathrm{Mat}_{B_p,B_n}(v) = A$, alors on a

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} v$$

---

**Théorème**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $B_E, B_F$ les bases respectives de $E$ et $F$, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A$ avec $A = \operatorname{Mat}_{B_F, B_E}(u)$.

**Théorème**

Représentation d'une matrice de rang $r$ :

Une matrice est de rang $r$ si et seulement si elle est équivalente à

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\Bigg| n$$

*Remarques* :
– Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B \Rightarrow A, B$ sont équivalentes.
– Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^t$.

## 1.4 Déterminants

### 1.4.1 Formes n-linéaires alternées

Sauf indication contraire, dans toute cette partie, on considère $E$ un ev de dimension $n$.

#### Vocabulaire

**Définition**

**Forme linéaire**

On appelle forme linéaire sur $E$ toute application notée

$$\begin{aligned} \ell : E^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \ell(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

telle que $\ell$ soit linéaire par rapport à chacune des variables, c'est à dire $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \forall \alpha_i \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} &\ell(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_i x_i + x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ &\qquad\qquad \alpha_i \ell(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \ell(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n) \end{aligned}$$

**Définition**

**Forme linéaire alternée**

On dit qu'une forme linéaire $\ell$ est alternée (antisymétrique) si de plus elle vérifie $\forall i \neq j \in [\![1, n]\!], \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$

–

$$x_i = x_j \Longrightarrow \ell(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$$

– ou bien encore

$$\ell(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\ell(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

---

**Définition du déterminant**

**Théorème**

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur $E$, ev de dimension $n$, est un espace de dimension 1. En particulier, si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, alors il existe une unique forme n-linéaire alternée sur $E$ notée $\det_B$ telle que

$$\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$$

En outre l'expression analytique de $\det_B$ est

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \qquad x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

---

**Effet d'un changement de base**

**Proposition**

Soient $B, B'$ deux bases de $E$, alors $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$\det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B'}(e_1, \dots, e_n) \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

---

### 1.4.2 Propriétés du déterminant

**Proposition**

1. $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ dépend linéairement de chaque vecteur
2. $\forall i + j, x_i = x_j \Rightarrow \det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$

3. $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ reste inchangé lorsque l'on remplace un vecteur auquel on ajoute une combinaison linéaire des autres.

---

**Théorème**

Soient $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$, et $B$ une base de $E$, alors

$$(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \text{ base de } E \Longleftrightarrow \det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

---

### 1.4.3 Déterminant d'un endomorphisme

**Définition**

**Déterminant d'un endomorphisme**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$, $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Pour toute forme linéaire alternée non nulle, on introduit la forme notée

$$\begin{aligned} \ell_u : E^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \ell_u(x_1, \dots, x_n) = \ell(u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{aligned}$$

alors $\ell_u$ est une forme n-linéaire alternée et $\exists k \in \mathbb{K} \;/\; \ell_u = k\ell$. De plus, $k$ ne dépend pas de $\ell$ et il s'appelle le déterminant de $u$.

---

**Proposition**

Propriétés ($\forall \lambda \in \mathbb{K}, u, v \in Ł(E)$) :
– $\det(\mathrm{id}) = 1$ et $\det(\lambda\,\mathrm{id}) = \lambda^n$
– $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
– $\det(v \circ u) = \det u \det v = \det(u \circ v)$
– si de plus $u \in GL_n(E)$, alors $\det u \neq 0$ et

$$\det u^{-1} = \frac{1}{\det u}$$

---

**Définition**

Orientation d'un ev réel de dimension finie :

Soient $B, B'$ deux bases de $E$, et soit $u$ l'unique automorphisme de $E$ vérifiant $u(B) = B'$, alors on dit que $B$ et $B'$ ont la même orientation si $\det u > 0$.

---

### 1.4.4 Déterminant d'une matrice

**Définition**

**Déterminant d'une matrice**

Soit $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. Alors on appelle déterminant de $A$ le déterminant de $u$.

*Remarques* :
– det est une fonction polynomiale.

**Proposition**

Propriétés ($\forall \lambda \in \mathbb{K}, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) :
– $\det(I) = 1$ et $\det(\lambda I) = \lambda^n$
– $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
– $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$
– si de plus $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det A \neq 0$ et

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

– si $A$ et $B$ sont semblables, alors $\det A = \det B$
– $\det A = \det A^t$

### 1.4.5 Développement d'un déterminant

**Cas d'une matrice trigonale supérieure par blocs**

**Théorème**

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), 0 \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, avec

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

alors on a

$$\det M = \det A \det B$$

Plus généralement, si

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_n \end{array}\right)$$

alors on a

$$\det M = \prod_{i=1}^{n} \det A_i$$

---

**Développement selon une ligne ou une colonne**

**Théorème**

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. Notons $\mathrm{Com}(A) = (A_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$, définie par $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ avec $\Delta_{ij}$ le déterminant de $A$ après avoir supprimé la i$^{\text{e}}$ ligne et la j$^{\text{e}}$ colonne.

On a alors

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!] \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \forall j \in [\![1,n]\!]\end{aligned}$$

On appelle $\mathrm{Com}\, A$ la comatrice de $A$ et $A_{ij}$ s'appelle le cofacteur de $A$.

---

*Remarques* :

–
$$A(\mathrm{Com}\, A)^t = (\mathrm{Com}\, A)^t A = (\det A) I$$

– si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors
$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{Com}\, A)^t}{\det A}$$

# 1.5 Réduction des endomorphismes en dimension finie

## 1.5.1 Polynôme caractéristique

**Définition**

**Polynôme caractéristique**

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on appelle polynôme caractéristique de $u$ le polynôme noté

$$\chi_u = \det(u - X\,\mathrm{id})$$

En outre, on a les propriétés suivantes :

– $\deg \chi_u = n$

---

–
$$\chi_u = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(u) X^{n-1} + \cdots + \det u$$

---

*Remarques* :
– $\chi_A = \chi_{A^t}$

**Définition**

**Valeur propre**

On dit que $\lambda$ est une valeur propre de $u$ si
$$u(x) = \lambda c$$
avec $x \in E$.

On appelle spectre de $u$, noté $\operatorname{Sp} u$, l'ensemble des valeurs propres de $u$.

---

**Théorème**

Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\text{racines dans } \mathbb{K} \text{ de } \chi_u\}$.

---

**Définition**

**Ordre de multiplicité**

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $\lambda$ valeur propre de $u$, alors l'ordre de miltiplicité de $\lambda$ est égal à l'ordre de multiplicité de $\lambda$ en tant que racine de $\chi_u$.

---

**Proposition**

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), \lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}} u$, alors
$$1 \leq \dim E_\lambda(u) = \dim \ker(u - \lambda \operatorname{id}) \leq \text{ordre de multiplicité}$$

---

### 1.5.2 Endomorphisme trigonalisable

**Définition**

**Endomorphisme trigonalisable**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $u$ est trigonalisable s'il existe une base $B$ de $E$ telle que $\operatorname{Mat}_B u \in T_n^+(\mathbb{K})$.

---

**Théorème**

$u$ est trigonalisable si et seulement si $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

### 1.5.3 Endomorphisme dianalisable

**Définition**

**Endomorphisme diagonalisable**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $u$ est diagonalisable s'il existe une base $B$ de $E$ telle que $\operatorname{Mat}_B u \in D_n(\mathbb{K})$.

**Proposition**

$u$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base formée des vecteurs propres de $u$.

**Proposition**

$u$ est diagonalisable

$$\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \;/\; E = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(y\lambda_i \operatorname{id})$$

**Proposition**

$u$ est diagonalisable

$$\Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \;/\; \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim \ker(y\lambda_i \operatorname{id})$$

**Proposition**

$u$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ sous la forme $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{n_i}$ et de plus $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \dim E_{\lambda_i}(u) = n_i$.

**Proposition**

$u$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$. On dit alors que $P$ est un polynôme annulateur de $u$.

---

**Proposition**

Condition suffisante de diagonalisation :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E = n$, alors si $u$ admet $n$ valeurs propres distinctes, $u$ est diagonalisable.

---

**Définition**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A$ est diagonalisable si et seulement si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \in D_n(\mathbb{K}) \ / \ A = PDP^{-1}$$

où $P$ est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

---

*Remarques* :
– Les autres propriétés sont strictement les mêmes que celles concernant les endomorphismes adaptées aux matrices.

### 1.5.4 Applications

**Calcul d'une matrice nième**

**Proposition**

Si $A = PTP^{-1}$, alors

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

---

**Application aux systèmes différentiels à coefficients constants**

**Définition**

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \in I, B(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $B : t \mapsto B(t)$ continue sur $I$, on appelle alors système différentiel d'ordre 1 l'écriture

$$X' = AX + B(t)$$

---

**Proposition**

Soit l'équation $X' = AX$ avec $A$ diagonalisable, tel que $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda_i$. Alors l'ensemble des solutions est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ dont une base est définie par les $n$ applications $t \mapsto \exp(\lambda_i t) X_i$.

---

### Sous-espaces stables

**Théorème**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $u$ diagonalisable et $F$ un sev stable par $u$, alors l'endomorphisme induit par $u$ sur $F$ est aussi diagonalisable.

---

**Proposition**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F$ tels que $u(F) \subset F$, avec $u$ diagonalisable. Si $\operatorname{Sp} u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, alors

$$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap \ker(u - \lambda_i \operatorname{id})$$

---

# Chapitre 2

# Séries à termes réels ou complexes

## 2.1 Généralités

### 2.1.1 Définition

**Définition**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ associée à la suite $(u_n)$ ou série de terme général $u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

---

**Définition**

Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on dira que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente. On notera : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

$S_n$ s'appelle la somme partielle d'indice $n$ de la série de terme général $u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Dans tous les autres cas, on parle de suite divergente.

---

**Proposition**

Formule ($u_0 = S_0$) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = S_n - S_{n-1}$$

---

*Remarques* :

– $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Re(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Im(u_n)$ convergentes. En outre, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n)$

– l'ensemble des séries convergentes a une structure d'espace vectoriel $E$ et l'application $\varphi : E \to \mathbb{K}$, $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire.

– changement d'un nombre fini de termes : soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ telles que $u_n$ et $v_n$ ne diffèrent que pour un nombre fini de termes, c'est à dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \diagup \forall n \geq n_0,\ u_n = v_n$$

alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature :

Soient $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, on a

$$\forall n \geq n_0,\ S_n - S'_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k - v_k) = \sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - v_k)$$
$$S_n - S'_n = S_{n_0-1} - S'_{n_0-1} = cste$$

donc $S_n$ et $S'_n$ convergent simultanément.

**Définition**

Suite reste d'une série convergente

On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente

On appelle suite reste de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$R_n = S - S_n$$

Avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n + R_n = S$$

$$R_n = S - S_n = \lim_{p\to+\infty}(S_{n+p}) - S_n = \lim_{p\to+\infty}(S_{n+p} - S_n)$$
$$= \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{p+n} u_k\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

---

**Proposition**

Lien entre suite et série (notion de téléscopage)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1},\ u_0 = S_0,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Etudier la série de terme général $u_n$ revient à étudier la série de terme général $S_n - S_{n-1}$.

Soit $v_n = S_n - S_{n-1} \quad n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1}) = S_n - S_0$$

---

### 2.1.2 Exemples usuels

**Série géométrique**

Soit $q \in \mathbb{C}$, on s'intéresse à $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q^n$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\
&= \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n+1 \quad \text{si} \quad q = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ et $R_n = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$

**Série exponentielle**

$$
\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}
$$

*Preuve* :

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange. Soit $f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$
f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\ f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t
$$

Soit $a = 0,\ b = x,\ f(t) = \mathrm{e}^t$, alors

$$
\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t
$$

Avec $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ la somme partielle de la série de terme général $\dfrac{x^k}{k!}$

$$
\left| \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \right|
$$

– si $x \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \leq\ \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t \\
= \mathrm{e}^x \left[ \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = \frac{\mathrm{e}^x x^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

– si $x < 0$

$$\left|\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$$

$$= \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \cdots \leq \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$ car $|x|^n = 0$ et $R_n = \cdots$

□

**Série de Riemann**

Soit $\alpha$ un réel, on se propose d'étudier la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

*Preuve* :

– si $\alpha = 1$, série harmonique. On a l'inégalité suivante (inégalité de la moyenne) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n}$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$\ln(n+1) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est la somme partielle d'indice $n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} = +\infty$

– si $\alpha < 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\cdots$$

– $\alpha > 1$

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

Soit $k = 2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^\alpha} &\leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\
S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{n}{n^{\alpha-1}}\right) \\
&\leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} \qquad \alpha - 1 > 0
\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n$ est majorée et croissante : elle converge.

□

**Série harmonique alternée**

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente.

On recherche une expression intégrale de la somme partielle [1] :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0} (-1)^k \int_0^1 t^k \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \Big((-1)^k t^k\Big) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1-(-t)} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t+1} \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 t^{n+1} \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

Et de plus

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \dots \leq \frac{1}{n+1}$$

1. Rappel : on a $\displaystyle\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \mathrm{d}t$

**Série de Stirling**

Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n(n+1)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1\qquad R_n=\frac{1}{n+1}$$

Plus généralement, soit $p\in\mathbb{N}^*$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$

Alors

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\ \frac{k+p-k}{k(k+1)\cdots(k+p)}\\&=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}\right)\\&=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}\right)\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}=\frac{1}{p\cdot p!}\qquad R_n=\frac{1}{p!}\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)}$$

### 2.1.3 Condition nécessaire de convergence

**Proposition**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ convergente $\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n\neq 0$, on dit que la série diverge grossièrement.

### 2.1.4 Un premier théorème de convergence

**Théorème**

**Théorème des séries alternées**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Alors la série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ est une série convergente et, de plus, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ a même signe que $u_{n+1}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |R_n| \leq |u_{n+1}| = a_{n+1}$$

---

*Preuve* :

On applique le théorème des suites adjacentes aux suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \leq 0$$

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} = S$ De plus

$$S_{2n} + R_{2n} = S \Rightarrow R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0 \qquad \text{même signe que } u_{2n+1}$$

$$S_{2n+1} + R_{2n+1} = S \Rightarrow R_{2n+1} \leq 0 \qquad \text{même signe que } u_{2n+2}$$

Et enfin

$$|R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}| = a_{2n+1}$$

$$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = -u_{2n+2} = |u_{2n+2}| = a_{2n+2}$$

□

*Exemples* :

– Série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

  On travaille avec la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$

  On a $1/n$ décroissante et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \qquad R_n = \frac{1}{n+1}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \ln 2 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

– soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ avec $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

$$\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n = \pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{2n}$$

$$\pi\sqrt{n^2+1} = \pi n + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Rappel : $\sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin x$

$$u_n = \sin\left[\pi n + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = (-1)^n \sin\left[\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$u_n \sim_{+\infty} (-1)^n \frac{\pi}{2n}$$

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n + \pi n\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right)$$

$$0 \le a_n = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Et donc $a_n$ est décroissante.

## 2.2 Séries à termes réels positifs

**Définition**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série à termes positifs si à partir d'un certain rang $u_n \ge 0$.

**Théorème**

Fondement de l'étude des séries à termes positifs

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente $\Leftrightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.

*Preuve* :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad u_n = S_n - S_{n-1} \ge 0$$

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une suite à termes positifs, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $S_n$ est majorée.

□

### 2.2.1 Comparaison de deux séries à termes positifs

**Premier théorème de comparaison**

**Théorème**

Soit $u_n$ et $v_n$ les termes généraux de deux suites à termes positifs vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \geq u_n \geq v_n$

Alors
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente $\Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente $\Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ divergente

*Preuve* :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad S_n \leq S'_n$$

- $\sum v_n$ convergente $\Leftrightarrow S'_n$ majorée donc $S_n$ majorée
- $\sum u_n$ divergente $\Leftrightarrow S_n$ non majorée donc $S'_n$ non majorée

□

**Conséquences**

**Théorème**

**Théorème de domination**

Soit $u_n$ et $v_n$ les termes généraux de deux séries à termes positifs.

On suppose que $u_n = O(v_n)$
- si $\sum v_n$ convergente alors $\sum u_n$ convergente
- si $\sum u_n$ divergente alors $\sum v_n$ divergente

*Preuve* :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq u_n \leq M v_n$$

□

**Théorème**

**Théorème de l'équivalent**

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

---

*Preuve* :

$$u_n \sim_{+\infty} v_n \Rightarrow u_n = O(v_n) \qquad v_n = O(u_n)$$

□

*Exemples* :

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{convergente}} + \frac{1}{n \ln n} \sim \frac{(-1)^n}{n}$$

On étudie $\sum \frac{1}{n \ln n}$

$$\begin{aligned}
0 < \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} &< \frac{1}{n \ln n} \\
\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \ln k} \\
\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \\
\big[\ln(\ln t)\big]_2^{n+1} &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \\
\underbrace{\ln(\ln(n+1) - \ln 2)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty} &\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}
\end{aligned}$$

**Comparaison aux séries de Riemann**

**Proposition**

Règle de Riemann (règle $n^\alpha u_n$). Soit $u_n$ le terme général d'une série à termes positifs :

- si $\exists \alpha > 1$ vérifiant $u_n = O(1/n^\alpha)$ (cas notamment si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n \in \mathbb{R}_+$) alors $\sum u_n$ est convergente.
- si $\exists \alpha \leq 1$ vérifiant $1/n^\alpha = O(u_n)$ (cas notamment si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n \in \mathbb{R}_+^*$) alors $\sum u_n$ est divergente.

---

*Exemples* :

Série de Bertrand
$\sum_{n\leq 2} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

– si $\alpha > 1$

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \qquad \gamma > 1$$

En effet :

$$\frac{n^\gamma}{n^\alpha \ln^\beta n} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln^\beta n} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \ln^\beta n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

– si $\alpha < 1$

$$\frac{1}{n^\gamma} = O\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$$

En effet :

$$\frac{n^\alpha \ln^\beta n}{n^\gamma} = \frac{\ln^\beta n}{n^{\gamma-\alpha}} = \frac{\ln^\beta n}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ divergente $\Rightarrow \sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ divergente

– si $\alpha = 1$

$$u_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

- si $\beta = 1$ : $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$ comparaison à une intégrale, on trouve $\sum u_n$ divergente.
- si $\beta < 1$ : $\dfrac{1}{n \ln n} \leq \dfrac{1}{n \ln^\beta n}$ divergente
- si $\beta > 1$ : comparaison à une intégrale

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)\ln^\beta(n+1)} &\leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta t} \\
\frac{1}{n \ln^\beta n} &\leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta t} \\
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{l \ln^\beta k} &\leq \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta t}}_{= \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta t}} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta} \\
&= \frac{1}{1-\beta} \times \left[\frac{1}{u^{\beta-1}}\right]_{\ln 2}^{\ln n} \leq \frac{1}{1-\beta} \, \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}
\end{aligned}$$

### 2.2.2 Comparaisons logarithmiques de deux séries à termes strictement positifs

#### Un deuxième théorème de comparaison

**Théorème**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0\ v_n > \ 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

– Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente

– Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ divergente

---

*Preuve* :

On se ramène au premier théorème de comparaison :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

Donc on a $\forall n \in \mathbb{N}\dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{u_0}{v_0}$, c'est à dire $u_n \leq \dfrac{u_0}{v_0}\ v_n$

$$0 < u_n = O(v_n)$$

□

**Règle de d'Alembert (comparaison à une série géométrique)**

**Proposition**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$ alors si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et vaut $\ell$ :

– si $\ell < 1$ alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente

– si $\ell > 1$ alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente (grossière)

---

*Remarques* :

– si $\ell = 1$, il est impossible de conclure.

*Preuve* :

– si $\ell < 1$ : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \qquad 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{\ell+1}{2}$$

Posons $v_n = q^n$ avec $q = \dfrac{\ell+1}{2}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q - \frac{\ell+1}{2} < 1$$

Donc $\forall n \geq n_0$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente

– si $\ell > 1$ : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$, alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{\ell+1}{2} > 1$$

$$n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

$n \geq n_0$ alors $u_n \geq u_{n_0} > 0$ Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, $\sum u_n$ divergente

□

*Exemples* :

Soit $u_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \exp\left(-n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$$

Car $n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \sim \frac{n}{n} = 1$

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ convergente

### 2.2.3 Comparaison à une intégrale

**Théorème**

Soit $f \in C_m(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $f$ décroissante.

Alors la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est une série à termes positifs convergentes.

En outre $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

De plus si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ est divergente alors $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ et $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ sont des infiniment grands équivalents.

*Preuve* :

Idée : on applique l'inégalité de la moyenne à l'application $f$ entre $n-1$ et $n$ :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f - t) \,\mathrm{d}t \leq f(n-1)$$

Donc

$$0 \leq w_n = \int_{n-1}^{n} f(t) \,\mathrm{d}t - f(n) \leq \underbrace{f(n-1) - f(n)}_{w'_n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} w'_k = \sum_{k=1}^{n} \Big( f(k-1) - f(j) \Big) = f(0) - f(n) < f(0)$$

Donc $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} w'_n$ est convergente, ce qui donne la convergence de $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} w_n$

$$\forall n \geq 1 \qquad w_n = \int_{n-1}^{n} f(t) \,\mathrm{d}t - f(n)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} w_k &= \sum_{k=1}^{n} \left( \int_{k-1}^{k} f(t) \,\mathrm{d}t - f(k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \int_{k-1}^{k} f(t) \,\mathrm{d}t \right) - \sum_{k=1}^{n} f(k) \\
&= \int_{0}^{n} f - t) \,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k)
\end{aligned}$$

Si $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} f(k)$ convergente alors $\sum_{k=1}^{n} f(k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in \mathbb{R}_+$

Alors $\displaystyle\int_0^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$

Si $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} f(k)$ divergente alors $\sum_{k=1}^{n} f(k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Donc $\displaystyle\int_0^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Car $\sum_{k=1}^{n} w_k$ admet une limite

Donc $\sum_{k=1}^{n} w_k = O_{+\infty}(1)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n} f(k) + O(1)\\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k) + o\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)\\ &\sim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k)\end{aligned}$$

□

*Exemples* :

Séries de Riemann

$\alpha > 0$

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(n-1)^\alpha}$$

C'est à dire

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} \qquad k \leq 2$$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

– si $\alpha = 1$

$$\int^{n+1} t_1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

Donc on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

– si $0 < \alpha < 1$

$$\underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\left.\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right|_1^{n+1}}_{\sim_{+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\left.\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right|_1^{n} + 1}_{\sim_{+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}}$$

Donc on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

– si $\alpha > 1$, il y a convergence, on regarde les restes. Ce sont des infiniment petits

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

## 2.3 Convergence absolue

**Définition**

Soit $u_n$ le terme général d'une série réelle ou complexe, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente.

### 2.3.1 Lien entre convergence et convergence absolue

**Théorème**

La convergence absolue d'une série implique la convergence de cette série.

*Remarques* :
– la réciproque est fausse.

*Contre-exemples* :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente (théorème des des séries alternées)

$\sum |u_n|$ est divergente (Riemann) : $|u_n| = \dfrac{1}{n}$

*Preuve* :
– $1^{\text{er}}$cas : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est à termes réels, posons

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) = \begin{cases} u_n & \text{si} \quad u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_n^- = max(-u_n, 0) = \begin{cases} -u_n & \text{si} \quad u_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} u_n^+ - u_n^- = u_n \\ u_n^+ + u_n^- = |u_n| \\ u_n^+ \geq 0 \quad u_n^- \geq 0 \end{array} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{array}{c} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \end{array}$$

Si $\sum |u_n|$ est convergente alors les deux sous-suites sont convergentes.

– second cas : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est à termes complexes

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \Re(u_n) + i\Im(u_n)$$
$$|\Re(u_n)| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad |\Im(u_n)| \leq |u_n|$$
$$\sum |u_n| \quad \text{convergente} \quad \Rightarrow \begin{cases} |\Re(u_n)| & \text{convergente} \\ |\Im(u_n)| & \text{convergente} \end{cases}$$

Donc $\sum \Re(u_n)$ et $\sum \Im(u_n)$ convergentes (absolument) et, a fortiori, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^{3/2}}$$
$$|u_n| = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n\sqrt{n}} \qquad \alpha \neq 1/2 \qquad n \geq 2$$

– si $\alpha < 1/2$

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{(-1)^n\sqrt{n}}$$

Donc $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergente.

– si $\alpha > 1/2$

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

On sait que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergente (théorème des séries alternées).

– si $\alpha > 1 \Rightarrow \sum |u_n|$ convergente donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente (absolument).

– si $1/2 \leq \alpha \leq 1$ : on étudie la série de terme général

$$v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = -\frac{\sqrt{n}}{(n^\alpha + (-1)^n\sqrt{n})n^\alpha} \\ &\sim -\frac{\sqrt{n}}{n^{2\alpha}} = -\frac{1}{n^{(2\alpha-1/2)}} \end{aligned}$$

– si $2\alpha - 1/2 > 1$ alors $\sum v_n$ convergente donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergente.

– si $2\alpha - 1/2 \leq 1$ alors $\sum v_n$ divergente donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dinvergente.

□

### 2.3.2 Produit de Cauchy de deux séries

**Définition**

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries réelles ou complexes

On appelle produit de Cauchy de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \sum_{p+q=n} u_n v_q = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0$$

---

**Théorème**

La série produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergente. En outre :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

---

**Définition**

Exponentielle complexe :

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est convergente (absolument). En effet :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|z^n|}{n!}}_{\text{convergente}}$$

Par définition, posons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z$$

---

**Proposition**

Soient $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ alors

$$\exp(z + z') = \exp z \cdot \exp z'$$

---

*Preuve* :

En effet :

$$\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \qquad \exp z' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{z'^q}{q!} = \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \cdot z^p z'^q$$

$$w_n = \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} z^p z'^q = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p z'^{n-p} = \frac{1}{n!} \, (z+z')^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z') = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \exp z \cdot \exp z'$$

□

## 2.4 Exemples classiques

### 2.4.1 Constante d'Euler

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \stackrel{?}{=} \ln n + \gamma + o(1) \qquad \gamma \approx 0.577$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &< \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} < \frac{1}{n-1} \\
\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} &< \frac{1}{n} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} &< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\int_{1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} &< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\underbrace{\ln(n+1)}_{\sim_{+\infty} \ln n} &< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln n \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\sim_{+\infty} \ln n \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \ln n + o(\ln n)
\end{aligned}$$

Etudions la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. On étudie alors la série de terme général $X_n = u_n - u_{n-1}$

$$\begin{aligned}
X_n &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n-1)\right) \\
&= \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) \\
&= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc la suite de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. $\gamma$ s'appelle la constante d'Euler.
Conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1)$$

*Remarques* :

$$\frac{1}{n} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} < \frac{1}{n-1}$$

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \\
u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) \\
&= \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} &< u_n - u_{n-1} < 0 \\
\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) &< \sum_{k=n+1}^{n+p} (u_k - u_{k-1}) < 0 \\
\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n} &< u_{n+p} - u_n < 0 \\
\xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{-1}{n} &\leq \gamma - u_n \leq 0
\end{aligned}$$

### 2.4.2 Formule de Stirling

$$n! \stackrel{?}{=} \sqrt{2\pi n}\, n^n \ \mathrm{e}^{-n}$$

Objectif : il s'agit de montrer que

$$\frac{n!}{n^{1/2}\ n^n\ \mathrm{e}^{-n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L > 0$$

Cela revient à montrer que la suite de terme général $u_n$ est convergente, avec

$$u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^{1/2}\ n^n\ \mathrm{e}^{-n}}\right)$$

On étudie la série de terme général $X_n = u_n - u_{n-1}$

$$\begin{aligned}
X_n &= \ln\left(\frac{n!}{n^{1/2+n}\ \mathrm{e}^{-n}}\right) - \ln\left(\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1/2}\ \mathrm{e}^{-n+1}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{n!(n-1)^{n-1/2}\,\mathrm{e}^{-n+1}}{n^{1/2+n}(n-1)!\ \mathrm{e}^{-n}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{n(n-1)^{n-1/2}}{n^{n+1/2}}\cdot \mathrm{e}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n-1/2}}\cdot \mathrm{e}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(n-\frac{1}{n}\right)+1\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+1\\
&= -1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\sum X_n$ est absolument convergente.

Evaluation de $L$ : révision de l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\mathrm{d}t$$

Evaluation de $I_n$

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos^(n+1)t\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^n t\\
&= [\sin t \cos^n t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} n \sin^2 t \cos^{n-1} t\mathrm{d}t\\
&= n\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\cos^{n-1} t\mathrm{d}t\\
&= nI_{n-1} - nI_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2pI_{2p} &= (2p-1)I_{2p-2}\\(2p-2)I_{2p} &= (2p-3)I_{2p-3}\\&\vdots\\2I_2 &= I_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{2p} &= \frac{1\cdot 3\cdot(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 2p}\,I_0 \qquad I_0=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\\&=\frac{(2p)!}{(2\cdot 4\cdot 2p)^2}\,\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2p+1)I_{2p+1} &= 2PI_{2p-1}\\(2p-1)I_{2p-1} &= (2p-2)I_{2p-3}\\&\vdots\\3i_3 &= 2I_1\end{aligned}$$

$$I_2p+1=\frac{2\cdot 4\cdot 2p}{3\cdot 5\cdot(2p+1)} \qquad I_1=\int_0^{\pi/2}\cos t\;\mathrm{d}t=1$$

Remarque :

$$\begin{aligned}nI_n &= (n-1)I_{n-2}\\nI_nI_{n-1} &= (n-1)I_{n-2}I_{n-1}=\cdots=I_1I_0\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$I_n=\int_0^{\pi/2} cos^n t\,\mathrm{d}t$$

$$I_n\le I_{n-1}\ \le I_{n-2}$$
$$1\le\frac{I_{n-1}}{I_n}\le\frac{I_{n-2}}{I_n}=\frac{n}{n-1}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}=1\Rightarrow I_{n-1}\sim I_n$$

Donc

$$nI_n^2\sim\frac{\pi}{2}\Rightarrow I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Retour à l'exercice : on a

$$n!\sim Ln^{1/2}\ n^n\ \mathrm{e}^{-n}$$
$$I_{2p}\sim_{+\infty}\frac{\pi}{4p}$$

Or

$$\begin{aligned}I_{2p}&\sim\frac{L(2p)^{1/2}\ (2p)^{2p}\ \mathrm{e}^{-2p}}{2^{2p}(L(p)^{1/2}\ p^p\ \mathrm{e}^{-p})^2}\cdot\frac{\pi}{2}\\&\sim\frac{1}{L}\ \frac{(2p)^2}{p}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} I_{2p} \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{2p}} \\ \\ I_{2p} \sim \dfrac{\pi}{4p} \end{array}\right\} \frac{1}{L}\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow L = \sqrt{2\pi}$$

# Chapitre 3

# Espaces préhilbertiens

## 3.1 Produit scalaire réel ou complexe

*Exemples* :

1. $E = \mathbb{R} \qquad |x| = \sqrt{x^2}$
2. $E = \mathbb{C} \qquad |z| = \sqrt{z\overline{z}}$
3. $E = \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $E = \mathbb{C}^2 \qquad (z, z') \in \mathbb{C}^2 \qquad \|(z, z')\| = \sqrt{z\overline{z} + z'\overline{z'}}$

### 3.1.1 Définition d'un produit scalaire

**Forme bilinéaire symétrique (cas réel), sesquilinéaire hermitienne (cas complexe)**

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev. On appelle forme sesquilinéaire hermitienne toute application

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x, y) \end{aligned}$$

Et vérifiant :

1. $\forall x \in E \quad \varphi(x, .) : E \longrightarrow \mathbb{K}; \quad y \longmapsto \varphi(x, .)(y) = \varphi(x, y)$ est linéaire, c'est-à-dire
$$\forall y_1, y_2 \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$
$$\varphi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$
2. $\forall y \in E \quad \varphi(., y) : E \longrightarrow \mathbb{K}; \quad x \longmapsto \varphi(., y)(x) = \varphi(x, y)$ est semilinéaire, c'est à dire
$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$
$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \overline{\lambda} \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$$
3. $\forall (x, y) \in E^2 \qquad \varphi(x, y) = \overline{\varphi(x, y)}$

Il s'agit de la forme quadratique associée à une forme sesquilinéaire hermitienne

Posons

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto q(x) = \varphi(x, x) \end{aligned}$$

En effet, $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)} \Rightarrow \varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$ donc $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$

**Proposition**

Règle de calcul : $\forall x, y \in E \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$q(\alpha x + \beta y) = |\alpha|^2 q(x) + 2\Re\left(\overline{\alpha}\beta\varphi(x,y)\right) + |\beta|^2 q(y)$$

Cas réel :

$$q(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 q(x) + 2\alpha\beta\varphi(x,y) + \beta^2 q(y)$$

---

**Proposition**

Identités de polarisation :
- Cas réel :

$$q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$$
$$\varphi(x,y) = 1/2\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big)$$

- Cas complexe :

$$\varphi(x,y) = 1/4\Big(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy)\Big)$$

---

**Forme sesquilinéaire définie positive**

**Définition**

Soit $\varphi$ une forme sesquilinéaire hermitienne sur $E$, $\mathbb{K}$-ev. On dit que $\varphi$ est positive si :

$$\forall x \in E \qquad q(x) = \varphi(x,x) \in \mathbb{R}_+$$

On dit que $\varphi$ est définie si :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \qquad q(x) = \varphi(x,x) > 0$$

---

**Définition**

Tout ev muni d'une forme sesquilinéaire définie positive s'apelle espace préhilbertien, et $\varphi$ s'apelle produit hermitien (scalaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

---

**Exemples fondamentaux**

*Exemples* :

1. $E = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$-ev

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ y &= (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \qquad \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

$$q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

2. $E = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}$-ev

$$\begin{matrix} z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n) \\ z' = (z'_1, \dots, z'_n) \in \mathbb{C}^n) \end{matrix} \qquad \varphi(z, z') = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} z'_i$$

$$q(z) = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0$$

$$q(z) = 0 \Rightarrow \forall i \quad z_i = 0$$

3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$-ev

$$\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (M, N) \longmapsto \varphi(M, N) = \operatorname{tr}({}^t MN)$$

– $\varphi$ est symétrique :

$$\begin{aligned} \varphi(N, M) &= \operatorname{tr}({}^t NM) \\ &= \operatorname{tr}\left({}^t({}^t NM)\right) \\ &= ({}^t MN) = \varphi(M, N) \end{aligned}$$

– $\varphi$ linéaire par rapport à la seconde variable

$$\begin{aligned} \varphi(M, \alpha N + N') &= \operatorname{tr}\left({}^t M(\alpha N + N')\right) \\ &= \operatorname{tr}(\alpha {}^t MN + {}^t MN') \\ &= \alpha \operatorname{tr}({}^t MN) + \operatorname{tr}({}^t MN') \\ &= \alpha\varphi(M, N) + \varphi(M, N') \end{aligned}$$

$$q(M) = \operatorname{tr}({}^t MM) = \sum_{i,k} m_{ik}^2 \geq 0$$

$M = (m_{ij})$

$$q(M) = 0 \Rightarrow \sum_{i,k} m_{ki}^2$$

4. $E = C([a, b], \mathbb{R}))$

$$\varphi : E^2 \longrightarrow; \quad (f, g) \longmapsto \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

– Symétrie : $\displaystyle\int_a^b fg = \int_a^b gf$

– Linéarité par rapport à la seconde variable :

$$\int_a^b f(t) \cdot (\lambda g(t) + h(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)h(t)\mathrm{d}t$$

– $\displaystyle q(f) = \int_a^b |f^2(t)|\mathrm{d}t \geq 0$

– $q(f) = \displaystyle\int_a^b |f^2(t)\mathrm{d}t| = 0 \Rightarrow f = 0$ ($f$ continue)

*Remarques* :
– on notera $\langle\,|\,\rangle$ le produit hermitien.

### 3.1.2 Norme hermitienne

Notations :
– $(E, \langle\,|\,\rangle)$ espace préhilbertien réel ou complexe
– $\|x^2\| = \langle\, x \,|\, x \,\rangle$

**Théorème**

**Inégalité !de Cauchy-Schwartz**

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad |\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle\,| \leq \|x\|\;\|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $(x,y)$ est liée.

---

*Preuve* :
Soit $(x,y) \in E^2$
– si $x = 0$

$$|\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle\,| = |\,\langle\, 0 \,|\, y \,\rangle\,| = 0 \qquad \|x\|\;\|y\| = \|0\|\;\|y\| = 0$$

– si $x \neq 0$, posons $x'$ tel que

$$y = \langle\, x \,|\, y \,\rangle \frac{x}{\|x\|^2} + x'$$

Et je dis que $\langle\, x \,|\, x' \,\rangle = 0$. En effet

$$\begin{aligned}\langle\, x \,|\, y \,\rangle &= \left\langle x \;\middle|\; \langle\, x \,|\, y \,\rangle \frac{x}{\|x\|^2} + x' \right\rangle \\ &= \frac{\langle\, x \,|\, y \,\rangle}{\|x\|^2} \langle\, x \,|\, y \,\rangle + \langle\, x \,|\, x' \,\rangle \\ &= \langle\, x \,|\, y \,\rangle + \langle\, x \,|\, x' \,\rangle\end{aligned}$$

D'où $x' = 0$

$$\begin{aligned}\|y\|^2 = \langle\, y \,|\, y \,\rangle &= \left\langle \langle\, x \,|\, y \,\rangle \frac{x}{\|x\|^2} + x' \;\middle|\; \langle\, x \,|\, y \,\rangle \frac{x}{\|x\|^2} + x' \right\rangle \\ &= \frac{\overline{\langle\, x \,|\, y \,\rangle}}{\|x\|^2} \frac{\langle\, x \,|\, y \,\rangle}{\|x\|^2} \langle\, x \,|\, x \,\rangle + \frac{\overline{\langle\, x \,|\, y \,\rangle}}{\|x\|^2} \underbrace{\langle\, x \,|\, x' \,\rangle}_{=0} + \frac{\overline{\langle\, x \,|\, y \,\rangle}}{\|x\|^2} \underbrace{\langle\, x' \,|\, x \,\rangle}_{=0} + \langle\, x' \,|\, x' \,\rangle\end{aligned}$$

D'où

$$\|y\|^2 \leq \frac{|\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle\,|^2}{\|x\|^2} \Rightarrow \|y\|\;\|x\| \geq \langle\, x \,|\, y \,\rangle$$

□

**Théorème**

**Inégalité de Minkowski**

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $x = 0$ ou $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

---

*Preuve* :

$$\|x\|^2 + \langle\, x \,|\, y \,\rangle + \langle\, y \,|\, x \,\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\ \|y\|$$
$$2\Re(\langle\, x \,|\, y \,\rangle) \leq 2\|x\|\ \|y\|$$

Or

$$\Re(\langle\, x \,|\, y \,\rangle) \leq |\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle\,| \leq \|x\|\ \|y\|$$

Cas d'égalité :

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \Re(\langle\, x \,|\, y \,\rangle) = \|x\|\ \|y\|$$

Or

$$\Re(\langle\, x \,|\, y \,\rangle) \leq \langle\, x \,|\, y \,\rangle \leq \|x\|\ \|y\|$$

D'où

$$|\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle\,| = \|x\|\ \|y\|$$

$x = 0$ convient

Si $x \neq 0 \qquad \exists \lambda \in \mathbb{K} \ / \ y = \lambda x$

$$\Re(\langle\, x \,|\, y \,\rangle) = \Re(\langle\, x \,|\, \lambda x \,\rangle) = \Re(\lambda \|x\|^2)$$
$$\|x\|^2 \Re(\lambda) = \|x\|^2 |\lambda|$$

C'est à dire

$$\Re(\lambda) = |\lambda| \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+$$

□

## 3.2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien

### 3.2.1 Définitions et propositions élémentaires

**Définitions**

**Définition**

Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ espace préhilbertien
Soient $x, y \in E$, on dit que x et y sont orthogonaux si

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0$$

On notera $x \perp y$

---

**Théorème**

**Théorème de Pythagore**

Soient $x, y \in E$, on a

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$

---

*Preuve* :

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle\, x \,|\, y \,\rangle + \langle\, y \,|\, x \,\rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ &= \langle\, x \,|\, y \,\rangle + \langle\, y \,|\, x \,\rangle\end{aligned}$$

En particulier si $x \perp y$ alors $\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \langle\, y \,|\, x \,\rangle = 0$, d'où

$$\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

Réciproque : $\langle\, x \,|\, y \,\rangle + \langle\, y \,|\, x \,\rangle = 0$
– si $E = \mathbb{R}$ alors $2\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$
– si $E = \mathbb{C}$ alors $2\Re(\langle\, x \,|\, y \,\rangle) = 0$

□

**Définition**

Soient X, Y, deux arties non vides de E. On dit que X et Y sont orthogonales (notation $X \perp Y$) si

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \qquad \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0$$

---

**Orthogonal d'une partie**

**Définition**

Soit X une partie non vide de E, on appelle orthogonal de X la partie notée $X^\perp$ définie par

$$X^\perp = \{y \in E \;/\; \forall x \in X \quad x \perp y\}$$

Il s'agit d'un sev de E.

---

Cas particuliers :
- $X = \{x\}$ avec $x \neq 0$

$$\begin{aligned} X^\perp &= \{y \in E \;/\; x \perp y\} \\ &= \{y \in E \;/\; \langle x \,|\, y \rangle = 0\} = \ker \varphi_x \end{aligned}$$

  Donc $\{x\}^\perp$ est un hyperplan de E ($x \neq 0$)
  $X = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$

$$\begin{aligned} X^\perp &= \{y \in E \;/\; \forall i \;/\; e_i \perp y\} \\ &= \{y \in E \;/\; \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \langle e_i \,|\, y \rangle = 0\} \end{aligned}$$

### 3.2.2 Familles orthogonales

**Définition**

On appelle famille orthogonale de $(E, \langle \,|\, \rangle)$ toute famille $(e_i)_{i \in I}$ vérifiant
- $\forall i \in I \quad e_i \neq 0$
- $\forall i, j \in I \quad i \neq j \Rightarrow \langle e_i \,|\, e_j \rangle = 0$

---

**Proposition**

Toute famille orthogonale de E est libre.

---

*Preuve* :

Soit $i_1, \ldots, i_n \in I$

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \qquad \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} &\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow |\lambda_1|^2 \|e_1\|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 \|e_n\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow |\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 0 \end{aligned}$$

□

**Définition**

On appelle famille orthonormale de $(E, \langle \mid \rangle)$ toute famille $(e_i)_{i \in I}$ vérifiant

$$\forall i, j \in I \qquad \langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle = \delta_{ij}$$

---

### 3.2.3 Existence de bases orthonormales en dimension finie

**Théorème**

Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ espace préhilbertien de dimension finie. Alors E possède au moins une base orthonormale.

---

*Preuve* :

Récurrence sur $\dim E$
- si $\dim E = 1$ alors $E = \mathrm{Vect}(x)$ avec $x \neq 0$
  $\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ base orthonormale de E
- si vrai à l'indice n
  Soit $E \;/\; \dim E = n+1$
  Choisissons $x \in E \setminus \{0\}$, $x^\perp$ est un hyperplan de E
  Donc $\dim x^\perp = n$
  On peut définir $(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormale de $x^\perp$ et $\left(e_1, \ldots, e_n, \dfrac{x}{\|x\|}\right)$ base orthonormale de E

□

*Remarques* :
- soit $(e_1, \ldots, e_n)$ BON de E

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i \,|\, x \rangle\; e_i$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\, \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle\, |^2$$

### 3.2.4 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel en dimension finie

**Introduction**

**Théorème**

Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit F sev de E avec F de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

$F^{\perp}$ s'appelle dans ce cas le supplémentaire orthogonal de F.

---

*Preuve* :

$F \cap F^{\perp} \stackrel{?}{=} \{0\}$

Si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $x \in F, x \in F^{\perp} \Rightarrow x \perp x \Rightarrow \langle\, x \,|\, x \,\rangle = 0$

Et donc $\|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

F est de dimension finie p. Choisissons une BON de F : $(e_1, \dots, e_p)$

$$\forall x \in E \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle \; e_i + x'$$

Je dis que $x' \in F^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)^{\perp}$. En effet :

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1, \dots, p]\!] \qquad \langle\, e_j \,|\, x' \,\rangle &= \langle\, e_j \,|\, x \,\rangle - \left\langle\, e_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle \; e_i \right\rangle \\ &= \langle\, e_j \,|\, x \,\rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle \underbrace{\langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle}_{=\delta_{ij}} \\ &= \langle\, e_j \,|\, x \,\rangle - \langle\, e_j \,|\, x \,\rangle = 0 \end{aligned}$$

□

*Contre-exemples* :

$E = C([0,1], \mathbb{R})$, soit $f, g \in E \qquad \langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_0^1 = f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

– alors $F = \{f \in E \;/\; f(0) = 0\}$ sev de E
– et $F^{\perp} = \{g \in E \;/\; \forall f \in F \quad \langle\, f \,|\, g \,\rangle = 0\}$

Si $g \in F^{\perp}$ alors $g^2 \in F^{\perp}$

$$\begin{aligned} \forall f \in F \qquad \left\langle\, f \,\middle|\, g^2 \,\right\rangle &= \int_0^1 f(x) g^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x) g(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle\, fg \,|\, g \,\rangle = \langle\, h \,|\, g \,\rangle = 0 \end{aligned}$$

Avec $h \in F$

Si $f \in F$ alors $fg \in F$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [1/n, 1] \\ 1/n & \text{si} \quad [0, 1/n] \end{cases}$$

$f_n \in F$

Soit $g \in F^{\perp}$ alors $\left\langle F_n \,\middle|\, g^2 \right\rangle = 0$, c'est à dire

$$\int_0^{1/n} \frac{1}{n} g^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\forall n \in N^* \qquad \int_{1/n}^1 g^2(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow g^2(x) = 0 \quad \text{sur} \quad [1/n, 1]$$

A fortiori, $g^2(x) = 0$ sur $[0, 1]$

$$g \in F^{\perp} \Rightarrow g = 0$$

Donc $F^{\perp} = \{0\}$

**Projection orthogonale dans un espace préhilbertien**

**Définition**

Soit $F$ un sev de $(E, \langle \mid \rangle)$ préhilbertien.

Si $E = F \oplus F^{\perp}$ (c'est le cas si F est de dimension finie), le projecteur de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.

Notation :

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^{\perp} &\longrightarrow E \\ x = y + z &\longmapsto p_F(x) = y \end{aligned}$$

---

Expression analytique en dimension finie :

Soit $B = (e_1, \cdots, e_p)$ BON de F, alors

$$\begin{aligned} p_F : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i \mid x \rangle \; e_i \end{aligned}$$

*Exemples* :

$E = \mathbb{R}^3$ avec sa structure euclidienne, et $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit F le plan d'équation $2x + y + z = 0 = \langle xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid 2e_1 + e_2 + e_3 \rangle$.

On cherche $\mathrm{Mat}_{p_F}$

- $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + e_3)$
- $F = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3, e_1 - 2e_3)$

$$\begin{aligned} p_F(e_1) &= 1/6(2e_1 + 2e_2 - 2e_3) \\ p_F(e_2) &= 1/6(-2e_1 + 5e_2 - e_3) \\ p_F(e_3) &= 1/6(-2e_1 - e_2 + 5e_3) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Mat}_{p_F} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{p_{F^\perp}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_F(x) + p_{F^\perp}(x) = x$$

*Remarques* :
– $B_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$ base quelconque de F. Alors $p_F(x)$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} p_F(x) \in \mathrm{Vect}(e'_1, \ldots, e'_p) \\ \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \langle\, e'_i \,|\, x - p_F(x) \,\rangle = 0 \end{cases}$$

$$x = \sum_{i=1}^{p} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle\, e'_i + x' \qquad x' \in F^\perp$$

**Théorème**

**Inégalité de Bessel**

$(e_1, \ldots, e_p)$ BON de F, alors

$$\forall x \in E \qquad \sum_{i=1}^{p} |\,\langle\, e_i \,|\, x \,\rangle\,|^2 \leq \|x\|^2$$

*Preuve* :

$$\begin{array}{rcl} x & = & p_F(x) + x' \\ \|x\|^2 & = & \|p_F(x)\|^2 + \|x'\|^2 \quad \text{car} \quad \langle\, p_F(x) \,|\, x' \,\rangle = 0 \\ \|x\|^2 & \geq & [[p_F(x)\|^2 = \left\| \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle\, e_i \right\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |\,\langle\, e_i \,|\, x \,\rangle\,|^2 \end{array}$$

□

Plus généralement, $(E, \langle\,|\,\rangle)$ préhilbertien, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthogonale de E. Alors

$$\forall x \in E \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |\,\langle\, e_n \,|\, x \,\rangle\,|^2 \quad \text{convergente}$$

En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} |\,\langle\, e_k \,|\, x \,\rangle\,|^2 \leq \|x\|^2$$

Donc la suite des sommes partielles de la suite est majorée.

**Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel**

**Définition**

$(E, \langle \mid \rangle)$ préhilbertien

Soit $x \in E$ et F sev de E.

On appelle distance de x à F le réel positif défini par :

$$d(x, F) = \inf(\|x - z\|, z \in F)$$

---

**Théorème**

**Théorème de minimisation**

$(E, \langle \mid \rangle)$ préhilbertien et F sev de dimension finie. Alors

$$\forall x \in E \quad d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

De plus, si $z \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - z\|$ alors $z = p_F(x)$.

---

*Preuve* :

On applique le théorème de Pythagore.

Soit $x \in E$ et $z \in F)$ alors

$$x - z = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{p_F(x) - z}_{\in F^\perp}$$

$$\|x - z\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - z\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

$$\forall x \in F \quad \|x - z\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

Donc

$$\inf_{z \in F}(\|x - z\|^2) \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

Et comme $p_F(x) \in F$

$$\inf_{z \in F}(\|x - z\|^2) = \|x - p_F(x)\|^2$$

$$d^2(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$$
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

□

*Exemples* :

Meilleure approximation quadratique d'une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$par une matrice symétrique.

Position du problème : soit $A = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche $S = (s_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in S_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} (a_{ij} - s_i)^2 \quad \text{soit le plus petit possible}$$

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle\, M \mid N \,\rangle = \mathrm{tr}({}^tMN)$$
$$\|M\|^2 = \mathrm{tr}({}^tMM) = \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} m_{ij}^2$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on cherche $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|A - S\|^2$ soit minimum, c'est à dire on cherche S tel que

$$\|A - S\| = d(A, S_n(\mathbb{R})$$

C'est à dire $S = p_{S_n(\mathbb{R})}(A)$

Remarque : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

$$A = \frac{A +^t A}{2} + \frac{A -^t A}{2}$$

C'est à dire

$$p_{S_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A +^t A}{2}$$

De plus

$$d(a, S_n(\mathbb{R})) = \|A - p_{S_n(\mathbb{R})}(A)\| = \left\|A - \frac{A +^t A}{2}\right\| = \left\|\frac{A -^t A}{2}\right\|$$

*Remarques* :

– Equation pratique de la distance

$$\begin{aligned} d^2(x, F) &= \|x - p_F(x)\|^2 \\ E &= F \oplus F^\perp \\ x &= p_F(x) = (x - p_F(x)) \end{aligned}$$

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

Donc

$$d^2(x, F) = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

$$\begin{aligned} \|x - p_F(x)\|^2 &= \langle\, x - p_F(x) \mid x - p_F(x) \,\rangle \\ &= \langle\, x - p_F(x) \mid x \,\rangle + \underbrace{\langle\, x - p_F(x) \mid p_F(x) \,\rangle}_{=0} \end{aligned}$$

$$d^2(x, F) = \langle\, x - p_F(x) \mid x \,\rangle$$

### 3.2.5 Construction pratique d'une famille orthonormale

**Proposition**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille libre dénombrable de $(E, \langle\,|\,\rangle)$ préhilbertien.

Alors il existe une unique famille orthonormale de E vérifiant :

1. $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$$
2. $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \langle\, e_n \,|\, u_n \,\rangle = 0$$

---

On construit la famille de manière récurrente.

- Amorçage : $n = 0$, $\mathrm{Vect}(u_0) = \mathrm{Vect}(e_0)$ et $\langle\, e_0 \,|\, u_0 \,\rangle > 0$.
  Donc $e_0 = \lambda u_0$, $\|e_0\|^2 = 1$
  $$\langle\, e_0 \,|\, u_0 \,\rangle = \langle\, \lambda u_0 \,|\, u_0 \,\rangle = \overline{\lambda}\|u_0\|^2$$
  Donc $\overline{\lambda}\|u_0\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
  Si $\|e_0\|^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2\|u_0\|^2 = 1$
  On trouve :
  $$e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}$$
- On suppose la famille construite jusqu'à l'indice $n-1$. On la note $(e_0, \ldots, e_{n-1})$.
  On passe à l'indice n : on désigne la famille par $(e'_1, \ldots, e'_n)$.
  $$\left.\begin{array}{r} \forall i \in [\![0, n]\!] \quad \langle\, e_i \,|\, u_i \,\rangle > 0 \\ \forall i \in [\![0, n]\!] \quad \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall i \in [\![0, n{-}1]\!] \quad e'_i = e_i$$
  Il reste à définit le vecteur $e'_n$.
  $$\mathrm{Vect}(e'_0, \ldots, e'_n) = \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_n)$$
  Donc $e'_n$ est combinaison linéaire de $(u_0, \ldots, u_n)$ et de $(e'_0, \ldots, e'_{n-1}, u_n) = (e_0, \ldots, e_{n-1}, u_n)$, car
  $$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_n) &= \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_{n-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u_n) \\ &= \mathrm{Vect}(e'_0, \ldots, e'_{n-1}) \oplus \mathrm{Vect}(u_n)\end{aligned}$$
  Donc
  $$e'_n = \lambda u_n + \alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$$
  $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \langle\, e_k \,|\, e'_n \,\rangle = 0$ C'est à dire
  $$\begin{aligned}&\lambda \langle\, e_k \,|\, u_n \,\rangle + \left\langle\, e_k \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_i \,\right\rangle = 0 \\ &\lambda \langle\, e_k \,|\, u_n \,\rangle + \alpha_k = 0\end{aligned}$$

D'où $\alpha_k = -\lambda \langle e_k \mid u_n \rangle \qquad (k \in [\![0, n-1]\!]$, c'est à dire

$$\begin{aligned} e'_n &= \lambda u_n - \lambda \langle e_n \mid u_n \rangle e_0 - \cdots - \lambda \langle e_{n-1} \mid u_n \rangle e_{n-1} \\ &= \lambda(u_n - \langle e_n \mid u_n \rangle e_0 - \cdots - \langle e_{n-1} \mid u_n \rangle e_{n-1}) \end{aligned}$$

Posons

$$y = u_n - \langle e_n \mid u_n \rangle e_0 - \cdots - \langle e_{n-1} \mid u_n \rangle e_{n-1}$$

Alors $y \neq 0$ car $(u_0, \dots, u_n)$ libre.

$$u_n = y + \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_k \mid u_n \rangle e_k$$

On sait que

$$0 < \langle e'_n \mid u_n \rangle = \langle e'_n \mid y \rangle + 0 = \langle \lambda y \mid y \rangle = \overline{\lambda} \|y\|^2 \quad \text{car} \quad e'_n = \lambda y$$

Donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, or

$$\|e'_n\|^2 = \lambda = \|\lambda y\|^2 = \lambda^2 \|y\|^2$$

D'où

$$\lambda = \frac{1}{\|y\|}$$

D'où l'algorithme :

$$e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}$$

Pour $n \geq 1$ :

$$e_n = \frac{u_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \langle e_k \mid u_n \rangle e_k}{\left\| u_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \langle e_k \mid u_n \rangle e_k \right\|} = \frac{u_n - p_{F_n}(u_n)}{\|u_n - p_{F_n}(u_n)\|}$$

Avec $P_{F_n}$ le projeté orthogonal sur $F_n$ avec

$$F_n = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_{n-1}) = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1})$$

*Exemples* :

$E = \mathbb{R}[X]$

$$\forall P, Q \in E \qquad \langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) \, \mathrm{d}t$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Elle n'est pas orthogonale pour $\langle \mid \rangle$. En effet :

$$\left\langle X^i \,\middle|\, X^j \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^{i+j} \, \mathrm{d}t = \left. \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right|_{-1}^{1}$$

$u_n = X^n$

$$e_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{u_1 - \langle e_0 \mid u_1 \rangle e_0}{\|u_1 - \langle e_0 \mid u_1 \rangle e_0\|} \\
&= \frac{X - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{2}} X \,\mathrm{d}X}{\| \cdots \|} \qquad = \frac{X}{\|X\|} = \frac{X}{\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} X^2 \,\mathrm{d}X}} = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

$$\|P\|^2 = \int_{-1}^{1} P^2(t) \,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= \frac{u_2 - \langle e_1 \mid u_2 \rangle e_1 - \langle e_0 \mid u_2 \rangle e_0}{\| \cdots \|} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2\sqrt{5}(X^2 - 1/3)}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N} \quad L_n = D^n \left((X^2-1)^n\right)$ (polynômes de Legendre).

$$\deg L_n = n$$

- $L_0 = 1$
- $L_1 = 2X$
- $L_2 = D^2 \left((X^2-1)^2\right) = 12(X^2 - 1/3)$

Montrons que $L_n$ est orthogonale.

$$\begin{aligned}
\langle L_p \mid L_q \rangle_{p>q} &= \int_{-1}^{1} L_p(X) L_q(X) \,\mathrm{d}X \\
&= \int_{-1}^{1} D^p \left((X^2-1)^p\right) D^q \left((X^2-1)^q\right) \,\mathrm{d}X \\
&= \underbrace{\Big[D^{p-1} \left(X^2-1)^p\right) D^q \left((X^2-1)^q\right)\Big]_{-1}^{1}}_{=0} \\
&\quad - \int_{-1}^{1} D^{p-1} \left((X^2-1)^p\right) D^{q+1} \left((X^2-1)^q\right) \,\mathrm{d}X \\
&= \int_{-1}^{1} D^{p-2} \left((X^2-1)^p\right) D^{q+2} \left((X^2-1)^q\right) \,\mathrm{d}X \\
&= (-1)^{q+1} \int_{-1}^{1} D^{p-q-1} \left((X^2-1)^p\right) D^{2q+1} \left((X^2-1)^q\right) \,\mathrm{d}X \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'orthogonalisée de Schmidt de la base canonique est $\dfrac{L_n}{\|L_n\|}$.

## 3.3 Espaces euclidiens

### 3.3.1 Théorème de représentation

**Définition**

On appelle espace vectoriel euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si $E$ est de dimension finie, alors E possède des bases orthonormales.

$$\forall F\ E\text{-sev} \qquad E = F \oplus F^{\perp}$$

---

**Théorème**

Tout espace vectoriel euclidien est canoniquement isomorphe à son dual.

---

*Preuve* :

$$\begin{aligned} I : E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto I(x) = \langle\, x \,|\, \cdot \,\rangle \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} I(x) : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto I(x)(y) = \langle\, x \,|\, y \,\rangle \end{aligned}$$

I est linéaire ; $\lambda \in \mathbb{R} \quad x, x' \in E$

$$\forall y \in E \qquad I(\lambda x + x') = \langle\, \lambda x + x' \,|\, y \,\rangle \qquad = \lambda \langle\, x \,|\, y \,\rangle + \langle\, x' \,|\, y \,\rangle$$
$$= \lambda I(x)(y) + I(x')(y)$$

On sait que $\dim E = \dim E^*$.

Il reste à vérifier l'injectivité de I.

Soit $x \in \ker I \Rightarrow I(x)$ est l'application nulle. Donc

$$\begin{aligned} \forall y \in E \quad & I(x)(y) = 0 \\ \forall y \in E \quad & \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0 \\ \text{choisissons } x = y \quad & \langle\, x \,|\, x \,\rangle = \|x\|^2 = 0 \\ & \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Traduction : soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. Posons $H = \ker\varphi$. Alors $I : \ E \longrightarrow E^*$ est bijective.

Posons $x = I_{-1}(\varphi)$, $\ker\varphi = \{y \in E \,/\, \varphi(y) = 0\}$

$$\ker\varphi = \{y \in E \;/\; \langle\, x \mid y\,\rangle = 0\} = x^{\perp} = H$$
$$\mathrm{Vect}(x) = H^{\perp}$$

□

### 3.3.2 Matrice d'un produit scalaire

**Définition**

*Exemples* :
$\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
$B = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique orthonormale.

$$\left.\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \\ y = (y_1, \dots, y_n) &= \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle\, x \mid y\,\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$${}^tXY = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \end{pmatrix}$$

**Définition**

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.
On appelle matrice du produit scalaire $\langle\,|\,\rangle$ relativement à $B$ la matrice

$$\Big(\langle\, e_i \mid e_j\,\rangle\Big)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$$

Notons
$$A = \mathrm{Mat}_B(\langle\,|\,\rangle) = \Big(\langle\, e_i \mid e_j\,\rangle\Big)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$$

---

*Remarques* :
– $\langle\, e_i \mid e_j\,\rangle \Rightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$
– $B$ orthonormale $\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B\Big(\langle\,|\,\rangle\Big) = I$

### Ecriture matricielle du produit scalaire

**Proposition**

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E. Soit $X$ $(Y)$ la matrice des composantes de $x$ $(y)$ de E relativement à $B$.

$$A = \mathrm{Mat}_B\Big(\langle\,|\,\rangle\Big) \Leftrightarrow \forall x, y \in E \quad \langle\, x \,|\, y \,\rangle =^t XAY$$

*Preuve :*

$\boxed{\Leftarrow}$ $x = e_i \quad y = e_j$

$$\langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle =^t E_i A E_j$$

Notons $A = (a_{ij})$

$$\langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned} {}^t XAY &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) = \sum_{1 \le i \le n - -1 \le j \le n} a_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\, x \,|\, y \,\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \le i \le n - -1 \le j \le n} x_i y_j \,\langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

□

*Remarques :*

– On a

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle =^t XY$$

### Effet d'un changement de base

**Proposition**

B, B' deux bases de $(E, \langle \, | \, \rangle)$ euclidien.

Soient $A = \mathrm{Mat}_B\Big(\langle \, | \, \rangle\Big)$, $A' = \mathrm{Mat}_{B'}\Big(\langle \, | \, \rangle\Big)$ et $P$ la matrice de passage de B à B', alors

$$A' =^t PAP$$

---

*Preuve* :

Alors $X = PX' \quad Y = PY'$

$$\begin{aligned}\langle \, x \, | \, y \, \rangle &=^t XAY = t(PX')A(PY') =^t X'^t PAPY' \\ &=^t X'A'Y'\end{aligned}$$

Donc

$${}^t X'^t PAPY' =^t X'A'Y'$$

D'où

$${}^t PAP = A'$$

Note :

$$\forall X, X' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \left| \begin{array}{l} A' = Q^{-1}AP \\ A' = P^{-1}AP \\ A' =^t PAP \end{array}\right.$$

□

### Reconnaitre la matrice d'un produit scalaire

**Proposition**

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice d'un produit scalaire $\Leftrightarrow \exists Q \in GL_n(\mathbb{R}) \;/\; A =^t QQ$

---

# Chapitre 4

# Espaces vectoriels normés

## 4.1 Normes, suites dans un espace vectoriel normé

### 4.1.1 Norme sur un espace vectoriel

#### Définitions

**Définition**

On appelle norme sur $E$ toute application $N: E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. $\forall x \in E \qquad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. $\forall x, y \in E \qquad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Le couple $(E, N)$ s'appelle espace vectoriel normé et l'application $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ défini par

$$d(x,y) = N(y-x)$$

s'appelle distance associée.

---

**Définition**

– Pour $a \in E,\ r > 0$

$$B(a,r) = \{x, N(x-a) < r\}$$

s'appelle la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$.

– Pour $a \in E,\ r \geq 0$

$$B_f(a,r) = \{x, N(x-a) \geq r\}$$

s'appelle la boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$.

---

#### Exemples fondamentaux

*Exemples* :

1. $E$ $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de $E$ , $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. On pose

$$N_\infty(x) = \max(|x_i|, i \in [\![1,n]\!]) \quad \text{convergence uniforme}$$

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{convergence en moyenne}$$

$$N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \text{norme quadratique}$$

Il s'agit des trois normes usuelles sur $E$ et elles vérifient

$$\forall x \in E \qquad N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{n} N_2(x) \leq n N_\infty(x)$$

2. $E = C([a,b], \mathbb{K})$, pour $f \in E$ on pose :

$$N_\infty(x) = \sup(|f(x)|, x \in [a,b])$$
$$N_1(x) = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$$
$$N_2(x) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x}$$

Ces trois normes vérifient :

$$N_1(t) \leq \sqrt{b-a} N_2(t) \leq (b-a) N_\infty(t)$$

3. Norme de la convergence uniforme.
$(E, N)$ espace vectoriel normé.
Une partie $X$ de $E$ est dite bornée si $\exists r \geq 0 \;/\; x \subset B_f(0,r)$.
Pour $f : \; A \longrightarrow E$, on dit que $f$ est bornée si $f(A)$ bornée.
Si $B(A,E)$ désigne l'ensemble des applications bornées de $A$ dans $E$ alors $B(A,E)$ est un $\mathbb{K}$-ev et

$$\forall f \in B(A,E) \qquad N_\infty(f) = \sup\Big\{N\Big(f(x)\Big), x \in A\Big\}$$

définit une norme sur $B(A,E)$ appelée norme de la convergence uniforme.

### 4.1.2 Suite dans un espace vectoriel normé

**Convergence d'une suite**

**Définition**

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $E$ est convergente si :

$$\exists \ell \in E \;/\; \lim_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0$$

C'est à dire si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow N(u_n - \ell) < \varepsilon$$

---

*Remarques* :
– si $u$ converge, il y a unicité de la limite : on notera $\ell = \lim\limits_{+\infty} u_n$.

**Opération sur les suites**

**Proposition**

L'ensemble des suites convergentes de $(E, N)$ est un $\mathbb{K}$-ev. De plus :
– si $u$ est bornée, soit $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \lambda_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$\lambda_n u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

– si $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée alors

$$\lambda_n u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

### 4.1.3 Application lipschitzienne

**Définition**

**Application lipschitzienne**

$(E, N), (F, N')$ deux espaces vectoriels normés et $A$ partie de $E$. On dit que $f: A \to F$ est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, x') \in A^2 \qquad N'\Big(f(x) - f'(x')\Big) \leq kN(x - x')$$

*Exemples* :

1. soit $N: E \to \mathbb{R}_+$, alors $N$ est 1-lipschitzienne de $(E, N)$ dans $(\mathbb{R}, N)$.
2. soit $f \in C'([a, b], \mathbb{K})$, l'inégalité des accroissements finis nous dit que :

$$\forall x, x' \in [a, b] \qquad |f(x) - f(x')| le \|f'\|_\infty |x - x'|$$

*Remarques* :
– Opérations : toute combinaison linéaire et toute composée d'applications lipschitzienne sont lipschitziennes.

### 4.1.4 Comparaison de normes

**Proposition**

$E$ $\mathbb{K}$-ev muni de deux normes $N$ et $N'$, il y a équivalence entre :

1. $\exists \alpha > 0$ tel que $N' \leq \alpha N$
   (c'est à dire $\forall x \in E \quad N'(x) \leq \alpha N(x)$).
2. Toute suite convergeant vers 0 pour $N$ converge vers 0 pour $N'$.

*Remarques* :
– $N$ et $N'$ sont équivalents si et seulement si les evn $(E, N)$ et $(E, N')$ possèdent les même suites convergentes.

*Exemples* :

Les trois normes usuelles sur $C([a, b], \mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes, en revanche, les trois normes usuelles d'un ev de dimension finie sont équivalentes.

**Théorème**

Toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie.

## 4.2 Espace vectoriel normé de dimension finie

Dans toute la suite, $E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $p \leq 1$. Toutes les propriétés qui suivent sont indépendantes du choix de la norme sur $E$.

### 4.2.1 Suites

**Suites composantes**

**Théorème**

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_{n,1}, \ldots, u_{n,p})$ désignent les composantes de $u_n$ et $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ celles de $\ell$ alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!] \quad (u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell_k$$

**Comparaison de suites**

**Définition**

$\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $u \in E^{\mathbb{N}}$, $N$ norme quelconque sur $E$.
– $u_n = O(\alpha_n)$ si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \;/\; \forall n \qquad N(u_n) \leq M|\alpha_n|$$

– $u_n = o(\alpha_n)$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow N(u_n) \leq \varepsilon|\alpha_n|$$

– $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sont dites équivalentes si et seulement si :

$$u_n - v_n = o(v_n)$$

On notera $u_n \sim v_n$.

---

### 4.2.2 Parties ouvertes, fermées

**Définition**

On dit qu'une partie $O$ de $E$ est ouverte si tout élément de $O$ est centre d'une boule ouverte contenue dans $O$.

On appelle partie fermée de $E$ toute partie dont le complémentaire est une partie ouverte.

---

*Remarques* :
– $\{0\}$ est une partie ouverte.

*Exemples* :

Tout boule ouverte est une partie ouverte et tout singleton est une partie fermée.

**Proposition**

La famille des parties ouvertes de $E$ est stable par réunion quelconque et par intersection finie. Au contraire, la famille des parties fermées est stable par réunion finie et par intersection quelconque.

---

**Théorème**

Une partie $F$ de $E$ est fermée si et seulement si toute suite $u$ convergente d'éléments de $F$ a sa limite dans $F$.

---

**Définition**

**Point adhérent**

On dit que $a \in E$ est un point adhérent à la partie non vide de $A$ si toute boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r > 0$ rencontre $A$.

---

*Exemples* :

$a$ point adhérent à $A \Leftrightarrow \exists u \in A^{\mathbb{N}} \not a = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

### 4.2.3 Limite

**Définitions**

**Définition**

$(E, N), (F, N')$ deux evn, $A$ partie de $E$, $a$ point adhérent à $A$ et $f : A \to F$.

On dit que $f$ admet une limite en $a$ s'il existe $b \in F$ vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad N(x - a) < \eta \Rightarrow N'(f(x) - b) < \varepsilon$$

Notation : $b = \lim\limits_{a} f$

**Lien avec les fonctions composantes**

**Théorème**

Lien avec les fonctions composantes.

Si on désigne par $f_1, \dots, f_q$ les composants de $f : A \to F$ dans une base $B_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $F$.

$f$ admet une limite en $a$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, q]\!]$ $f_k$ admet une limite en $a$.

Si tel est le cas :

$$\lim_{a} f = \sum_{k=1}^{q} \left( \lim_{a} f_k \right) \varepsilon_k$$

**Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite**

**Théorème**

$f$ admet une limite en $a$ adhérent à $A$ si et seulement si l'image par $f$ de toute suite d'éléments de $A$ convergeant vers $a$ est une suite convergente.

**Proposition**

Opérations :

- l'ensemble des applications de $A$ dans $F$ admettant une limite en $a$ adhérent à $A$ est un $\mathbb{K}$-ev et $f \longmapsto \lim\limits_{a} f$ est linéaire.
- si $A \subset E, B \subset F$, $a$ point adhérent à $A$, $f$ application de $A$ dans $B$ ayant $b$ pour limite en $a$, alors $b$ est adhérent à $B$ et, si $g$, application de $B$ dans $G$, a pour limite $c$ en $b$, $g \circ f$ a pour limite $c$ en $a$.

**Comparaison de fonctions au voisinage d'un point adhérent**

**Définition**

$a$ adhérent à $A \subset E$, $f : A \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{R} \;/\; \varphi(x) \neq 0$ si $x \in A \setminus \{a\}$, $N'$ norme sur $F$.

On dit que $f$ est dominée par $\varphi$ en $a$ (notation : $f =_a O(\varphi)$) si et seulement si $\dfrac{f}{\varphi}$ bornée au voisinage de $a$, c'est à dire :

$$\exists r, M > 0 \quad \forall x \in B(a,r) \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow N'\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) \leq M$$

On dit que $f$ est négligeable devant $\varphi$ (notation : $f =_a o(\varphi)$) si et seulement si $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\to} 0$

### 4.2.4 Continuité

**Définition**

Soit $a \in A$, on dit que $f$ est continue en $a$ si $f$ admet une limite en $a$ et dans ce cas, nécessairement, $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

*Remarques* :
- si $f$ a pour application coordonnée $(f_1, \ldots, f_q)$ :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, q]\!] \quad f_k \text{ continue en } a$$

- $f$ continue en $a \Leftrightarrow$ l'image par $f$ de toute suie convergente ves $a$ d'éléments de $A$ est une suite convergente.

**Définition**

Si $B \subset A$ alors on dit que $f$ est continue sur $B$ si elle est continue en tout point de $B$. De même, si $f$ est continue sur $A$, on dit que $f$ est continue.

Notation : $C(A, F)$ l'ensemble des applications continues.

**Proposition**

- $C(A, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev ;
- $C(A, \mathbb{K}) = C(A)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
  Conséquence : si on note $(x_1, \ldots, x_p)$ les coordonnées de $x \in E$ relativement à une base de $E$, toute application polynomiale en $x_k$ est continue.
- $f \in C(A, B)$ avec $B \subset F$ et $g \in C(B, G)$, $G$ evn de dimension finie, alors $g \circ f$ est continue.

### 4.2.5 Compacité

**Définition**

Une partie de $K$ de E est dite compacte si elle est fermée et bornée.

*Exemples* :

$[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, la sphère limite : $\{x \in E, N(x) = 1\}$ est une partie compacte de $E$.

**Théorème**

**Image d'une partie compacte**

Soit $f \in C(A, f)$, alors $f(K)$ est une partie compacte de $F$ lorsque $K \subset A$ est une partie compacte.

Cas particulier des fonctions à valeurs réelles, c'est à dire $F = \mathbb{R}$, alors $f$ est bornée sur $K$ et atteint ses bornes.

## 4.3 Continuité des applications linéaires en dimension finie

### 4.3.1 Caractérisation des applications linéaires continues

**Théorème**

$(E, N), (F, N')$ deux ev de dimension quelconque et
$u \in \mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

1. $u$ continue en $0$ ;
2. $u$ continue sur E ;
3. $u$ lipschitzienne ;
4. $\exists M \in \mathbb{R}_+ \diagup \forall x \in E \Rightarrow N'\Big(u(x)\Big) \leq MN(x)$.

En particulier si $E$ est de dimension finie, ces quatre propriétés sont vérifiées.

*Exemples* :

$$\begin{aligned} E\times E &\longrightarrow E \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u,v) &\longmapsto u+v \end{aligned}$$

sont continues lorsque $\dim E < +\infty$.

**Proposition**

Norme subordonnée d'une application linéaire continue.

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue, alors :

$$\sup\left(\frac{N'\Big(u(x)\Big)}{N(x)},\ x \in E\setminus\{0\}\right) = \sup\Big(N'\Big(u(x)\Big), x\in E, N(x)\leq 1\Big)$$

On notera $|||u|||$ l'un de ces réels positifs ($\forall x \in E$
$N'\Big(u(x)\Big) \leq |||u|||N(x)$).

L'application

$$\begin{aligned} |||\cdot|||:\ \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longmapsto |||u||| \end{aligned}$$

est une norme et elle vérifie :

$$u\in\mathcal{L}(E,F), v\in\mathcal{L}(F,G) \qquad |||v\circ u||| \leq |||v|||\ \ |||u|||$$

### 4.3.2 Cas des applications bilinéaires

**Théorème**

$(E,N),(F,N')$ ev de dimension finie et $B:\ E\times F\to G$ bilinéaire, $(G,N'')$ evn de dimension quelconque, alors $B$ est continue sur $E\times F$ et il existe $M\in\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall x\in E\quad \forall y\in F \qquad N''\Big(B(x,y)\Big) \leq MN(x)N'(y)$$

*Exemples* :

Si $\dim E$ est finie.

$$\begin{aligned} (\mathbb{K},E) &\longrightarrow E \\ (\lambda,x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u,v) &\longmapsto u\circ v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E\times\mathcal{L}(E) &\longrightarrow E \\ (x,u) &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

sont continues.

De plus, si $E$ euclidien

$$\begin{aligned} E\times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \langle\, x\,|\,y\,\rangle \end{aligned}$$

est continue.

# Chapitre 5

# Fonctions vectorielles d'une variable réelle

$f : I \subset \mathbb{R} \to E$, $\dim E < +\infty$, $I$ intervalle non réduit à un point, $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de $E$

$$\forall t \in I \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

$f_i$ les fonctions composantes de $f$.

## 5.1 Compléments sur les limites et la continuité

### 5.1.1 Cas des fonctions numériques d'une variable réelle

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

**Définition**

Soit $a$ point adhérent à $I$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \\ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \\ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \\ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| > A$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \quad \forall x \in I \\ x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

---

**Propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$**

**Définition**

- $f : I \to \mathbb{R}_+^{(*)}$, si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\ell \geq 0$ ;
- $f, g : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$, si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

---

**Théorème**

**Théorème des fonctions encadrantes**

$$f, g, h : I \to \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$ alors $g$ admet une limite en $a$ et

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

---

**Propriétés liées à la monotonie de $f$**

**Théorème**

**Théorème de la limite monotone**

Toute fonction monotone sur un intervalle $I$ admet une limite à droite et à gauche de tout point de $I$ autre qu'une extrémité.

---

*Remarques* :
– $f : I \to \mathbb{R}$ avec $f$ croissante. Soit $x_0 \in I$, alors

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

**Corollaire**

Toute fonction monotone admet une limite finie ou infinie aux extrémités de son intervalle de définition.

---

*Exemples* :

$f : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ avec $f$ croissante.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow f \text{ majorée}$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell' \Leftrightarrow f \text{ minorée}$$

**Théorème des valeurs intermédiaires**

**Théorème**

**Théorème des valeurs intermédiaires**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

---

*Remarques* :

– $f \in C(I, \mathbb{R})$, alors

$$\forall y, z \in f(I) \quad y < z \quad \forall t \in [y, z] \quad \exists x \in I \qquad f(x) = t$$

– $f : I \to \mathbb{R}$ continue, soient $a, b \in I \;/\; f(a)f(b) \leq 0$, alors

$$\exists c \in [a, b] \;/\; f(x) = 0$$

**Théorème**

**Théorème de la bijection**

Toute fonction continue strictement monotone d'un intervalle $I$ sur l'intervalle $I = f(I)$ réalise une bijection bicontinue de $I$ sur $f(I)$.

**Théorème de Heine**

**Théorème**

**Théorème de Heine**

$f \in C\Big([a, b], \mathbb{R}\Big)$ alors

$$f\Big([a, b]\Big) = [m, M]$$

C'est à dire

$$\exists c, d \in [a, b] \qquad f(c) = m = \inf_{[a,b]} f \qquad f(d) = M = \sup_{[a,b]} f$$

Et de plus $f$ est uniformément continue sur $[a, b]$, C'est à dire $f$ vérifie

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, x' \in [a, b] \qquad |x - x'| < \alpha$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x') < \varepsilon$$

### 5.1.2 Fonction vectorielle

**Vocabulaire**

**Définition**

**Fonction continue par morceaux**

$f : [a, b] \to E$ $(\dim E < +\infty)$.

On dit que $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{c_0, \ldots, c_p\}$, $c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{p-1} < c_p = b$ telle que $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$ $\quad f_{|]c_i, c_{i+1}}$ continue sur $]c_i, c_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[c_i, c_{i+1}]$.

Plus généralement, $f : I \to E$, on dit que $f$ est continue par morceaux sur $I$ si $\forall J \subset I$, $f_{|J}$ est continue par morceaux sur $J$.

---

*Exemples* :

1. $x \longmapsto E(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. $$f : x \longmapsto \begin{cases} \sin 1/x & x \in ]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   $f$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$.

**Définition**

**Fonction en escalier**

$f : [a, b] \to E$, on dit que $f$ est en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_p\}$ telle que $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{p-1} < x_p)b$ et $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$ $F_{|]c_i,c_{i+1}[}$ est une application constante.

$f : I \to E$, on dit que $f$ est en escalier sur $I$ s'il existe $J$ un segment inclus dans $I$ tel que $f_{|J}$ soit en escalier sur $J$ et $f$ nulle à l'extérieur de $J$.

---

*Remarques* :
- $x \to E(x)$ n'est pas en escalier sur $\mathbb{R}$.
- Notation : $\mathcal{E}(I, E)$, ensemble des fonctions en escalier de $I$ à valeur dans $E$. C'est un sev de $C_m(I, E)$.

### 5.1.3 Approximations de fonctions

**Définition**

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$, et $\mathcal{A}$ un sous ensemble on vide de $\mathcal{F}(I, E)$.

On dit que $f$ peut être approximée uniformément sur $I$ par des fonctions de $\mathcal{A}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in \mathcal{A} \diagup N_\infty(f - g) < \varepsilon$$

(ce qui suppose $f - g$ bornée, $N$ norme sur $E$, $N_\infty(f - g) = \sup\{N\Big(f(x) - g(x)\Big), x \in I\}$)

---

**Théorème**

Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ peut être approximée uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier.

---

*Preuve* :

On se limite au cas $E = \mathbb{R}$.

1. $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, par le théorème de Heine, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, x' \in [a,b] \qquad |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x') < \varepsilon$$

   $\forall p \in \mathbb{N}^*$, posons pour $k \in [\![0,p]\!]$ $\quad c_k = a + k\,\dfrac{b-a}{p}$

   Choisissons $p_0$ tel que $\dfrac{b-a}{p_0} < \alpha$

   Pour $p \geq p_0$, posons

$$\begin{aligned} \varphi_p :\ & [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \varphi_p(x) = \begin{cases} f(c_k) & x \in [c_k, c_{k+1}[\ (k \in [\![0, p-1]\!]) \\ f(b) & x = b \end{cases} \end{aligned}$$

   $\varphi_p \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ $\forall x \in [a,b]$ :
   – si $x = b$, $f(b) - \varphi_p(b) = 0$
   – si $x \in [c_k, c_{k+1}[$

$$f(x) - \varphi_p(x) = |f(x) - f(c_k)| < \varepsilon$$

$$|x - c_k| < c_{k+1} - c_k = \frac{b-a}{p} \leq \frac{b-a}{p_0} < \alpha$$

   donc $\|f - \varphi_p\|_\infty < \varepsilon$

2. $f \in C_m([a,b],\mathbb{R})$
   Soit $\sigma = \{\underbrace{d_0}_{=a}, d_1, \ldots, \underbrace{d_p}_{=b}\}$ subdivision adaptée à $f$.
   $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$ $\quad f_{|]c_i,c_{i+1}[}$ prolongeable par continuité sur $[c_i, c_{i+1}]$ en $g_i \in C([a,b],\mathbb{R})$.
   On applique à $g_i$ la $1^{\text{re}}$étape :

$$\exists \psi_i \in \mathcal{E}([c_i, c_{i+1}],\mathbb{R}) \ /\ \|g_i - \psi_i\|_\infty < \varepsilon$$

   Posons

$$\varphi :\ [a,b] \to \mathbb{R} \quad x \to \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & x \in [c_i, c_{i+1}] \\ f(b) & x = b \end{cases}$$

   $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\|f - \varphi\|_{\underset{[a,b]}{\infty}} < \varepsilon$

□

**Théorème**

**Théorème de Weierstrass**

Toute fonction numérique continue sur le segment $[a,b]$ peut être approximée uniformément sur $[a,b]$ pour des fonctions polynomiales.

*Exemples* :

$f \in C([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Remarque : si f est polynomiale alors $f = 0$

En effet, si $f \neq 0$ : $f(t) = a_p t^p + \cdots + a_1 t + a_0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)^2 \mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t) \cdot \sum_{k=0}^{p} a_k t^k \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k \int_0^1 t^k f(t) \mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

$$\int_0^1 f(t)^2 = 0 \underset{\text{continuité}}{\Longrightarrow} f = 0$$

**Théorème**

**Théorème de Weierstrass trigonométrique**

Toute fonction continue, T-périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, peut être approximée uniformément par des polynômes trigonométriques, c'est à dire par des applications du type :

$$P_n \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k \,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{T}\, t}$$

## 5.2 Dérivation des fonctions vectorielles

$f : I \subset \mathbb{R} \to E$, ev de dimension finie

### 5.2.1 Définition

**Définition**

$a \in I$ et $f : I \to E$.

On dit que $f$ est dérivable en $a$ si

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

admet une limite quand $t$ tend vers $a$.

Cette limite sera notée $f'(a) = Df(a)$.

Ceci revient à dire que $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$.

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + o(t-a)$$

---

*Remarques* :
- $f$ dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en $a$.
- $f$ dérivable en $a \Leftrightarrow$ toutes les composantes $f_i$ de $f$ dérivables en $a$.
  En outre
  $$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a)e_i$$
  Si $E = \mathbb{C}$
  $$f = \Re(f) + i\Im(f)$$
  $f$ dérivable en $a \Leftrightarrow \Re(f)$ et $\Im(f)$ dérivables en $a$.
  $$\Big(\Re(f)\Big)'(a) = \Re(f'(a)) \qquad \Big(\Im(f)\Big)'(a) = \Im(f'(a))$$

**Définition**

Soit $f :\ I \to E$ et on suppose que $J = I \cap [a, +\infty[$ non réduit à un point.

On dit que $f$ est dérivable à droite en $a$ si et seulement si $f_{|J}$ est dérivable en $a$, ce qui impose la continuité à droite de $f$ en $a$.

Notation : $f_d'(a)$

---

*Remarques* :
- Soit $a$ point intérieur à $I$.
  $f$ dérivable en $a \Leftrightarrow f$ dérivable à droite et à gauche en $a$ et $f_d'(a) = f_g'(a)$.
- $D(I, E)$ ensemble des applications dérivables en tout point de $I$.

### 5.2.2 Opérations

**Proposition**

L'ensemble des fonctions dérivables est stable par combinaison linéaire. En outre, $f \longmapsto Df$ est linéaire.

---

**Proposition**

Composition par une application linéaire : soient $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ dérivable, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ($\dim E, \dim F < +\infty$) alors $u \circ f : I \to F$ est dérivable et

$$\forall a \in I, D(u \circ f)(a) = u(Df(a))$$

---

*Preuve* :

$$\frac{u \circ f(t) - u \circ f(a)}{t - a} \underset{u \text{ linéaire}}{=} \frac{u\Big(f(t) - f(a)\Big)}{t - a} \xrightarrow[\substack{t \to a \\ u \text{ continue}}]{} u\Big(Df(a)\Big)$$

□

**Proposition**

Produit : $f : I \to F$, $g : I \to G$, dérivables sur $I$, $B : F \times G \to E$ bilinéaire, $E, F, G$ de dimensions finies. Soit

$$\begin{aligned} h = B(f, g) : \ & I \longrightarrow E \\ & x \longmapsto h(x) = B(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Alors $h$ est dérivable et

$$h'(x) = B(f'(x), g(x)) + B(f(x), g'(x))$$

---

*Exemples* :

– si $E$ ev euclidien de dimension 3, $f, g : I \to E$ dérivables, alors

$$\begin{aligned} \langle f \mid g \rangle' (x) &= \langle f'(x) \mid g(x) \rangle + \langle f(x) \mid g'(x) \rangle \\ (f \wedge g)'(x) &= f'(x) \wedge g(x) + f(x) \wedge g'(x) \end{aligned}$$

– Plus généralement :

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

On dérive chaque colonne sans toucher aux autres et on somme les déterminants ainsi obtenus :

$$f'(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & x & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$+ \cdots + \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \cdots & x & x \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \cdots & \frac{x^2}{2!} & 1 \end{vmatrix}$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_n'(x) & = & f_{n-1}(x) \\ f_n(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_n''(x) & = & f_{n-2}(x) \\ f_n(0) & = & 0 \\ f_{n-1}'(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$f_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \qquad f_3(x) = \frac{x^3}{3!}$$

On a donc

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

**Proposition**

Composition : soient $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$, $g : J \to E$, et $f$ dérivable en $a \in I$ et $g$ en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en $a$ et

$$(g \circ f)'(a) = g'\Big(f(a)\Big) \cdot f'(a)$$

*Remarques* :
– $f$ paire $\Rightarrow f'$ impaire ;
– $f$ impaire $\Rightarrow f'$ paire ;
– $f$ T-périodique $\Rightarrow f'$ T-périodique.

### 5.2.3 Dérivées successives

**Définition**

**Dérivées successives**

$f : I \to E$. On définit les dérivées successives par réccurence : $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ si et seulement si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur $I$, $n \geq 1$.

En outre
$$\left(f^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}$$

---

*Remarques* :
- $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = (f')^{(n-1)}$
- On note $E = C^n(I, E)$ ev des fonctions de classe $C^n$ sur $I$

**Définition**

On dit que $f$ est de classe $C^k$ $(k \geq 1)$ sur $I$ si $f$ est $k$ fois dérivable sur $I$ et si $f^{(k)}$ est continu sur $I$.

---

*Exemples* :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Alors $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(a) = 1/2$.

Dérivabilité en 0 :

$$\frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \sim \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

**Définition**

Généralisation : on appelle application de classe $C^n$ par morceaux de $I$ à valeurs dans $E$.
- 1$^{\text{er}}$cas : si $I = [a, b] \;/\; \exists \sigma = (c_0, \ldots, c_p)$ de $[a, b]$ et $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_p = b$ et $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $f_{|]c_i, c_{i+1}[}$ prolongeable à $[c_i, c_{i+1}[$ en une application de classe $C^n$.
- 2$^{\text{e}}$cas : si $I$ est un intervalle quelconque, si $\forall J \subset I$ un segment, $f_{|J}$ est $C^n$ par morceaux.

On notera $E = C^n_m(I, E)$ l'ev des fonctions de classe $C^n$ par morceaux sur I.

---

*Exemples* :

$f : x \longmapsto \arcsin(\sin x)$ est $C^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\arcsin \in C^\infty(]-1,1[,\mathbb{R})$
– $2\pi$-périodique
– Symétrie par rapport à $O$

$$f(-x) = \arcsin(-\sin x) = f(x)$$

– Symétrie par rapport à $x = \pi/2$

$$\arcsin(\sin(\pi - x)) = \arcsin(\sin x)$$

**Proposition**

Formulaire :
– $D^n(\exp)(x) = \exp(x)$
– $D^{2n}(\mathrm{ch})(x) = \mathrm{ch}(x)$
– $D^{2n+1}(\mathrm{ch})(x) = \mathrm{sh}(x)$
– $D^n(\cos)(x) = \cos(x + n\pi/2)$
– $D^n(\sin)(x) = \sin(x + n\pi/2)$
–
$$D^n[(x-a)^p] = \begin{cases} \dfrac{p\,!}{(p-n)!}(x-a)^{p-n} & p \geq n \\ 0 & p < n \end{cases}$$
–
$$D^n\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

**Proposition**

Produit de deux applications de classe $C^k$ :

$f, g : I \to \mathbb{K}$ n fois dérivables sur $I$.

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad f^{(0)} = f$$

Plus généralement : soient $f : I \to F$, $g : I \to G$ n fois dérivables sur $I$, $B : F \times G \to E$ bilinéaire, alors $h = B(f,g)$ n fois dérivable sur $I$. En outre

$$D^n\Big(B(f,g)\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\Big(f^{(k)} g^{(n-k)}\Big)$$

**Proposition**

$f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$, $g : J \to E$, n fois dérivables sur $I$, alors $g \circ f$ n fois dérivable sur $I$.

### 5.2.4 Difféomorphisme

**Théorème**

$I, J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f$ continue, strictement monotone, dérivable sur $I$ à valeurs dans $J = f(I)$. Alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(a) \in J$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. En outre

$$(f^{-1})'\Big(f(a)\Big) = \frac{1}{f'(a)}$$

---

**Définition**

On appelle $C^n$-difféomorphisme de l'intervalle $I$ sur l'intervalle $J$ toute application bijective de classe $C^n$ sur $I$ et telle que son application soit de classe $C^n$ sur $J$.

---

**Proposition**

Caractérisation :

$f$ un homéomorphisme de $I$ sur $J$.

$f$ $C^n$-difféomorphisme de $I$ sur $J \Leftrightarrow f$ est de classe $C^n$ sur $I$ et $\forall x \in I \quad f'(x) \neq 0$.

---

## 5.3 Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment

### 5.3.1 Définition

**Définition**

$E$ $\mathbb{R}$-ev de dimension $p$, $B = (e_1, \dots, e_p), B' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de $E$, $f \in C_m([a,b], E)$, $(f_1, \dots, f_p), (g_1, \dots, g_p)$ les composantes de $f$ relativement à $B$ et de $g$ relativement à $B'$.

Alors

$$\sum_{i=1}^{p} \left( \int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i = \sum_{j=1}^{p} \left( \int_a^b g_i(t)\mathrm{d}t \right) e'_j$$

Par définition, on posera

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{p} \left( \int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i$$

---

*Preuve* :

$P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ matrice de passage de $B$ à $B'$.

Formule de changement de base : $X = PX'$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$$

donc

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad f_i = \sum_{j=1}^{p} p_{ij} g_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} = \sum_{i=1}^{p} \left( \int_a^b \sum_{j=1}^{p} p_{ij} g_j(t) \mathrm{d}t \right) e_i &= \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{j=1}^{p} p_{ij} \int_a^b g_j(t) \mathrm{d}t \right) e_i \\ = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} p_{ij} \int_a^b g_j(t) \mathrm{d}t \; e_i &= \sum_{j=1}^{p} \left( \sum_{i=1}^{p} p_{ij} \int_a^b g_j(t) \mathrm{d}t \; e_i \right) \\ = \sum_{j=1}^{p} \left( \int_a^b g_j(t) \mathrm{d}t \right) \sum_{i=1}^{p} p_{ij} e_i &= \sum_{j=1}^{p} \int_a^b g_j(t) \mathrm{d}t \; e'_j \end{aligned}$$

□

Cas particulier : $f \in C_m([a,b], \mathbb{C})$, $f = \Re(f) + i\Im(f)$

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}t = \int_a^b \Re\Big(f(t)\Big) \mathrm{d}t + i \int_a^b \Im\Big(f(t)\Big) \mathrm{d}t$$

$$\overline{\int_a^b f(t) \mathrm{d}t} = \int_a^b \overline{f(t)} \mathrm{d}t$$

### 5.3.2 Propriétés de l'intégrale

**Linéarité de l'intégrale**

**Proposition**

L'application $C_m([a,b], E) \to E, f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$ est une application linéaire :

$$\forall f, g \in C_m([a,b], E) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$
$$\int_a^b \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big) = \lambda \int_a^b f(t) + \int_a^b g(t) \mathrm{d}t$$

**Relation de Chasles**

**Proposition**

Soient $f \in C_m(I,E)$, $I$ un intervalle, $a,b,c \in I$, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

**Image d'une intégrale par une application linéaire**

**Proposition**

Soit $f \in C_m([a,b],E)$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec $E,F$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$u\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \Big(f(t)\Big)\mathrm{d}t$$

*Preuve* :

Soient $B_E = (e_1, \ldots, e_p), B_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$ bases de E et F.

$$f = \sum_{j=1}^p f_j e_j$$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ définie par $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = (m_{ij})_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le i \le q}}$

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^p \left(\int_a^b f_j\right) e_j$$

$$u(e_j) = m_{ij}e'_1 + \cdots + m_{qj}e'_q$$

$$\begin{aligned}
u\left(\int_a^b f\right) &= u\left[\sum_{j=1}^p \left(\int_a^b f_j\right) e_j\right] = \sum_{j=1}^p \left(\int_a^b f(j)\right) \sum_{i=1}^q m_{ij}e'_i \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q \left(\int_a^b f_i\right) m_{ij}\, e'_i = \sum_{i=1}^q \left[\sum_{j=1}^p \left(\int_a^b f_j\right) m_{ij}\right] e'_i \\
&= \sum_{i=1}^q \int_a^b \underbrace{\left(\sum_{j=1}^p f_j m_{ij}\right)}_{=u(f)_i} e'_i = \int_a^b u(f)
\end{aligned}$$

□

**Inégalité de la moyenne**

Rappel : $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ $\qquad \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \leq (b-a)\|f\|_\infty$

**Proposition**

Soient $f \in C_m([a,b],E)$, et $N$ une norme sur $E$. Alors

$$\begin{aligned} N\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) &\leq \int_a^b N\Big(f(t)\Big)\mathrm{d}t \\ &\leq (b-a)\sup\Big(N\Big(f(t)\Big), t \in [a,b]\Big) \end{aligned}$$

---

## 5.4 Intégration et dérivation

### 5.4.1 Primitives et intégrale d'une fonction continue

**Théorème fondamental**

**Définition**

Soit $f \in C(I,E)$, on appelle primitive de $f$ sur $I$ toute application $F : I \to E$ dérivable sur $I$ et vérifiant

$$F' = f \Longleftrightarrow \forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

---

**Proposition**

Deux primitives d'une même application (sur un intervalle $I$) diffèrent d'une constante.

---

*Preuve* :

Soient $F_1, F_2$ deux primitives de $f$, alors

$$F_1' = F_2' = f \Rightarrow F_1' - F_2' = 0 \Leftrightarrow (F_1 - F_2)' = 0$$

$\Rightarrow F_1 - F_2 = cste$ sur $I$.

$\square$

**Définition**

**Théorème fondamental de l'intégration**

Soient $f \in C(I,E)$, $a \in I$.

L'application $I \to E, x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.

En outre, pour toute primitive $F$ de $f$ sur $I$ :

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

---

*Preuve* :

On s'intéresse à l'intégrale fonction de sa borne supérieure. Posons

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

– $1^{\text{re}}$ étape : $N$ norme sur $E$ et $x, x' \in I$

$$\begin{aligned} N\Big(F(x) - F(x')\Big) &= N\left(\int_a^x f - \int_a^{x'} f\right) = N\left(\int_{x'}^x f\right) \\ &\leq \left|\int_{x'}^x N(f)\right| \leq \sup\Big(N\Big(f(t)\Big), t \in J\Big)\,|x - x'| \end{aligned}$$

  $[x, x'] \in J \subset I$

  Sur tout segment $J \subset I$, $N\Big(F(x) - F'(x)\Big) \leq N_\infty(f_{|J})|x - x'|$, donc $F$ est lipschitzienne, et a fortiori continue.

– $2^{\text{e}}$ étape : on s'intéresse à la dérivabilité en $x_0 \in I$.

  On suppose que $f$ est continue à droite en $x_0$. On va montrer $F'(x_0) = f(x_0)$.

  Formons

$$\begin{aligned} A(h) &= N\Big(F(x_0 + h) - F(x_0) - hf(x_0)\Big) \\ &= N\left(\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\mathrm{d}t\right) \\ &= N\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \ - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\mathrm{d}t\right) \\ &= N\left(\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(t) - f(x_0)\Big)\mathrm{d}t\right) \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} N\Big(f(t) - f(x_0)\Big)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition**

$$F(x) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \qquad F(x) = 0$$

Soit $h$ une autre primitive de $f$ sur $I$, alors

$$\exists C = cste \in E \ / \ F - h = C$$

Si de plus $h(a) = 0 \Rightarrow F(a) - h(a) = C = 0 \Leftrightarrow F = h$.

Plus généralement, soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$, de même $F - F(a)$ est aussi une primitive de $f$ qui s'annule en $a$, donc $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

$$\forall a, b \in I \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

---

**Proposition**

Conséquences :

- $f \in C^1(I, E)$, alors

$$\forall a, x \in I \qquad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

- $f \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

  Ou si $f$ non identiquement nulle, $\displaystyle\int_a^b > 0$.
- si $f \in C(\mathbb{R}, E)$ avec $f$ $T$-périodique ($T > 0$), alors $f$ admet des primitives $T$-périodiques

$$\Leftrightarrow \int_0^T f = 0$$

- $f \in C(I, E), a \in I, u : J \to I$ dérivable sur $J$, alors l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $J$ et sa dérivée vaut $u'(x)f\Big(u(x)\Big)$.

---

**Méthodes de calcul intégral**

**Théorème**

**Changement de variable**

Soient $f \in C(I, E)$, $\varphi \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \ / \ \varphi[\alpha, \beta] \subset I$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

**Théorème**

**Intégration par parties**

Soient $f \in C^1(I, \mathbb{K}), g \in C^1(I, E)$, alors $\forall a, b \in I$, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

### 5.4.2 Brève extension au cas des fonctions continues par morceaux

**Définition**

Soit $f \in C_m(I, E)$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ toute application $F$ continue de $I$ à valeurs dans $E$, $C^1$ par morceaux sur $I$, telle que $\forall x \in I$ pour lequel $f$ est continue

$$F'(x) = f(x)$$

**Proposition**

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ne diffèrent que d'une constante.

*Preuve* :

Soient $I = [a, b]$, $\sigma = \{a = c_0, c_1, \ldots, c_p = b\}$, subdivision adaptée à $f$, et sur $]c_i, c_{i+1}[$, g,h, deux primitives

$$g' - h' = 0 \Rightarrow g - h = \lambda_i = cste$$

$$f \in C(I, E) \quad x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)$$

$h$ primitive quelconque de $f$

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = h(x) - h(a)$$

$$\lim_{x \to c_i^+} (g - h)(x) = g(c_i) - h(c_i) = \lambda_i$$

$$\lim_{x \to c_i^-} (g - h)(x) = g(c_i) - h(c_i) = \lambda_{i-1}$$

□

Le théorème fondamental reste vrai, c'est à dire, soient $f \in C_m(I, E)$, $h$ primitive de $f$ sur $I$, on a :

$$\forall a, b \in I \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = h(b) - h(a)$$

**Proposition**

Si $f$ est continue sur $I$ et de classe $C^1$ par morceaux sur $I$, alors $f$ est une primitive de $f'$ sur $I$

$$\Rightarrow \forall a, b \in I \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$$

---

**Proposition**

Changement de variable :

Soit $\in C^1([\alpha, \beta], I)$ strictement monotone et $f \in C_m(I, E)$, alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

---

**Théorème**

**Intégration par parties**

Soient $f \in C^1_m(I, \mathbb{K})$, $g \in C_m(I, E)$, avec $f, g$ continues sur $I$, alors

$$\int_a^b f'(x)g(a)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) \int_a^b f(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

---

### 5.4.3 Théorème des accroissements finis

#### Rappel sur le cas réel

**Théorème**

**Théorème de Rolle**

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ et dérivable sur $]a, b[$, vérifiant $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in ]a, b[ \ \diagup \ f'(c) = 0$$

---

*Remarques* :
- $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = \mathrm{e}^{ix}$
  On a $f(0) = f(2\pi) = 1,\ f'(x) = i^{ix}$

$$\forall x \in ]0, 2\pi[ \quad |f'(c)| = 1 \neq 0$$

**Théorème**

**Théorème des accroissements finis**

Soit $f \in ([a, b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in ]a, b[ \ / \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

---

*Preuve* :

On applique Rolle à une fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x) = f(x) - f(a) - M(x - a) \end{aligned}$$

Avec $M$ tel que $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$, c'est à dire

$$M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\begin{aligned} \exists c \in ]a, b[ \ / \ \varphi'(c) = 0 \quad f'(x) - M \\ f'(c) = M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

□

**Cas des fonctions vectorielles**

**Théorème**

**Inégalité des accroissements finis**

Soit $f \in C([a, b], E)$ tel que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall t \in ]a, b[ \quad N\Big(f'(t)\Big) \leq \lambda$$

Soit $N$ une norme, alors

$$N\Big(f(b) - f(a)\Big) \leq (b - a)\lambda$$

---

*Preuve* :

$$\forall x, y \in ]a, b[ \quad x < y$$
$$f(x) - f(y) = \int_x^y f'(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow N\Big(f(x) - f(y)\Big) \leq \int_x^y N\Big(f'(t)\Big)\mathrm{d}t \leq \lambda(y - x)$$
$$\xrightarrow[x\to b, y\to a]{} N\Big(f(b) - f(a)\Big) \leq (b - a) \sup_{t\in[a,b]} N\Big(f'(t)\Big)$$

□

**Théorème de prolongement des applications de classe $C^1$**

**Théorème**

Soient $f \in C([a, b], E)$. On suppose de plus que $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in E$.

Alors l'application $f$ est de classe $C^1$ sur $[a, b]$ avec $f'(a) = \ell$.

*Exemples* :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$f$ continue sur $\mathbb{R}$, et de plus $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
$f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x x - (\,\mathrm{e}^x - 1)}{x^2} \\ &= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

### 5.4.4 Formules de Taylor

**Taylor avec reste intégral**

**Théorème**

**Formule de Taylor avec reste intégral**

Soient $f \in C^n(I, E)$, $f \in C_m^{n+1}(I, E)$ et $a \in I$, alors

$$\forall x \in I \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

avec

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

---

**Corollaire**

**Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soient $f \in C^{n+1}([a, b], E)$, $N$ norme sur $E$, alors

$$\begin{aligned} N&\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) \\ &\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} \Big(N\Big(f^{(n+1)}(t)\Big)\Big) \end{aligned}$$

---

*Preuve* :

$$\begin{aligned} N\Big(R_n(t)\Big) &= N\left(\int_a^b \frac{(b-t)^n}{b!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right) \\ &\leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} N\Big(f^{(n+1)}(t)\Big)\mathrm{d}t \\ &\leq N_\infty\Big(f^{(n+1)}\Big) \left[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b \end{aligned}$$

□

**Formule de Taylor-Young (local)**

**Proposition**

Développement limité d'une primitive d'une fonction continue :

Soient $f \in C(I,E)$ et $x_0 \in I$, et on suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $x_0$, c'est à dire $\exists a_0, \dots, a_n \in E$ tels que

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\Big((x - x_0)^n\Big)$$

alors l'application $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ admet un $DL_{n+1}(x_0)$ égal à

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + o\Big((x - x_0)^{n+1}\Big)$$

---

*Preuve* :

Posons

$$g : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1}$$

$$\forall x \in I \quad g'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

Par hypothèse, au voisinage de $x_0$, $g'(x) = o(x - x_0)^n$, c'est à dire $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I$

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow N\Big(g'(x)\Big) \leq \varepsilon |x - x_0|^n$$

$$\begin{aligned}
N\Big(g(x)\Big) &= N\Big(g(x) - g(x_0)\Big) = N\left(\int_{x_0}^{x} g'(t)\mathrm{d}t\right) \\
&\leq \left|\int_{x_0}^{x} N\Big(g'(t)\Big)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_{x_0}^{x} \varepsilon |x - x_0|^n \mathrm{d}t\right| \\
&= \varepsilon \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

□

**Proposition**

Développement limité de la dérivée d'une application de classe $C^1$.

Soit $f \in C^1(I,E)$. Si $f$ admet un $DL_n(x_0)$ alors $f$ admet un $DL_{n+1}(x_0)$. Plus précisément : si

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\Big((x - x_0)^n\Big)$$

alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + a_n\frac{(x - x_0)^n}{n+1} + o\Big((x - x_0)^n\Big) \end{aligned}$$

---

**Proposition**

Existence d'un développement limité pour les applications de classe $C^n$ (théorème de Taylor-Young).

Soient $f \in C^n(I, E)$ et $x_0 \in I$, alors $f$ admet un $DL_n(x_0)$ et il vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\Big((x - x_0)^n\Big)$$

---

*Preuve* :

Par récurrence :
- $n = 0$, $f(x) = f(x_0) + o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$ ($f$ est continue en $x_0$).
- si la propriété est vérifiée à l'ordre $n-1$ et $f \in C^n(I, E)$ alors $f' \in C^{n-1}(I, E)$. On applique le résultat à $f'$, c'est à dire

$$f'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0) + o\Big((x - x_0)^{n-1}\Big)$$

Par primitivation :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o\Big((x - x_0)^n\Big)$$

□

# Chapitre 6

# Intégration sur un intervalle

## 6.1 Intégrale impropre

### 6.1.1 Définitions

**Définition**

**Intégrale impropre**

Soient $a, b \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $f \in C_m\Big([a,b],\mathbb{K}\Big)$. On dit que l'intégrale impropre de $f$ sur $I = [a,b[$ est convergente si
$F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $b$.
Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Dans tous les autres cas, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est divergente.

*Exemples* :

1. $$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$
2. $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2$$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.

*Remarques* :

– si $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$$

– soit $f \in C_m\Big([a,b[,\mathbb{K}\Big)$. $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente
  – si et seulement si $\forall c \in [a,b[ \quad \displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente
  – si et seulement si $\exists c \in [a,b[ \quad \displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente

**Définition**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $f \in C_m\Big(]a,b[\Big)$ est convergente si et seulement si $\exists c \in ]a,b[ \ / \displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes.
On notera :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

---

*Remarques* :
– cette définition est indépendante de $c$
–

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \int_x^y f(t)\mathrm{d}t$$

**Proposition**

Soient $f, g \in C_m(I, \mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$. Si $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors

$$\int_I \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big)\mathrm{d}t$$

est convergente.

En outre

$$\int_I \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big)\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\mathrm{d}t + \int_I g(t)\mathrm{d}t$$

---

### 6.1.2 Exemples fondamentaux

*Exemples* :

1. Riemann en $+\infty$
   Soients $a \in \mathbb{R}^*, \alpha \in \mathbb{R}$, alors
   $$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
   convergente si et seulement si $\alpha > 1$
2. Riemann en un point fini
   Soient $a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
   $$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
   convergente si et seulement si $\alpha < 1$, car
   $$\int_x^a \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{a^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \alpha \neq 1 \\ \ln\left(\dfrac{a}{x}\right) & \alpha = 1 \end{cases}$$

Plus généralement, $a, b > 0, a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$$

convergente si et seulement si $\alpha < 1$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ convergente si et seulement si $\alpha > 0$

   Plus généralement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ convergente si $\Re(\alpha) > 0$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \ln t \ \mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t \ \mathrm{d}t$ est divergente.

### 6.1.3 Cas des fonctions à valeurs réelles positives

**Proposition**

Soient $f \in C_m\Big([a, b[, \mathbb{R}_+\Big)$, $a < b$, et

$F : [a, b[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, alors $f \geq 0 \Rightarrow F$ croissante.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f$ convergente $\Leftrightarrow F$ majorée.

*Preuve* :

En effet

$$\forall x, x' \in [a, b[, x \leq x' \qquad F(x') - F(x) = \int_x^{x'} f(t)\mathrm{d}t \geq 0$$

□

**Corollaire**

Soit $f \in C_m\Big(]a, b], \mathbb{R}_+\Big), a < b$, alors

$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ majorée

**Théorèmes de comparaison**

**Théorème**

Soient $f, g \in C_m(I, \mathbb{R}_+)$ $(I = [a, b[)$ vérifiant $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$, alors :

– si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente

– si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ divergente alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ divergente

---

*Remarques* :
– on a un corollaire pour $I = ]a, b]$.

**Théorème**

Soient $f, g \in C_m(I, \mathbb{R}_+)$ / $f =_b O(g)$ $(I = [a, b[)$, alors :

– si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente

– si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ divergente alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ divergente

---

**Théorème**

**Théorème de l'équivalent**

Soient $f, g \in C_m(I, \mathbb{R}_+)$ $(I = [a, b[)$ telles que $f \sim_b g$, alors les intégrales de $f$ et $g$ sont de même nature.

---

**Exemples classiques**

*Exemples* :

1. Fonction Gamma
   Posons
   $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
   Ensemble de définition : on recherche x tel que $\Gamma(x)$ soit convergente.
   $t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (éventuellement sur $\mathbb{R}_+$ si $x \geq 1$). Elle garde un signe fixe.
   – En $+\infty$, $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} =_{+\infty} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \text{ convergente } \Longrightarrow \int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ convergente}$$
   – En 0, $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \sim t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$
   $D_\Gamma = ]0, +\infty[$

   Remarques :
   – $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (en posant $t = u^2$)

2. Intégrale de Bertrand

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta t}$$

convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1, \beta > 1$

$t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$ positive, continue sur $[2, +\infty[$

- si $\alpha > 1$

$$\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t} =_{+\infty} O\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$$

- si $\alpha < 1$

$$\frac{1}{t^\gamma} =_{+\infty} O\left(\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\right)$$

- $\alpha = 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta t} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$$

convergente si $\beta > 1$ (en posant $u = \ln t$).

### 6.1.4 Intégrale absolument convergente

**Définition**

Soit $f \in C_m(I, \mathbb{K})$, $I = ]a, b[$. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

---

**Théorème**

Soit $f \in C_m\Big(]a, b[, \mathbb{K}\Big)$, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ absolument convergente}$$
$$\Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ convergente}$$

---

*Preuve* :

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

  Soit $f \in C_m\Big(]a, b[, \mathbb{R}\Big)$, posons

$$\begin{cases} f^+ = \max(0, f) & f^+ \geq 0 \\ f^- = \min(0, -f) & f^- \geq 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$$

– $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Soit $f \in C_m\Big(]a, b[, \mathbb{R}\Big)$, on a

$$f = \Re(f) + \Im(f)$$

$$|\Re(f)| \leq |f|$$
$$|\Im(f)| \leq |f|$$

D'après le premier théorème de comparaison, $\displaystyle\int_a^b |\Re(f)|$ et $\displaystyle\int_a^b |\Im(f)|$ convergentes, $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b \Re(f)$ et $\displaystyle\int_a^b \Im(f)$ convergentes

$$\int_a^b f = \int_a^b \Re(f) + i \int_a^b \Im(f)$$

□

*Contre-exemples* :
Exemple d'une intégrale convergente, mais non absolument convergente.
Posons

$$f = \frac{\sin t}{t}$$

Alors, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ divergente.

– Convergence :
$t \mapsto f(t)$ continue sur $]0, +\infty[$.
  – en 0 :

$$\frac{\sin t}{t} \sim 1$$

Elle est prolongeable en 0. Riemann en un point fini $(0 < 1)$ :

$$1 = \frac{1}{t^0}$$

d'où l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
  – en $+\infty$

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\left.\frac{\cos t}{t}\right|_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{x^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

- Divergence :
  $t \mapsto |f(t)|$ continue sur $]0, +\infty[$.
  - en 0 :
  $$\frac{|\sin t|}{t} \sim 1$$
  Pas de problème en 0.
  - en $+\infty$ :
  $$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$$
  $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

## 6.2 Fonctions intégrables

### 6.2.1 Définitions

**Proposition**

Soit $f \in C_m(I, \mathbb{K})$. Il y équivalence entre :

1. $\displaystyle\int_I |f(x)|\mathrm{d}x$ convergente.
2. $\exists M > 0 \,/\, \forall J \subset I \quad \displaystyle\int_J |f(x)|\mathrm{d}x \leq M$.
3. $\exists a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $a$ décroissante et $b$ croissante, telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf(I)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \sup(I)$, et $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\mathrm{d}x$ convergente.

*Preuve* :

- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ si $\displaystyle\int_I |f(x)|\mathrm{d}x$ convergente, posons $A = \displaystyle\int_I |f(x)|\mathrm{d}x$
  $$\forall J \subset I \qquad \int_J |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_I |f(x)|\mathrm{d}x = A$$
  Posons $M = A + 1 \geq 1$, alors $\displaystyle\int_J |f(x)|\mathrm{d}x \leq M$

□

**Définition**

Toute fonction vérifiant l'une des trois propriétés précédentes s'appelle fonction intégrable sur $I$.

Si $I$ est un segment $[a, b]$, on notera

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Si $I$ est un intervalle,on notera

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

---

### 6.2.2 Propriétés

**Proposition**

L'ensemble des fonctions intégrables sur $I$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f, g$ intégrable sur $I$ :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

---

*Preuve* :

Soit $E$ ensemble des fonctions intégrables sur $I$, on a $E \subset C_m(I, \mathbb{K})$.

L'application nulle appartient à $E$.

D'autre part, soient $\lambda \in \mathbb{K}, f, g \in E$

$$\forall t \in I \qquad |\lambda f(t) + g(t)| \leq |\lambda||f(x)| + |g(x)|$$

D'après les théorèmes de comparaison, $\displaystyle\int_I (\lambda f + g)$ est absolument convergente, donc $\lambda f + g \in E$.

$\square$

**Proposition**

Relation de Chasles Soit $f$ intégrable sur $I$ et $J$, qui vérifient $I \cup J$ intervalle, et $I \cup J = \emptyset$ ou réduit à un point, alors $f$ est intégrable sur $I \cap J$ et

$$\int_{I \cap J} f(d)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\mathrm{d}t + \int_J f(t)\mathrm{d}t$$

---

**Proposition**

Soit $\varphi : I \to J = \varphi(I)$, $I$ intervalle et $\varphi$ $C^1$-difféomorphisme, $f \in C_m(I, \mathbb{K})$

$$(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \text{ intégrable sur } I \Leftrightarrow f \text{ intégrable sur } J$$

En outre :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I \Big(f \circ \varphi(t)\Big)|\varphi'(t)|\mathrm{d}t$$

---

*Preuve* :

$I = [a, b[$, $\varphi : I \to J$

– $1^{\text{er}}$ cas : $\varphi$ strictement croissante, soit $x \in I$

$$\int_a^x \left| f \circ \varphi(t) \right| |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

si $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ intégrable sur $I$ alors $\displaystyle\int_a^x |f \circ \varphi| \, |\varphi'|$ admet une limite quand $x \to b$, donc il en est de même pour $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} |f|$.

Et réciproquement. De plus,

$$\int_a^x f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

– $2^{\text{e}}$ cas : $\varphi$ strictement décroissante

□

### 6.2.3 Nouveaux espaces normés

**Proposition**

Norme de la convergence en moyenne Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $E$ ensemble des applications continues et intégrables sur l'intervalle $I$, alors $E$ est un $\mathbb{K}$-ev et

$$\begin{aligned} N_1 : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto N_1(f) = \int_I f(t) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

est une norme sur $E$, appelée norme de la convergence en moyenne.

**Proposition**

Norme de la convergence quadratique L'ensemble des fonctions continues sur $I$ et de carrés intégrables sur $I$ noté $E$ est un $\mathbb{K}$-ev. D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} N_2 : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \sqrt{\int_I |f(t)|^2 \mathrm{d}t} \end{aligned}$$

est une norme sur $E$ associée au produit hermitien $\langle\,|\,\rangle : E^2 \to \mathbb{K}, \langle\, f \,|\, g\,\rangle = \displaystyle\int_I \overline{f}(t)g(t)\mathrm{d}t$.

---

*Preuve* :
- $E \subset C(I, \mathbb{K})$, $E \neq \emptyset$
  Soit $\lambda \in \mathbb{K}, f, g \in E$

$$\forall t \in I \qquad |\lambda f(t) + g(t)|^2 \leq 2\Big(|\lambda|^2|f(t)|^2 + |g(t)|^2\Big)$$

  Le théorème de comparaison donne l'intégrabilité de $t \mapsto \Big(\lambda f(t) + g(t)\Big)^2$.
- De plus, soient $f, g \in E$, alors $\overline{f}g$ est intégrable sur $I$

$$\begin{aligned}\forall t \in I \qquad \Big|\overline{f}(t)g(t)\Big| &= |f(t)|\,|g(t)| \\ &\leq \frac{|f(t)|^2 + |g(t)|^2}{2}\end{aligned}$$

  Le théorème de comparaison donne l'intégrabilité de $\overline{f}g$ sur $I$.

□

*Exemples* :
Soit $E$ ensembles des focntions continues de carrés intégrables sur $I$, $f, g \in E^{\mathbb{N}}$ suites convergentes de $E$ pour la norme $N_2$ telles que

$$\begin{aligned}&\exists f \in E \,/\, N_2(f_n - f) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \\ &\exists g \in E \,/\, N_2(g_n - g) \xrightarrow[+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Alors
$$\langle\, f_n \,|\, g_n\,\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle\, f \,|\, g\,\rangle$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\Big|\langle\, f_n \,|\, g_n\,\rangle - \langle\, f \,|\, g\,\rangle\Big| &= \Big|\langle\, f_n - f \,|\, g_n\,\rangle + \langle\, f \,|\, g_n - g\,\rangle\Big| \\ &\leq \Big|\langle\, f_n - f \,|\, g_n\,\rangle\Big| + \Big|\langle\, f \,|\, g_n - g\,\rangle\Big| \\ &= \underbrace{N_2(f_n - f)}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0} \; N_2(g_n) + N_2(f) \; \underbrace{N_2(g_n - g)}_{\xrightarrow[+\infty]{} 0} \xrightarrow[+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Puisque $N_2(g_n)$ est une suite bornée car $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

## 6.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

### 6.3.1 Théorème de convergence dominée

Mise en garde :

$$F(n) = \int_0^{\pi/2} n \cos^n x \sin x \, \mathrm{d}x$$

On a $n \cos^n x \sin x = \exp\Big(\ln n + n \ln(\cos x)\Big) \sin x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $x \neq \pi/2$ et $n \cos^n x \sin x = 0$.

$$F(n) = -\underset{u = \cos x}{\int_1^0 n u^n \, \mathrm{d}u} = n \int_0^1 u^n \mathrm{d}u = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} n \cos^n x \sin x \, \mathrm{d}x \neq \int_0^{\pi/2} \lim_{n \to +\infty} \Big(n \cos^n x \sin x\Big) \mathrm{d}x$$

**Théorème**

Soient $f_n \in C_m(I, \mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}$, et $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrables sur $I$.

On suppose que

–
$$\forall x \in I \qquad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

et $f \in C_m(I, \mathbb{K})$ (on dit simplement que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f$ sur $I$).

–
$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

(hypothèse de domination)

Alors $f$ est intégrable sur $I$ et de plus

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(x) \mathrm{d}x = \int_I f(x) \mathrm{d}x$$

---

*Exemples* :

1. Soit $f \in C([0,1], \mathbb{C})$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto f_n(x) = \frac{(x)}{1+nx} \end{aligned}$$

– $x = 0$, $f_n(0) = f(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0)$

– $x \in ]0,1]$, $f_n(x) \sim_{+\infty} \dfrac{f(x)}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ simplement

$$\forall x \in [0,1] \qquad |f_n(x)| = \frac{|f(x)|}{1+nx} \leq |f(x)| = \varphi(x)$$

(domination)
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,\mathrm{d}x = 0$$

2. Intégrale de Gauss

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1\frac{x^2}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^{x^2}$$

$$n\ln\left(1=\frac{x^2}{n}\right) \sim_{+\infty} n\frac{x^2}{n} = x^2$$

Objectif : calcul de

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \\ &=^? \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Introduisons

$$f_n : x \longmapsto \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$$
$$\lim f_n = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Je dis que à $x$ fixé $n \mapsto \left(1=\dfrac{x^2}{n}\right)^n$ (suite croissante)

$$1+x^2 \leq \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n$$

Posons

$$g(t) = t\ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right) = t\Big(\ln(t+x^2)-\ln t\Big)$$
$$g'(t) = \ln(t+x^2)-\ln t + t\left(\frac{1}{t+x^2}-\frac{1}{t}\right) = \ln(t+x^2)-\ln t - \frac{x^2}{t+x^2}$$
$$g''(t) = \frac{-x^4}{t(t+x^2)}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$$

et $\varphi$ intégrable sur $\mathbb{R}$ (hypothèse de domination).

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\frac{x}{\sqrt{n}}=\tan\theta} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{n}(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^n}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{n-1}\mathrm{d}\theta \\
&= 2\sqrt{n}I_{2n-2} \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \\
&\sim \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2n}$$

### 6.3.2 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

**Théorème**

Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I\times J, \mathbb{K})$.
- si $\forall t \in J,\ I \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $I$
- si $\forall x \in I,\ J \to \mathbb{K}, t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrables sur $J$
- s'il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable et vérifiant
  $\forall (x,t) \in I\times J \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination)

Alors l'application $F : I \to \mathbb{K}, x \mapsto F(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur $I$.

*Preuve* :

Montrons la continuité en $x_0 \in I$ et travaillons séquentiellement.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque $/\ a_n \xrightarrow[+\infty]{} x_0$ et montrons que $F(a_n) \xrightarrow[+\infty]{} F(x_0)$.

$$F(a_n) = \int_J f(a_n,t)\mathrm{d}t$$

On applique le théorème de convergence dominée

$$\forall t \in J \qquad f(a_n,t) \xrightarrow[+\infty]{} f(x_0,t)$$

$x \mapsto f(x,t)$ continue et $t \mapsto f(x_0,t)$ continue par morceaux.

De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J \qquad |f(a_n,t)| \leq \varphi(t)$$

(domination)

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F(a_n) &= \int_J \lim_{+\infty} f(a_n,t)\mathrm{d}t \\
&= \int_J f(x_0,t)\mathrm{d}t \qquad\qquad\qquad = F(x_0)
\end{aligned}$$

□

*Exemples* :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \qquad x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}_+$$

$$\forall t\in\mathbb{R}_+ \qquad x\longmapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad t\longmapsto \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+$$

$$\left|\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)} = \varphi(t)$$

D'où l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ (domination).

Complément : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ ?

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque telle que $x_n\to+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} = \begin{cases} 0 & t=0 \\ \frac{\pi}{2(1+t^2)} & t>0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F(x_0) &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(x_n t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\arctan t\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

**Corollaire**

Soient $I, J$ deux intervalles et $f\in\mathcal{F}(I\times J,\mathbb{K})$
– si $\forall t\in J$, $I\to\mathbb{K}, x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $I$
– si $\forall x\in I$, $J\to\mathbb{K}, t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrables sur $J$

– si $\forall K \subset I \quad \exists \varphi_K : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur $J$ et vérifiant

$$\forall x \in K, \forall t \in J \qquad |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$

(domination)

Alors $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $I$.

---

*Exemples* :

– Continuité de la fonction $\Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose $f(x,t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$, $x \in ]0,+\infty[= D_\Gamma$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$F(x) = \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

– 1er : $x \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $(\forall t > 0)$
– 3e : domination locale : soit $K = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$
$|f(x,t)| = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$
– 1er cas : $t \in ]0,1]$

$$t^{x-1} = \exp((x-1)\ln t) \leq \exp((a-1)\ln t) = t^{a-1}$$

et $\forall x \in [a,b]$

$$|f(x,t)| \leq t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \varphi_1(t)$$

et $\varphi_1$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (domination locale).
Alors $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
– 2e cas : $t \geq 1, x \in [a,b]$

$$t^{x-1} = \exp((x-1)\ln t) \leq \exp(b-1)\ln t = t^{b-1}$$
$$|f(x,t)| \leq t^{b-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \varphi_2(t)$$

et $\varphi_2$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Alors $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Plus généralement

$$\varphi_{[a,b]}(t) = \mathrm{e}^{-t}\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leq \mathrm{e}^{-t}(t^{a-1}, t^{b-1})$$
$$\forall x \in [a,b], \forall t > 0 \qquad |t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \leq \varphi_{[a,b]}(t)$$

et $\varphi_{[a,b]}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
–

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

L'application est continue sur $[0,1]$, pour $x \neq 0$.
Pour $x = 0$ : $t \mapsto \dfrac{1}{t^2(1+t^2)}$ continue sur $]0,1]$, non intégrable sur $]0,1]$, donc $D_F = \mathbb{R}^*$. De plus, $F$ est paire, donc on l'étudie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \quad \forall t \in [0,1]$$
$$[a,b] \subset \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [a,b], \forall t \in [0,1]$$
$$\frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \leq \frac{1}{(1+t^2)(a^2+t^2)} = \varphi_{|[a,b]}(t)$$

intégrable sur $[0,1]$, donc $F$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right) \frac{\mathrm{d}t}{x^2-1} \\
&= \frac{1}{x^2-1}\left(\arctan t\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\Big|_0^1\right) \\
&= \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}\right) \qquad x \neq \pm 1
\end{aligned}$$

$F$ est continue et

$$\begin{aligned}
F(1) &= \lim_{x\to 1} F(x) \\
&= \frac{1}{x+1}\left(\frac{\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}}{x-1}\right) \qquad \sim_1 -\frac{1}{2}\varphi(1) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

### 6.3.3 Dérivation

**Théorème**

**Théorème de Leibniz**

Soient $I, J$ deux intervalles de $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$ tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe sur $I \times J$.

- $\forall t \in J \quad t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur $I$.
- $\forall x \in I \quad t \mapsto f(x,t),\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continues par morceaux et intégrables sur $I$.
- $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur $J$ et vérifiant

$$\forall (x,t) \in I \times J \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

(domination)

Alors $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est $C^1$ sur $I$ et

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

*Preuve* :

On travaille séquentiellement : soit $x_0 \in I$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$.

$$\frac{F(a_n)-F(x_0)}{a_n-x_0} = \frac{\displaystyle\int_J f(a_n,t)\ \mathrm{d}t - \int_J f(x_0,t)\ \mathrm{d}t}{a_n-x_0} = \int_J \frac{f(a_n,t)-f(x_0,t)}{a_n-x_0}\ \mathrm{d}t$$

$$\frac{f(a_n,t)-f(x_0,t)}{a_n-x_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \qquad (\forall t\in J)$$

$$\left|\frac{f(a_n,t)-f(x_0,t)}{a_n-x_0}\right| \leq \varphi(t) \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{(inégalité des accroissements finis)}$$

□

*Exemples* :

Montrons que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

– 1[re] étape : on montre

$$\forall x\in\mathbb{R}_+ \qquad \underbrace{\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\cos t}\cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t}_{F(x)} = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin t}{t}}_{G(x)}$$

– 2[e] étape : on montre $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

**Corollaire**

On travaille localement avec la troisième hypothèse : soient $I, J$ deux intervalles de $f \in \mathcal{F}(I\times J,\mathbb{K})$ tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe sur $I\times J$.

– $\forall t\in J \quad t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur $I$.

– $\forall x\in I \quad t\mapsto f(x,t),\ t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continues par morceaux et intégrables sur $I$.

– $\forall K\subset I \quad \exists \varphi_K : J\to\mathbb{R}_+$ intégrable sur $J$ telle que

$$\forall (x,t)\in K\times J \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t)$$

(domination locale)

Alors $x\mapsto F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est $C^1$ sur $I$ et

$$\forall x\in I \qquad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

*Exemples* :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$F'(x) = \frac{-\ln x}{1-x^2} \qquad x \neq 1 \sim_1 \frac{1}{2}$$
$$F(x) - \underbrace{F(0)}_{=0} = \int_0^x \frac{-\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}t \qquad x > 0$$
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$$

**Théorème**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$, avec existence de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sur $I \times J$ ($k \in [\![1, p]\!]$). Si

–
$$\forall t \in J, \forall k \in [\![1, p]\!] \qquad x \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$$
continue sur $I$.

–
$$\forall x \in I, \forall k \in [\![0, p]\!] \qquad t \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$$
continue par morceaux et intégrables sur $J$.

– $\forall K \subset I, \forall k \in [\![1, p]\!] \qquad \exists \varphi_{K,k}$ intégrable sur $J$ et telle que $\forall (x, t) \in K \times J$
$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_{K,k}(t)$$
(hypothèse de domination)

Alors $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_J f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est $C^p$ sur $I$ et
$$\forall x \in I, \forall k \in [\![0, p]\!] \qquad F^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

*Exemples* :

$x \mapsto \Gamma(x)$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
$$f(x, t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t)\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$$
$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) = (\ln t)^p t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$$

$t \mapsto (\ln t)^p\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ intégrable sur $]0, +\infty[$ ($x > 0$). En effet :

– en $+\infty$ :
$$(\ln t)^p\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} = O(1/t^2)$$
et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ convergente.

– en 0 :
$$(\ln t)^p\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} = O\left(\frac{1}{t^{1-x/2}}\right)$$
et $1 - x/2 < 0$.

Domination locale : soit $K = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$
$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| &= |\ln t|^p\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \\ &\leq |\ln t|^p\, t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t} \qquad \text{sur } ]0,1] \\ &\leq |\ln t|^p\, t^{b-1}\, \mathrm{e}^{-t} \qquad \text{sur } [1,+\infty[ \\ &\underbrace{\leq}_{\substack{x\in[a,b]\\ x>0}} |\ln t|^p\, t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t} + |\ln t|^p\, t^{b-1}\, \mathrm{e}^{-t} = \varphi_{[a,b],p}(t)\end{aligned}$$

$\varphi_{[a,b],p}$ intégrable sur $]0,+\infty[$ donc
$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

Chapitre 7

# Séries de fonctions

## 7.1 Modes de convergence

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : I \to \mathbb{K}$

### 7.1.1 Convergence simple

**Définition**

**Convergence simple**

On dit que la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $I$ si $\forall x \in I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est convergente.

Pour ce cas, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $I$.

*Exemples* :

1. Fonction Zêta de Riemann

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{n^x} \qquad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta : ]1, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{aligned}$$

2. 

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{x^2+n^2} \end{aligned}$$

$\forall n \geq 1$, $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$. Posons :

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2} \end{aligned}$$

### 7.1.2 Convergence normale

**Définition**

**Convergence normale**

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $I$ si à partir d'un certain rang $n_0$, $f_n$ est bornée et si $\sum_{n\geq n_0} \|f_n\|_\infty$ converge.

De même, on dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur tout segment $K \subset I$ si et seulement si $\sum f_{n|K}$ converge normalement sur $K$.

**Proposition**

$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $I$ est équivalent à :

$$\begin{cases} \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ / \ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ convergente} \\ \forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x)| \leq a_n \end{cases}$$

### 7.1.3 Comparaison des modes de convergence

**Proposition**

La convergence normale sur $I$ implique la convergence normale sur tout segment $K \subset I$.

- la réciproque est fausse ;
- la convergence normale implique la convergence absolue donc la convergence simple de la série de fonctions.

## 7.2 Propriétés de la somme d'une série de fonctions

### 7.2.1 Continuité

**Théorème**

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : I \to \mathbb{K}$ avec $f_n$ continue sur $I$. On suppose de plus que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement ur tout segment $J \subset I$.

Alors la fonction somme $S : I \to \mathbb{K}, x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $I$.

---

*Preuve* :

Soit $x_0 \in I$, et supposons que $\lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0?, \forall x \in I \qquad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |S(x) - S(x_0| > \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
|S(x) - S(x_0| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{N} \Big(f_k(x) - f_k(x_0)\Big) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \Big(f_k(x) - f_k(x_0)\Big)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x) - f_k(x_0)| + \sum_{h=N+1}^{+\infty} \Big(|f_h(x) + |f_h(x_0)|\Big) \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} |f_k(x) - f_k(x_0)| + 2 \sum_{h=N+1}^{+\infty} N_\infty(f_{h|\mathbb{K}})
\end{aligned}$$

Soit $J$ un segment contenant $x_0$ et $x \in J$. Choisissons $N$ tel que

$$2 \sum_{h=N+1}^{+\infty} N_\infty(f_{h|\mathbb{K}}) < \alpha/2$$

□

**Corollaire**

Théorème de la double limite Si $a$ est une extrémité finie ou infinie de $I$ et si chaque $f_n : I \to \mathbb{K}$ admet une limite $\ell_n$ en $a$. Si d'autre part $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $I$.
Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$ est convergente et

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

---

*Remarques* :

–

$$\forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \xrightarrow[x \to a]{} \ell_n \leq \|f_n\|_\infty$$

*Exemples* :

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$

   $S$ est impaire. On avait vu la convergence normale sur tout segment $K \subset \mathbb{R}$. $\forall n$ $N \to f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ est continue. Donc $S$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   – en $+\infty$ : on ne peut pas appliquer le théorème de la double limite. On utilise une comparaison à une série intégrale :

   $$\varphi_x(t) = \frac{x}{x^2+t^2}$$

   $\varphi_x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité de la moyenne donne

   $$\varphi_x(k+1) \leq \int_k^{k+1} \varphi_x(t)\ \mathrm{d}t \leq \varphi_x(k)$$

   C'est à dire

   $$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{x}{x^2+t^2}\ \mathrm{d}t & \displaystyle\leq \frac{x}{x^2+k^2} & \displaystyle\leq \int_{k-1}^{k} \frac{x}{x^2+t^2}\ \mathrm{d}t \\
\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2}\ \mathrm{d}t & \displaystyle\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{x^2+k^2} & \displaystyle\leq \int_0^{n} \frac{x}{x^2+t^2}\ \mathrm{d}t \\
\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ \mathrm{d}t}{x^2+t^2} & \leq S(x) & \displaystyle\leq \int_0^{+\infty} \frac{x\ \mathrm{d}t}{x^2+t^2} \\
\displaystyle= \arctan\left(\frac{t}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} & & \displaystyle= \arctan\left(\frac{t}{x}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \\
\displaystyle= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} & &
\end{array}$$

# Chapitre 8

# Séries entières

**Définition**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On étudie la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ avec

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ z &\longmapsto f_n(z) = a_n z^n \end{aligned}$$

*Exemples* :

1. Série géométrique : $\forall z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

2. Série exponentielle : $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

## 8.1 Rayon de convergence

### 8.1.1 Définitions

**Lemme**

**Lemme d'Abel**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors $\forall z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < |z_0|$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

*Preuve* :

$(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite bornée $\Leftrightarrow \exists M > 0 \,/\, \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n z_0^n| \leq M$, c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| \leq \frac{M}{|z_0|^n} \qquad z_0 \neq 0$$

Soit

$$z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < |z_0| \qquad |a_n z^n| \leq M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} M \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}}$ convergente

□

**Définition**

**Rayon de convergence**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière réelle ou complexe, on appelle rayon de convergence de la série entière le réel positif (éventuellement égal à l'infini) défini par

$$R = \sup\{\rho \in \mathbb{R}_+ \;/\; (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée }\}$$

*Exemples* :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^n z^n$, et $R = \sup\{\rho \geq 0 \;/\; (n^n\rho^n) \text{ bornée}\}$

$$n^n\rho^n = \exp(n\ln n + n\ln\rho) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
$$n\ln n + n\ln\rho \sim_{+\infty} n\ln n$$
$$\Longrightarrow R = 0$$

2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \quad a_n = \frac{1}{n!}$

$$\forall p > 0 \qquad a_n\rho^n = \frac{\rho^n}{n!}$$
$$\frac{\rho^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ (terme général d'une série convergente)}$$
$$R_e = [0, +\infty[ \Rightarrow \boxed{R = +\infty}$$

3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \qquad R = 1$
4. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^z} \qquad R = 1$

### 8.1.2 Propriétés

**Théorème**

Soit $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

– si $R = 0$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$

– si $R = +\infty$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente, et de plus, $\forall r > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \diagup |z| \leq r\}$
– si $R \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\forall z \in \mathbb{C} \diagup |z| < R$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente, et $\forall z \in \mathbb{C} \diagup |z| > R$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est grossièrement divergente, et de plus $\forall r \in ]0, R[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \diagup |z| \leq r\}$

---

*Preuve* :

Retour au lemme d'Abel

– $R = 0$, alors $\forall z \neq 0$, $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite non bornée, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge grossièrement
– $R = +\infty$, $\forall z \in \mathbb{C}$, choisissons $z_0 \in \mathbb{C}^* \diagup |z| < |z_0|$. La suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Le lemme d'Abel permet de dire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
Soit $z \diagup |z| \leq r$, $|a_n z^n| = |a_n|\ |z^n| \leq |a_n r^n|$ terme général d'une série convergente
– $R > 0$, alors $\forall z \diagup |z| > R \Rightarrow (a_n z^n)$ non bornée, donc $a_n z^n$ ne tend pas vers 0 et il y a divergence grossière de la série.
Choisissons $z \diagup |z| < R$, on utilise le lemme d'Abel. Choisissons $z_0 \diagup |z| < |z_0| < |R|$ donc $(a_n |z_0|^n$ suite bornée $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
Soit $r \in ]0, R[$ et $z \diagup |z| \leq r$, $a_n z^n \leq |a_n| r^n$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n r^n|$ convergente (car $r < R$). Il y a bien convergence normale sur $\{z \diagup |z| \leq r\}$.

□

**Définition**

**Disque ouvert de convergence**

Si $R$ rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$, alors

$$D(0, R) = \{z \diagup |z| < R\}$$

s'appelle le disque ouvert de convergence de la série entière.

Posons

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

alors

$$D(0, R) \subset D_S \subset \overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{K} \diagup |z| \leq R\}$$

---

*Exemples* :

1.
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n \qquad D_S = \{0\}$$

2.
$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2} \qquad R = \sup\left\{r \geq 0 \ / \ \left(\frac{r^n}{n^2}\right) \text{ bornée}\right\} = 1$$

   $D_S = [-1, 1]$ et $D(0, 1) = ]-1, 1[$

3.
$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \qquad R = 1$$

   $D_S = [-1, 1[$ et $D(0, 1) = ]-1, 1[$

**Proposition**

Continuité de la somme Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors l'application

$$z \longmapsto S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur le disque ouvert de convergence.

---

*Preuve* :

Par exemple si $R > 0$, il y a convergence normale sur tout disque fermé de rayon $r \in ]0, R[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n z^n$ est continue. La continuité étant une propriété locale, elle est transférée à la somme.

$\square$

*Exemples* :

1. $z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ continue sur $\{z \ / \ |z| < 1\}$

$$f_n(z) = \frac{z^n}{n^2} \quad \forall z \ / \ |z| \leq 1 \qquad \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$

   Il y a convergence normale sur $\{z \ / \ |z| \leq 1\}$. Mieux : $z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est continue sur $\{z \ / \ |z| \leq 1\}$

2. $S : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ continue sur $\{t \ / \ |t| < 1\} = ]-1, 1[$, et $D_S = [-1, 1[$, on admettra que $S$ est continue sur $[-1, 1[$.

*Remarques* :
– Plus généralement, on admet le résultat suivant.

**Proposition**

Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$, dans le cas réel.
– si de plus $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n R^n$ est convergente alors $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ continu sur $]-R, R]$
– si de plus $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (-R)^n$ est convergente alors $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ continu sur $[-R, R[$

### 8.1.3 Recherche pratique

*Exemples* :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n t^n$$

$$a_n r^n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n r^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) + n \ln r\right)$$

$$n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) + n \ln r = (-1)^n + n \ln r + o(1)$$

$$1 + 2p \ln r + o(1) \qquad n = 2p$$

$$-1 + (2p+1) \ln r + o(1)$$

$$(a_n r^n) \text{ bornée } \Leftrightarrow r \leq 1 \qquad R = 1$$

*Remarques* :
– $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et on suppose qu'il existe $z_0 \neq 0$, $\sum a_n z_0^n$ convergente alors $R \geq |z_0|$ (car $(a_n z_0^n)$ bornée, en effet $z_0^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$).
– $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et on suppose qu'il existe $z_0 \neq 0$, $\sum a_n z_0^n$ divergente alors $R \leq |z_0|$ (dans le cas contraire on aurait $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n$).

– $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ admettent un rayon de convergence $R_a$ et $R_b$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq |b_n| \Longrightarrow R_b \leq R_a$$

En effet si $|z| < R_b$, $|a_n|\,|z|^n \leq |b_n|\,|z|^n$, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n z^n|$ convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ convergente alors $|z| < R_a$.

– $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ admettent un rayon de convergence $R_a$ et $R_b$, on suppose $a_n \sim_{+\infty} b_n$, alors

$$\left.\begin{array}{l} a_n = O(b_n) \Rightarrow R_b \leq R_a \\ b_n = O(a_n) \Rightarrow R_a \leq R_b \end{array}\right\} \Longrightarrow R_a = R_b$$

**Proposition**

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec $\forall n \quad a_n \neq 0$

$$z \neq 0 \qquad \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \; |z|$$

Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} = L|z|$$

Et $R = 1/L$

---

## 8.2 Opérations algrébriques sur les séries entières

### 8.2.1 Effet sur les rayons de convergence

**Proposition**

Multiplication par un scalaire Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence $R_a$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n z^n$ admet $R_a$ comme rayon de convergence et $\forall z \,/\, |z| < R_a$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

---

**Proposition**

Somme de deux séries entières Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence $R_a$ et $R_b$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$ et

- $R = \inf(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $\forall z \ / \ |z| < R$
- $R \geq R_a$ si $R_a = R_b$ et $\forall z \ / \ |z| < R_a$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

**Proposition**

Produit de Cauchy de deux séries entières Soient $\sum_{p\in\mathbb{N}} c_p z^p$ et $\sum_{q\in\mathbb{N}} b_q z^q$ de rayons de convergence $R_c$ et $R_b$. On appelle produit de Cauchy des deux séries entières précédentes la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{p+q=n} c_p b_q$$

On a $R \geq \inf(R_c, R_b)$. En outre, $\forall z \ / \ |z| < \inf(R_c, R_b)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p \cdot \sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q$$

*Exemples* :

1. Soit $1 - z = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$, on a $a_0 = 1, a_1 = -1$ et $a_p = 0$ si $p \geq 2$, et donc $R_a = +\infty$, de même soit $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q$, $\forall q, b_q = 1$ et $R_b = 1$.
   $\forall z \ / \ |z| < 1$, on a
   $$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0 = 1 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow R_c = +\infty \\ c_n = 0 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$
2. Soient $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p, \sum_{q\in\mathbb{N}} z^q$, avec $R_b = 1$
   $$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p+q=n} a_p = \sum_{p=0}^{n} a_p$$
   Et $R_c \geq \inf(R_a, 1)$

### 8.2.2 Dérivation ou primitivation formelle

**Définition**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. On appelle
– série dérivée de la série précédente la série entière définie par

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$$

– primitive la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$$

**Proposition**

Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ , $\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a_{n+1}z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

*Preuve* :

Soit $R$ le rayon de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $R'$ le rayon de la seconde série.
– $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_{n+1}| \leq (n+1)|a_{n+1}| \Rightarrow R' \leq R$
– montrons que $R' = R$. Si $R = 0$, alors $0 \leq R' \leq 0$, alors $R' = 0$.
Si $R > 0$, raisonnons par l'absurde et supposons $R' < R$. Choisissons $z_0$ tel que $R' < |z_0| = r < R$ et $z$ tel que $R' < |z| < |z_0|$. $|z_0| < R \Rightarrow a_n|z_0|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $|a_n z_0^n|$ bornée.

$$\exists M \ / \ |a_n z_0^n| \leq M$$
$$|a_n| \leq \frac{M}{|z_0|^n} = \frac{M}{r^n}\left|(n+1)a_{n+1}z^n\right| \leq (n+1)\frac{M}{r^{n+1}}\,|z|^n = \underbrace{\frac{M(n+1)}{r}\left(\frac{|z|}{r}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$$

Ce qui n'est pas.

□

## 8.3 Série entière réelle ou complexe d'une variable réelle

Notations : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on s'intéresse à $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ , $t \in \mathbb{R}$. Soit $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ . On sait que

$$\begin{aligned} S : D_S = ]-R, R[ &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{aligned}$$

est continue sur $D_S$ (car il y a convergence normale sur tout segment $[-r, r] \subset D_S$).

On a admis que si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ est convergente alors $S$ est prolongeable par continuité en $R_{+\infty}$, à savoir $\lim\limits_{t\to R} \sum a_n t^n = \sum a_n R^n$.

### 8.3.1 Intégration terme à terme d'une série entière

**Théorème**

Soit $S$ la somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a_n t^{n+1}}{n+1}$ admet pour somme sur $D_S$ la primitive de $S$ telle que $S(0) = 0$.

*Preuve* :

On a applique le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonction

$$\forall t \in D_S, |t| \leq r < R \qquad \int_0^t \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t a_n x^n \mathrm{d}x$$

On travaille sur $[0, t]$ et on sait qu'il y a convergence normale sur $[-r, r]$.

$$\int_0^t = S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

□

*Exemples* :

1.
$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \qquad |t| < 1 \quad R = 1$$

2.
$$\arctan t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad |t| < 1$$

3.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{t\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{t\to 1} \arctan t = \frac{\pi}{4}$$

### 8.3.2 Dérivation terme à terme d'une série entière

**Théorème**

La somme $S : t \mapsto S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe $C^1$ sur $]-R, R[$ et de plus

$$\forall t \in ]-R, R[ \qquad S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

---

*Preuve* :

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \forall t \in ]-R, R[ \qquad S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$

Grâce au théorème précédent.

□

*Exemples* :

Soit $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, on a

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) t^n \qquad |t| < 1$$

La somme d'une série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $R > 0$ est une fonction de classe $C^n$ sur $]-R, R[$, et de plus si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{S^{(n)(0)}}{n!}$$

D'après le théorème précédent, $S$ est $C^\infty$ sur $]-R,R[$

$$x \in ]-R,R[ \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Longrightarrow S(0) = a_0$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \Longrightarrow S'(0) = a_1$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad S^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n \, \frac{n!}{(n-p)!} \, x^{n-p} \Longrightarrow a_p = \frac{S^{(p)}}{p!}$$

*Remarques* :
– Soit $F$ une application définie au voisinage de 0, tel que au voisinage de 0 $\exists a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;/\; F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $F$ est $C^\infty$ au voisinage de 0.

*Exemples* :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

On a

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}{x}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \Rightarrow F$ somme d'une série entière donc $F$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{F^{(n)(0)}}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} \Longrightarrow F^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$$

*Remarques* :
– si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0, comme $S$ est $C^\infty$ au voisinage de 0, on peut appliquer la formule de Taylor-Young à S, c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} \, x^k + o(x^n)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

## 8.4 Fonctions développables en séries entières à l'origine

### 8.4.1 Définitions et structures

**Définition**

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ définie au voisiage de 0, on dit que $F$ est développable en série entière à l'origine (DSE) si :
– il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ ;
– il existe $0 < \alpha < R$ tel que

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[ \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

---

**Proposition**

L'ensemble des fonctions DSE à l'origine est une $\mathbb{K}$-algèbre :
– l'application nulle est DSE ;
– stabilité par combinaison linéaire et par produit (Cauchy).

---

### 8.4.2 Une condition nécessaire et suffisante

**Proposition**

Si $F$ est DSE à l'origine, alors $F$ est $C^\infty$ au voisinage de 0.

---

*Remarques* :
– la réciproque est fausse.

**Corollaire**

Si $F$ n'est pas $C^\infty$ à l'origine, alors elle n'est pas DSE.

---

**Théorème**

Soit $F$ définie au voisinage de 0. Alors $F$ DSE à l'origine si et seulement si

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in ]-\alpha, \alpha[ \;/\; \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

---

### 8.4.3 Méthodes

**Utilisation de la formule de Taylor**

*Exemples* :

1. $f(x) = \exp x$, $f^{(k)}(x) = \exp 0$

$$\exp x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t)\,\mathrm{d}t$$
$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t)\,\mathrm{d}t \right|$$
$$\leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} \exp(t)\,\mathrm{d}t \right|$$
$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{|x|}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. Plus généralement, $F$ de classe $C^\infty$ au voisinage de 0, telle que

$$\exists r > 0, \exists M \in \mathbb{R}_+ \diagup \forall x \in [-r, r], \forall n \in \mathbb{N} \qquad |F^{(n)}(x)| \leq M$$

(on parle de dérivée infiniment majorée)
Le reste de Raylor est :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(terme général d'une série convergente)

3. $F(x) = \cos x$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad F^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \qquad |F^{(n)}| = |\cos(x + n\pi/2)| \leq 1 - M$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$$

4. $F(x) = \sin x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

5. 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \cos y = \cos(\sqrt{x})$$

### Méthode de dérivation ou d'intégration

*Exemples* :

1.
$$\forall x \in ]-1,1[ \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
$$\forall x \in ]-1,1[ \qquad -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$|x| < 1 \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$|x| < 1 \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$
$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

2.
$$\forall x \in ]-1,1[ \qquad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$
$$\forall x \in [-1,1] \qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

3. Soit $\alpha \in ]0,\pi[$, on cherche un DSE de
$$F_\alpha : x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\ \tan(\alpha/2)\right)$$

$$\begin{aligned} F'_\alpha(x) &= \frac{2\tan(\alpha/2)}{(1-x)^2 + (1+x)^2 \tan^2(\alpha/2)} \\ &= \frac{\lambda}{x - \mathrm{e}^{i\alpha}} + \frac{\overline{\lambda}}{x - \mathrm{e}^{-i\alpha}} \qquad \lambda = \frac{i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - x} &= \frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1 - \mathrm{e}^{i\alpha} x} = \mathrm{e}^{i\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{i\alpha} x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{i\alpha})^{n+1} x^n \qquad (|x| < 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(x) = 2\Re\left(\frac{1}{2i}\ \frac{1}{\mathrm{e}^{-i\alpha} - x}\right) &= 2\Re\left(\frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{i\alpha})^{n+1} x^n\right) \\ = \Re\left(-i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(n+1)\alpha} x^n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n+1)\alpha\ x^n \end{aligned}$$

$$F(x) - F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\alpha\ x^{n+1}}{n+1}$$
$$F(0) = \frac{\alpha}{2}$$
$$\forall x \ / \ |x| < 1 \qquad F(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}\ x^n$$

**Cas d'une fraction rationnelle n'admettant pas 0 comme pôle**

*Exemples* :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^{p}\sum_{h=1}^{r_k} \frac{a(k,h)}{(x-a_k)^h} \qquad \forall a(k,h) \in \mathbb{C}$$

(DSE sur $\mathbb{C}$)

On cherche le DSE de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a_k)^h}$. Les zéros de Q sont $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$.

$$\frac{1}{(x-a_k)^h} = \frac{1}{(-\alpha_k)^h}\ \frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{a_k}\right)^h}$$

– $h = 1$

$$\frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{a_k}\right)^h} \underbrace{=}_{\left|\frac{x}{\alpha_k}\right| < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha_k}\right)^n \underbrace{=}_{|x| < \alpha_k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(\alpha_k)^n}$$

– $h = 2, \ldots, h = r_k$ : on utilise une formule de dérivation

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} x^n \qquad |x| < 1$$

Remarque : cette formule est vraie pour $|z| < 1$ et $z \in \mathbb{C}$ (démonstration par récurrence).

**Combinaison linéaire**

*Exemples* :

1.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x}) & x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & x < 0 \end{cases}$$

**Méthode de l'équation différentielle**

*Exemples* :

1. DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
   - si $\alpha \in \mathbb{N}$, le DSE est obtenu par la formule du binôme.
   - si $\alpha = -(p+1)$, la formule est aussi connue (cas d'une fraction rationnelle).
   - cas général : $F(x) = (1+x)^\alpha$, alors $F$ est $C^\infty$ au voisinnage de 0, et

$$F'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$(1+x)F'(x) = \alpha(1+x)^\alpha$$
$$(1+x)F'(x) = \alpha F(x)$$

   $F$ est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   On recherche les solutions DSE à l'origine.
   - Analyse : si $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution du problèmevec un rayon de convergence $R > 0$

$$(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n\Big) x^n = 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0$

$$\begin{aligned} na_n &= -(n-1-\alpha)a_{n-1} \\ (n-1)a_{n-1} &= -(n-2-\alpha)a_{n-2} \\ &\vdots \\ 2a_2 &= -(1-\alpha)a_1 \\ a_1 &= -\alpha a_0 \end{aligned}$$

– 1^er^ cas : $\alpha \in \mathbb{N}$, c'est à dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \alpha = n_0 \Rightarrow a_{n_0+1} = 0 \quad \ldots \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n = 0$$

On sait que $a_0 = 1$ (car $g(0) = 1$), on calcule $a_1, \ldots, a_{n_0}$ ; on obtient une solution polynomiale (Newton), et $R = +\infty$.

– 2^e^ cas : $\alpha \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \neq 0$

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ a_0$$

Les solutions DSE à l'origine sont (si $a \notin \mathbb{N}$) du type :

$$x \longmapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ x^n$$

– Synthèse : cette série admet un rayon $R > 0$. En effet

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \xrightarrow[+\infty]{} 1 \Longrightarrow R = 1$$

– Conclusion : si $\alpha \notin \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, 1[$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ x^n$$

2. Fonction de Bessel $J_0$.

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)\mathrm{d}t$$

On recherche le DSE de $J_0$

– 1^re^ étape : $J_0$ vérifie l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0$$

Notons

$$f(x,t) = \cos(x \sin t)$$

$J_0$ est $C^2$ sur $\mathbb{R}$, en effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} &= -\sin t\ \sin(x \sin t) \\ \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} &= -\sin^2 t\ \cos(x \sin t) \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, \pi/2]$, $x \mapsto \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, les dérivées partielles premières et seconde de $f$ en fonction de $t$ sont continues et intégrables sur $[0, \pi/2]$.

$$\forall t \in [0,\pi/2], \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leq 1$$
$$\left|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right| \leq 1$$

Alors on a

$$J_0' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} -\sin t \ \sin(x\sin t)\ \mathrm{d}t$$
$$J_0'' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \ \cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
J_0'(x) &= \frac{-2}{\pi}\left(\cos t\sin(x\sin t)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t \ x \ \cos t \ \cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{-2x}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\cos(x\sin t)\ \mathrm{d}t\\
&= -xJ_0(x) - xJ_0''(x)
\end{aligned}$$

– 2e étape : recherche des solutions DSE

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad R > 0$$
$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$
$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big((n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\Big)x^n = 0$$
$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1\end{cases}$$
$$(n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1} \qquad \forall n \geq 1$$

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{(2\cdot 4\cdots(2p))^2}$$

Synthèse : $R = +\infty$
Les solutions DSE à l'origine de l'équation différentielle sont du type

$$x \longmapsto a_0\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \ \frac{x^{2n}}{2\cdot 4\cdots(2n)^2}\right)$$

– 3e étape :

$$\begin{aligned}
J_0(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) \; \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \sin t)^{2n}}{(2n)!} \; \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n} \; \mathrm{d}t \right) \; x^{2n}
\end{aligned}$$

# Chapitre 9

# Séries de Fourier

Rappels : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(|c_n| + |c_{-n}|\Big)$ convergente, alors l'application $x \mapsto S(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n\,\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-inx})$ a un sens et de plus $S$ est continue, $2\pi$-périodique.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |c_n\,\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}|$$

C'est à dire qu'il y a convergence normale.

## 9.1 Somme partielle de Fourier d'une fonction $2\pi$-périodique, continue par morceaux

### 9.1.1 Structure préhilbertienne

**Ensemble des fonctions $2\pi$-périodiques, continues**

On notera cet ensemble $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

**Définition**

On envisage le produit hermitien :

$$\forall f, g \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \qquad \langle\, f \mid g \,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(t)g(t)\;\mathrm{d}t$$

Posons $\forall n \in \mathbb{Z} \quad e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e_n(t) = e^{int}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ famille orthonormale de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

---

*Preuve* :

$$\langle\, e_p \mid e_q \,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(q-p)t}\;\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{ll} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{array}\right.$$

□

*Remarques* :

- Généralisation : soit $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, si $F \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto f(t) = F\left(\dfrac{T}{2\pi}\,t\right)$, alors $f(t + 2\pi) = f(t)$. On a donc le produit hermitien

$$\forall F, G \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \qquad \langle\, F \mid G \,\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{F}(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad E_n(t) = \mathrm{e}^{\frac{int2\pi}{T}}$ est $T$-périodique, et $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

**Définition**

Autres normes :
– Norme quadratique

$$f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$$

– Norme de la convergence en moyenne

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

– Norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup(|f(t)|, t \in [0, 2\pi])$$

Et on a les équivalent suivantes :

$$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \qquad \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$$

**Ensemble des fonctions $2\pi$-périodiques, continues par morceaux**

**Définition**

Notons $E = C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et $2\pi$-périodiques. Soit $f \in E$ telle que
– $f_{|[0,2\pi[}$ soit continue par morceaux et f $2\pi$-périodique.
– $f_{|[0,2\pi[}$ admet un nombre fini de discontinuité de première espèce.
On peut définir les trois objets suivants $\|f\|_1, \|f\|_2, \|f\|_\infty$ tels qu'ils sont définis plus haut. $\|.\|_\infty$ est bien une norme, mais $\|f\|_1, \|f\|_2$ n'en sont pas ici.

### 9.1.2 Coefficients de Fourier

On a

$$\langle\, e_n \,|\, f \,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int} f(t) \, \mathrm{d}t$$

**Définition**

Soit $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on appelle coefficient de Fourier (exponentiel) de $f$ la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-int} f(t) \, \mathrm{d}t$$

Avec $\alpha \in \mathbb{R}$, fixé.

### Formulaire

$f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
– $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

Cas particulier : $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$$

– posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto g(t) = f(-t)$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-int} f(-t) \, \mathrm{d}t \\ &\underbrace{=}_{u=-t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{-\alpha-2\pi} \mathrm{e}^{inu} f(u) \, (-\mathrm{d}u) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha-2\pi}^{-\alpha} \mathrm{e}^{inu} f(u) \, \mathrm{d}u \\ &= c_{-n}(f) \end{aligned}$$

– $a \in \mathbb{R}$, $g : x \mapsto g(x) = f(x+a)$ alors

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-int} f(t+a) \, \mathrm{d}t \\ &\underbrace{=}_{u=t+a} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha+a}^{\alpha+2\pi+a} \mathrm{e}^{-in(u-a)} f(u) \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ina}}{2\pi} \int_{\alpha+a}^{\alpha+2\pi+a} \mathrm{e}^{-inu} f(u) \, \mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{ina} c_n(f) \end{aligned}$$

– $f$ continue et $C^1$ par morceaux, alors

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-int} f'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \underbrace{\mathrm{e}^{-int} f'(t) \Big|_{\alpha}^{\alpha+2\pi}}_{=0} + in \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-int} f(t) \, \mathrm{d}t \right) \\ &= in c_n(f) \end{aligned}$$

– Généralisation :

$$c_n(f^{(p)}) = (in)^p c_n(f)$$

– Cas d'une série trigonométrique normalement convergente : on suppose

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \diagup \sum_{n \in \mathbb{N}} \Big( |c_n| + |c_{-n}| \Big)$$

convergente. Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{inx}$

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{Z} \qquad c_p(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ipt} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{int} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{i(n-p)t} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)t} \,\mathrm{d}t = c_p
\end{aligned}$$

**Coefficients trigonométriques**

Soit $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\, \cos(nt) \,\mathrm{d}t \\
\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\, \sin(nt) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Lien entre $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ : $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) \,\mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) \Big( \cos(nt) - i \sin(nt) \Big) \,\mathrm{d}t \\
c_{-n}(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t) \Big( \cos(nt) + i \sin(nt) \Big) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc les relations

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2} \Big( a_n(f) - i b_n(f) \Big) \\
c_{-n}(f) &= \frac{1}{2} \Big( a_n(f) + i b_n(f) \Big) \\
a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) \\
b_n(f) &= i \Big( c_n(f) - c_{-n}(f) \Big)
\end{aligned}$$

– $a_n(f), b_n(f) \in \mathbb{R}$
– Soit $g \,/\, g(t) = f(-t)$, on a

$$a_n(g) = -b_n(f)$$

On en déduit que si $f$ est paire, $b_n(f) = 0$, et si $f$ est impaire, alors $a_n(f) = 0$

### 9.1.3 Somme partielle de Fourier de rang n de f

Notation : $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}_n$, ensemble des fonctions polynômes trigonométriques, $\deg \mathcal{P}_n \leq n$, c'est à dire $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_p \diagup p \in [\![-n, n]\!])$.

$$P \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow \exists (a_k)_{k \in [\![-n,n]\!]} \diagup \forall t \in \mathbb{R} \qquad P(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \,\mathrm{e}^{ikt}$$

On sait que $C_{2\pi} = \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^{\perp}$ (orthogonalité vis à vis du produit scalaire $\langle\, f \,|\, g \,\rangle = \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f} g$).

**Définition**

On appelle somme partielle de Fourier de rang $n$ de $f \in C_{2\pi}$ la projection orthogonale de $f$ sur $\mathcal{P}_n$, c'est à dire

$$\sum_{k=-n}^{n} \langle\, e_k \,|\, f \,\rangle \; e_k = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

On notera

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \,\mathrm{e}^{ikt} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k(f) \cos(kt) + b_k(f) \sin(kt) \Big) \end{aligned}$$

---

**Définition**

Plus généralement, soit $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} S_n(f) : t \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \,\mathrm{e}^{ikt} = \frac{a_0(f)}{2} \\ + \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k(f) \cos(kt) + b_k(f) \sin(kt) \Big) \end{aligned}$$

On appelle série de Fourier de $f$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n = c_0(f) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \Big( c_n(f) e_n + c_{-n}(f) e_{-n} \Big)$$

---

**Théorème**

**Inégalité de Bessel**

Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=-n}^{n} \Big| \langle\, e_n \mid f \,\rangle \Big|^2 \leq \|f\|^2$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$$

On admet ce résultat pour $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

---

*Remarques* :
– donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ convergente, donc

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$$

## 9.2 Problèmes de convergence

### 9.2.1 Convergence en moyenne quadratique

**Théorème**

**Théorème de Bessel-Parseval**

Soit $f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En outre $f$ vérifie la formule de Parseval, $\forall f \in C_{m,2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big( |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \Big)$$

---

*Preuve* :

On se limite à $f \in C_{2\pi}$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = d(f, \mathcal{P}_n) = \inf(\|f - p\|_2 \,/\, p \in \mathcal{P}_n) = \|f - S_n(f)\|_2$$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow d_{n+1} \leq d_n$, donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante de $\mathbb{R}_+$, donc $d_n$ admet une limite quand $n$ tend vers l'infini. Il s'agit de prouver que $d = 0$.

$\forall \varepsilon \quad \exists p$ polynôme trigonométrique tel que $\|f - p\|_2 < \varepsilon$ (théorème de Weierstrass). Soit $n_0 = \deg p$

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq d_n \leq d_{n_0} \leq \|f - p\|_2 \leq \|f - p\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow d \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Formule de Parseval :

$$\Big| \|S_n(f)\|_2 - \|f\|_2 \Big| \leq \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|_2 = \|f\|_2$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\ e_k$$

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|^2\ \mathrm{d}t$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|^2\ \mathrm{d}t$$

□

*Exemples* :

1. Soit $f$ $2\pi$-périodique telle que $f(x) = \mathrm{e}^x$ si $x \in [-\pi, \pi]$.

$$n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f) = \frac{(-1)^n\ \operatorname{sh}\pi}{\pi(1-in)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\operatorname{sh}2\pi}{2\pi}$$

   Parseval :

$$\frac{\operatorname{sh}2\pi}{2\pi} = \frac{\operatorname{sh}^2\pi}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^2\pi}{\pi^2(1+n^2)}$$

$$= \frac{\operatorname{sh}^2\pi}{\pi^2}\left(1 + 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} - 1\right)\right)$$

$$1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2\pi}\ \frac{\operatorname{sh}2\pi}{2\pi} + 1 = \pi\tanh\pi + 1$$

2. $f(x) = x^2$ sur $[0, \pi]$

$$\begin{cases} a_n(f) = \dfrac{2}{3}\pi^2 \\ a_n(f) = \dfrac{4(-1)^n}{n^2} \end{cases}$$

$$\frac{2}{5}\pi^4 = \frac{4/3\ \pi^4}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right)\pi^4$$

$$\begin{aligned}
\zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \\
&= \frac{1}{16}\zeta(4) + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \\
&= \frac{15}{16}\zeta(4)
\end{aligned}$$

**Proposition**

Soit $\varphi : C_{2\pi} \to \mathbb{K}^2, f \mapsto \varphi(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, alors $\varphi$ est linéaire et injective.

*Preuve* :

$$f \in \ker\varphi \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = 0$$

Appliquons la formule de Parseval $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$, c'est à dire $\|f\|_2^2 = 0 \Rightarrow f = 0$

□

*Remarques* :

– autre formulation : $f, g \in C_{2\pi}$, alors $f = g \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)$

**Proposition**

Soient $f, g \in C_{m,2\pi}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \overline{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n}(f)c_n(g)$$

### 9.2.2 Théorèmes de convergence ponctuelle

**Théorème**

**Théorème de Dirichlet de convergence normale**

Soit $f \in C_{2\pi}$ et $f \in C^1_{m,2\pi}$. Alors la série de Fourier de $f$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $f$. A fortiori elle converge simplement, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big)$$

---

*Preuve* :

On a $c_n(f') = in\, c_n(f)$, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\right)$$

Les séries de terme général $1/n^2$ et $|c_n(f')|^2$ sont convergentes (Parseval) donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|$ convergente $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, x \mapsto g(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx}$ et montrons que $f = g$. $f$ est continue, $2\pi$-périodique et $g$ est continue, $2\pi$-périodique (car il y a convergence normale).

Calculons $c_p(g)$ :

$$\begin{aligned} c_p(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-ipt} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-ipt} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \mathrm{e}^{-ipt}\,\mathrm{e}^{int} \\ &= c_p(f) \end{aligned}$$

Donc $f = g$.

□

**Théorème**

**Théorème de Dirichlet de convergence simple**

Soit $f \in C^1_{m,2\pi}$, alors sa série de Fourier converge simplement vers la régularisée de $f$ notée $\tilde{f}$ et définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{\lim\limits_{n\to t^+} f(t) + \lim\limits_{n\to t^-} f(t)}{2}$$

---

Traduction pratique :

$$f \in C^1_{m,2\pi} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, \mathrm{e}^{inx}$$

Chapitre 10

# Équations différentielles linéaires

## 10.1 Généralités

### 10.1.1 Définitions

**Définition**

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute structure du type

$$X' = a(t)X + b(t) \tag{L}$$

avec

$$a : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$$
$$b : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

continues.

On appelle équation homogène associée à (L) l'équation

$$X' = a(t)X \tag{H}$$

Soit $J$ un sous-intervalle de $I$. On appelle $J$-solution de (L) toute application $\varphi : J \to \mathbb{K}^n$ de classe $C^1$ et vérifiant

$$\varphi'(t) = a(t)\Big(\varphi(t)\Big) + b(t)$$

---

*Remarques* :
- si $n = 1$, alors on a $x' = a(t)x + b(t)$ avec $a, b \in C(I, \mathbb{K})$.
- $S_I(H)$ est n $\mathbb{K}$-ev.
- Soit $J \subset I$, alors on peut démontrer $S_J(L) \neq 0$, et de plus $S_J(L)$ est un espace affine de direction $S_J(H)$.
  En pratique : soient $\varphi_1, \varphi_2 \in S_J(L)$, alors $\varphi_1 - \varphi_2 \in S_J(H)$. En effet, on a $\forall t \in J \quad (\varphi_1 - \varphi_2)'(t) = a(t)(\varphi_1 - \varphi_2)(t)$

**Proposition**

L'ensemble des solutions sur $J$ de l'équation (L) est définie par l'ensemble des solutions sur $J$ de (H) auquel on rajoute une solution particulière de (L).

---

**Théorème**

**Principe de superposition**

On suppose que $b = b_1 + \cdots + b_p$, avec $\forall i \in [\![1, p]\!], b_i \in C(I, \mathbb{K})$ et

$$X' = a(t)X + b_i(t) \tag{Li}$$

Si $\varphi_i$ est solution particulière de (Li), alors $\varphi_1 + \cdots + \varphi_p$ est solution particulière de (L).

---

### 10.1.2 Théorème de Cauchy

**Théorème**

**Théorème fondamental**

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = a(t)X + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $\varphi$ vérifiant, $\forall t \in J$ :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t) \\ \varphi(t_0) = X_0 \end{cases}$$

---

**Corollaire**

$S_I(H)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$.

---

**Définition**

**Matrice wronskienne**

Système fondamental de solution de l'équation homogène

Désignons par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $n$ solutions de (H), et $t \in I$.

La matrice des composantes de $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ relativement à la base canonique $\mathbb{K}^n$ s'appelle matrice wronskienne de la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et on appelle wronskien de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ le déterminant de la matrice wronskienne. On note

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) = \det_B(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

---

**Proposition**

Il y a équivalence entre

1. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base de $S_I(H)$
2. $\exists t_0 \in I \quad W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$
3. $\forall t \in I \quad W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) \neq 0$

Dans ce cas on dit que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solution de (H), c'est à dire $S_I(H) = \text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

---

### 10.1.3 Méthode de variation de la constante

**Proposition**

$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ solution de (L) $\iff \sum_{k=1}^{n} c_n' \varphi_k = b$

## 10.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

**Définition**

Toute écriture du type $x' = a(t)x + b(t)$, avec $a, b \in C(I, \mathbb{K})$ ou du type $\alpha(t)x' + \beta(t)x + \gamma(t) = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in C(I, \mathbb{K})$, et $\alpha(I) \subset \mathbb{K}^*$.

### 10.2.1 Résolution pratique

**Proposition**

Problème de Cauchy : $\exists ! \varphi \in C^1(I, \mathbb{K})$ tel que

$$\begin{cases} \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in (I, \mathbb{K})$

Soit $A : I \to \mathbb{K} \ / \ t \mapsto A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u) \, \mathrm{d}u$, on introduit l'application $\Psi(t) = C(t) \, \mathrm{e}^{A(t)}$.

On a donc $C'(t) = b(t) \, \mathrm{e}^{-A(t)}$, d'où $C(t) = C + \int_{t_0}^{t} b(v) \, \mathrm{e}^{-A(v)} \, \mathrm{d}v$.

Finalement :

$$\Psi(t) = C \, \mathrm{e}^{A(t)} + \mathrm{e}^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(v) \, \mathrm{e}^{-A(v)} \, \mathrm{d}v$$

*Remarques* :
- Soient $\varphi_1, \varphi_2$ deux solutions de (L), vérifiant $\exists t \in I \ / \ \varphi_1(t \neq \varphi_2(t)$, alors la solution générale est du type $\varphi_1 + C(\varphi_2 - \varphi_1)$.

### 10.2.2 Étude d'un exemple

*Exemples* :

Révolvons sur $\mathbb{R}_-^*, ]0,1[, ]1,+\infty[$ l'équation

$$2t(t-1)x' + (2t-1)x + 1 = 0$$

On a l'équation homogène

$$x' + \frac{2t-1}{2t(t-1)}\, x = 0$$

Et sa solution est

$$x(t) = \frac{C}{\sqrt{|t^2-t|}}$$

On se restreint aux intervalles positifs.
– sur $]0,1[$, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 1

$$\varphi(t) = \frac{D}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{1}{2}\frac{\arccos(2t-1)}{\sqrt{t(t-1)}}$$

– sur $]1,+\infty[$

$$\varphi(t) = \frac{D}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{argch}(2t-1)}{\sqrt{t(t-1)}}$$

$$2(1+h)hz' + (1+2h)z + 1 = 0$$
$$z(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\, h^n$$

## 10.3 Systèmes différentiels à coefficients constants

**Définition**

On suppose que $a \in C(I, \mathcal{L}(\mathbb{K}^n))$ est constante sur $I = \mathbb{R}$, cest à dire $\forall t \quad a(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est indépendante de $t$, et on a

$$X' = AX + b(t)$$
$$X' = AX$$

Si $A = (z_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$, alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i(t)$$

### 10.3.1 Résolution de (H) lorsque $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$

*Remarques* :
- Soit $V$ un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$ ($\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$), alors $V \neq 0$ et $AV = \lambda V$. Je dis que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} V$ est une solution particulière de (H).
- Si de plus $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, soit $(V_1, \dots, V_n)$ la famille des vecteurs propres associés, alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de (H), c'est à dire $S_R(H) = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.
  En effet :
  $$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \det(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (V_1, \dots, V_n) \neq 0$$
  donc $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
  Conclusion : $\varphi$ solution de (H) $\Leftrightarrow \exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
  $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \mathrm{e}^{\lambda_j t} V_j$$
- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose $A$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $V$ vecteur propre associé, alors on a
  $$\begin{aligned} &AV = \lambda V \\ &\overline{AV} = \overline{\lambda V} \Leftrightarrow \overline{A}\,\overline{V} = \overline{\lambda}\,\overline{V} \\ &A\overline{V} = \overline{\lambda}\,\overline{V} \end{aligned}$$
  On recherche dans ce cas des solutions réelles de (H). Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système fondamental de solution de (H) dans $\mathbb{C}$, c'est à dire
  $(\varphi_1, \overline{\varphi_1}, \dots, \varphi_p, \overline{\varphi_p}, \underbrace{\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_q}_{\text{solutions réelles}})$ base de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(H)$ (en tant que $\mathbb{C}$-ev), alors
  $(\Re(\varphi_1), \Im(\overline{\varphi_1}), \dots, \Re(\varphi_p), \Im(\overline{\varphi_p}), \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_q)$ est un système fondamental de $S_{\mathbb{R}}(H)$ (en tant que $\mathbb{R}$-ev).

### 10.3.2 Recherche d'une solution particulière de (L)

On utilise la méthode de la variation de la constante. On recherche une solution sous la forme $c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ ($c_j$ dérivable). On se ramène à $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j' \varphi_j = b$.

## 10.4 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

**Définition**

Il s'agit des équations de la forme

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

avec $a, b, c \in C(I, \mathbb{K})$.

---

*Remarques* :

– l'écriture peut aussi se traduire sous la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Ou encore

$$X' = A(t)X + B(t)$$

Résoudre l'équation revient donc à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^2$.

– L'ensemble $S_I(H)$ des solutions de l'équation homogène $\{\varphi \in C^2(I, \mathbb{K}) \ / \ \forall t \in I \quad \varphi''(t) + a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi = 0\}$ est un $\mathbb{K}$-ev (sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{K})$).

– L'ensemble $S_I(L)$ des solutions de l'équation est une variété affine dirigée par l'espace vectoriel $S_I(H)$. La solution générale s'exprime par la somme de la solution générale de $S_I(H)$ et d'une solution particulière de l'équation.

### 10.4.1 Problème de Cauchy

**Théorème**

**Théorème de Cauchy**

Soit $(t_0, x_0, x'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, alors il existe une unique solution $\varphi$ de l'équation

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

vérifiant

$$\varphi(t_0) = x_0 \qquad \varphi'(t_0) = x'_0$$

---

**Proposition**

Soit $t_0 \in I$, et

$$\begin{aligned} u_{t_0} : S_I(H) &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ \varphi &\longmapsto u_{t_0}(\varphi) = (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{aligned}$$

$u_{t_0} \in \mathcal{L}(S_I(H), \mathbb{K}^2)$ et la traduction du théorème précédent donne la bijectivité de $u_{t_0}$.

Donc $S_I(H) \simeq \mathbb{K}^2$, donc $\dim S_I(H) = 2$

---

**Définition**

Soit $\varphi_1?\varphi_2$ deux solutions. On appelle déterminant wronskien de $(\varphi_1, \varphi_2)$ en $t_0$ le déterminant

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{vmatrix}$$

*Remarques* :

– On a $W'(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_2\varphi_1''$ et

$$W(\varphi_1, \varphi_2)' + aW(\varphi_1, \varphi_2)$$
$$\Rightarrow W(\varphi_1, \varphi_2) = k(x)\,\mathrm{e}^{-\int a}$$

**Théorème**

Soit $(\varphi_1, \varphi_2)$ un couple de solution de (H), alors il y a équivalence entre :

1. $(\varphi_1, \varphi_2)$ base de l'ensemble des solutions de (H)
2. $\exists t_0 \in I \quad \varphi_1(t_0)\varphi_2'(t_0) - \varphi_2(t_0)\varphi_1'(t_0) \neq 0$
3. $\forall t \in I \quad \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' \neq 0$

$(\varphi_1, \varphi_2)$ s'appelle un système fondamental de solution de (H).

### 10.4.2 Recherche d'une base des solutions de l'équation homogène

#### Coefficients constants

Soit $x'' + ax' + bx = 0$, $a, b \in \mathbb{K}$. On recherche des solutions du type $t \mapsto \varphi(t) = \mathrm{e}^{rt}$. Si $\varphi$ est solutions, alors

$$r^2\,\mathrm{e}^{rt} + ar\,\mathrm{e}^{rt} + b\,\mathrm{e}^{rt} = 0$$
$$\Rightarrow r^2 + ar + b = 0$$

La seconde équation est appelée équation caractéristique. On a $\Delta = b^2 - 4a$

– si $\Delta \neq 0$, $r_1, r_2$ sont deux solutions distinctes

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t} \qquad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{r_2 t}$$
$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = (r_2 - r_1)\,\mathrm{e}^{(r_1 + r_2)t} \neq 0$$
$$S_I(H) = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$$

– si $\Delta = 0$, $r = -a/2$ est solution double et $a^2 = 4b$. On montre que $\varphi_2 : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{rt}$ est aussi solution

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \mathrm{e}^{2rt}$$

$\varphi$ solution dre (H) $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K} \mathbin{/} \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = (\alpha t + \beta)\,\mathrm{e}^{rt}$

**Méthode de Lagrange**

Cas où l'on détient une solution particulière de (H) ne s'annulant pas sur I.

Description de la méthode : soit $\varphi$ une solution de l'équation homogène telle que $\varphi(t) \neq 0$. On recherche une deuxième solution sous la forme $\Psi = u\varphi$, avec $u$ deux fois dérivables.

$\Psi$ est solution si et seulement si $u''\varphi + u'(2\varphi' + a\varphi) = 0$ ($u'$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1). Par une double quadrature, on obtient $u$.

*Exemples* :

$$(t^2+1)x'' - 2x = 0$$

On recherche une solution polynomiale : solution DSE $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ $(R > 0)$

$$(t^2+1)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2a_n = 0$$

$$(n+2)a_{n+2} = -(n-2)a_n$$

$$a_0 = 1 \qquad 2a_2 = 2 \qquad a_4 = \cdots = 0$$

Donc finalement $\varphi(t) = t^2 + 1$. On recherche $\Psi$ solution sous la forme $\Psi(t) = u(t)(t^2+1)$

$$\Psi' = u'(t^2+1) + 2tu$$

$$\Psi'' = u''(t^2+1) + 4tu' + 2u$$

$$(t^2+1)^2u'' + (t^2+1)4tu' = 0$$

$$u = \arctan t + \frac{t}{t^2+1}$$

**Cas des coefficients constants**

**Proposition**

Soit l'équation $x'' + ax' + bx = \mathrm{e}^{\alpha t}P_n(t)$, avec $P$ polynôme de degré $n$, et $a \in \mathbb{K}$.
On recherche des solutions du type (avec $\deg Q = n$) :
– $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}Q_n(t)$, si $\alpha$ n'est pas solution de l'équation carctéristique.
– $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}tQ_n(t)$ si $\alpha$ est une racine simple.

- $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} t^2 Q_n(t)$ si $\alpha$ est une racine double. On peut aussi rechercher une solution particulière du type $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} z(t)$

---

# Chapitre 11

# Géométrie des espaces vectoriels euclidiens

Objet : on s'intéresse à $u \in \mathcal{L}(E) \diagup \forall x, y \in E$
– $\langle\, u(x) \,|\, u(y) \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle$ (automorphismes orhogonaux)
– $\langle\, u(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, u(y) \,\rangle$ (endomorphismes orhogonaux)

## 11.1 Automorphismes orthogonaux

**Définition**

**Endomorphisme orthogonal**

On appelle endormorphisme othogonal tout endomorphisme $u$ de $E$ vérifiant

$$\forall x \in E \qquad \|u(x)\| = \|x\|$$

*Remarques* :
– $u$ endormorphisme orthogonal alors $u$ automorphisme.
– Notation : $\mathcal{O}(F)$, ensemble des automorphismes orthogonaux de $E$.

### 11.1.1 Diverses caractéristiques

**Théorème**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre :

1. $u \in \mathcal{O}(E)$ ($u$ conserve la norme)
2. $\forall x, y \in E \quad \langle\, u(x) \,|\, u(y) \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle$
3. $u$ transforme toute base orthonormée en orthonormale
4. $\exists B$ BON $\diagup$ $u(B)$ BON
5. Soit $B$ une BON et $A = \mathrm{Mat}_B(u)$ alors $AA^t = I$
6. Soit $B$ une BON et $A = \mathrm{Mat}_B(u)$ alors $A^tA = I$
7. Soit $B$ une BON et $A = \mathrm{Mat}_B(u)$, alors $A$ est inversible et $A^{-1} = A^t$

*Exemples* :

Symétrie orthogonale.

Rappel : $s \in \mathcal{L}(E) \diagup s^2 = \mathrm{id}$, $s$ s'appelle un automorphisme involutif ou symétrie.

$E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$

On dit que $s$ est une symétrie orthogonale si $\ker(s - \mathrm{id}) \perp \ker(s + \mathrm{id})$. Dans ce cas, $s \in \mathcal{O}(E)$. En effet :

$$\begin{cases} x = y + z \\ s(x) = y - z \end{cases}$$

On appelle réflexion de $E$ tout symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan $H = \text{Vect}(a)^{\perp}$

$$s(x) = x - 2\frac{\langle\, a \,|\, x \,\rangle\, a}{\|a\|^2}$$

*Remarques* :
- $u, v \in E \;/\; u \neq v$ et $\|u\| = \|v\|$ alors il existe une unique réflexion $s$ qui échange $u$ et $v$.

### 11.1.2 Structure

**Théorème**

$(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. On l'appelle groupe orthogonal de $E$.

Soient $f, g \in \mathcal{O}(E)$, $\forall x \in E \quad f \circ g^{-1} \in \mathcal{O}(E)$

---

*Remarques* :
- Soit $u \in \mathcal{O}(E), A = \text{Mat}_B(u)$, alors $\det A = \pm 1$

**Théorème**

Soit $S\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \;/\; \det u = 1\}$, alors $(S\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$. On l'appelle le groupe spécial orthogonal de $E$.

On a $u \circ v^{-1} \in S\mathcal{O}(E)$.

---

*Remarques* :
- Toute réflexion n'appartient pas à $S\mathcal{O}(E)$.

### 11.1.3 Matrice orthogonale

**Proposition**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il y a équivalence entre :
1. $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^t$
2. $A$ vérifie $AA^t = I$
3. $A$ vérifie $A^tA = I$
4. Les vecteurs colonnes de $A$ forment une BON de $\mathbb{R}^n$ (structure euclidienne canonique).

---

*Remarques* :
- $A$ matrice orthogonale $\Leftrightarrow$ $A$ représente la matrice en BON d'un endomorphisme orthogonal.
- $A$ matrice orthogonale $\Leftrightarrow$ $A$ matrice de passage d'un changement de deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.
- On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales et $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales telles que $\det A = 1$.

**Théorème**

- $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times) \subset (GL_n(\mathbb{R}), \times)$. On l'appelle groupe orthogonal d'indice $n$.
- $(S\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times) \subset (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$. On l'appelle groupe spécial orthogonal d'indice $n$.

*Remarques* :
- $B$ une BON de $(E, \langle\,|\times\rangle)$, et $\Psi_B : \mathcal{O}(E) \to O_n(\mathbb{R}),\ u \mapsto \Psi_B(u) = \mathrm{Mat}_B(u)$. Alors $\Psi_B$ est un isomorphisme d'algèbre qui induit un isomorphisme du groupe $(S\mathcal{O}(E), \circ)$ sur $(S\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$

### 11.1.4 Propriétés spectrales

**Proposition**

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ :

1. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1, -1\}$, $\ker(u - \mathrm{id}) \perp \ker(u + \mathrm{id})$
2. $u$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ $u$ symétrie orthogonale
3. soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors $F^\perp$ est aussi stable par $u$.

### 11.1.5 Classification en dimension inférieure à 3

$\dim E = 1$

- $\mathcal{O}_1(\mathbb{R}) = \{1, -1\}$
- $\mathcal{O}(E) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$

$\dim E = 2$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \iff \begin{vmatrix} a & c \\ b & -d \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; -d=\lambda a, c=\lambda b \end{cases}$$

Au final :

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \lambda^2=1 \\ -d=\lambda a \\ c=\lambda b \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R} \;/\; a=\cos\theta, b=\sin\theta \\ \lambda=\pm 1 \\ -d=\lambda a \\ c=\lambda b \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit $B = (i, j)$ BON directe. Alors

$$u(i) = \cos\theta \cdot i + \sin\theta \cdot j$$
$$u(j) = -\sin\theta \cdot i + \cos\theta \cdot j$$

$u$ s'appelle la rotation de mesure d'angle $\theta$.
Soit

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On a $S_\varphi^2 = I_2$. Donc $S_\varphi$ est une symétrie orthogonale et une symétrie axiale orthogonale. Il s'agit donc d'une réflexion.

**Proposition**

Formulaire
- $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$
- $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$
- $S_\varphi \times S_{\varphi'} = R_{\varphi-\varphi'}$
- $R_\theta = S_\varphi \times S_{\varphi-\theta} = S_{\varphi'+\theta} \times S_{\varphi'}$

## 11.2 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien

**Définition**

**Endomorphisme symétrique**

Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit $u$ est un endomorphisme symétrique de $E$ si

$$\forall x, y \in E \qquad \langle\, u(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, u(y) \,\rangle$$

Notation : $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $E$

---

*Exemples* :

1. $\mathrm{id} \in S(E)$
2. projection orthogonale

**Proposition**

$p$ projecteur de $E$, alors $p$ projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p \in S(E)$.

---

### 11.2.1 Matrice en base orthonormale

*Remarques* :
– $B = (e_1, \ldots, e_n)$ BON de $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Mat}_B(u) = \Big(\langle\, e_i \,|\, u(e_j) \,\rangle\Big)$
– $\mathrm{tr}\, u = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_B(u)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i \,|\, u(e_i) \,\rangle$

**Proposition**

$u \in \mathcal{L}(E)$, $B$ BON de $E$, $\dim E = n$, alors

$$u \in S(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) \in S_n(\mathbb{R})$$

---

**Proposition**

$(S(E), +, \cdot)$, $\mathbb{R}$-ev isomorphe à $(S_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$. En particulier

$$\dim S(E) = \frac{n(n+1)}{2}$$

---

*Remarques* :
– soient $u, v \in S(E)$, alors $u \circ v \in S(E)$ si et seulement si $u \circ v = v \circ u$

### 11.2.2 Réduction des endomorphismes symétriques en base orthonormale

**Proposition**

Propriétés spectrales

Soit $u \in S(E)$, alors :

1. $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $F$ sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors $F^\perp$ est aussi stable par $u$.
3. Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

---

**Théorème**

**Théorème spectral**

Soit $u \in S(E)$ avec $(E, \langle \mid \rangle)$, espace vectoriel euclidien, alors $u$ admet une base orthonormale de vecteurs propres.

---

Traduction pratique :
– $u \in S(E) \Rightarrow E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{i \in [\![1,p]\!]}} \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$
– $u \in S(E) \Rightarrow \exists \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}, \exists (e_1, \ldots, e_n)$ BON de $E$ telle que $u(e_i) = \mu_i e_i$, donc $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

Traduction matricielle :
– soit $U \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists D \in D_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $U = PDP^{-1}$

### 11.2.3 Autre endomorphisme

*Remarques* :
– On a

$$\min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\lambda) \leq \frac{\langle\, x \mid u(x) \,\rangle}{\|x\|^2} \leq \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\lambda)$$

**Définition**

**Endomorphisme symétrique positif**

Soit $u \in S(E)$. On dit que $u$ est positif si $\forall x \in E$, on a $\langle\, x \mid u(x) \,\rangle \geq 0$. De même, $A \in S_n(\mathbb{R})$, on dit que $A$ est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \geq 0$.

De même avec la positivité stricte.

---

**Proposition**

Soit $u \in S(E)$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$.
– $u$ positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$
– $A$ positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$
Donc $\mathrm{Sp}({}^tMM) \subset \mathbb{R}_+$

## 11.3 Conique et quadrique

### 11.3.1 Coniques

**Définition**

**Conique**

Soit $R = (O, i, j)$ un repère cartésien orthonormé d'un plan affine euclidien. Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \diagup (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

– On appelle conique du plan affine tout ensemble

$$\Gamma = \{M \diagup \overrightarrow{\theta M} = xi + yj \diagup F(x, y) = 0\}$$

– $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2eg + f$

$F$ est une équation implicite de $\Gamma$.

**Proposition**

Types de coniques :
– Ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– Hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– Parabole :

$$y^2 - 2px = 0$$

**Proposition**

On a

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d & 2e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f \end{aligned}$$

rg $A = 1$

**Théorème**

Si Sp $A = \{\lambda, 0\}$ alors la conique est du genre parabole.

Il existe un repère orthonormé direct $(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ tel que $\Gamma$ admet une équation réduite sous la forme

$$\frac{X^2}{\eta^2} - 2pY + \varepsilon = 0$$

---

**Proposition**

| | Équation réduite | Nature de $\Gamma$ |
|---|---|---|
| $p \neq 0$ | $\frac{X^2}{\eta^2} = 2p\left(Y - \frac{\varepsilon}{2p}\right)$ | parabole |
| $p = \varepsilon = 0$ | $X^2 = 0$ | axe $O'Y$ (droite double) |
| $p = 0, \varepsilon = 1$ | $X^2 + b^2 = 0$ | $\emptyset$ |
| $p = 0, \varepsilon = -1$ | $X^2 - b^2 = 0$ | réunion de deux droites |

TABLE 11.1 – Classification des coniques

---

### 11.3.2 Quadriques

**Proposition**

| | |
|---|---|
| $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ | Sphère |
| $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$ | $H_1$ (hyperboloïde à une nappe) |
| $X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$ | $H_2$ (hyperboloïde à deux nappes) |
| $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ | hyperbole |
| $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ | PH (paraboloïde hyperbolique) |

TABLE 11.2 – Classification des quadriques

---

**Définition**

**Quadrique**

Une quadrique est de la forme :

$$\Gamma = \{M \ / \ ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + \alpha x + \beta y + \gamma z + g = 0\}$$

Ou encore

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + g = 0$$

---

$\operatorname{rg} A = 3$

On obtient une quadrique à centre $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$(\Omega, i, j, k)$ se transforme en $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = k$

$\operatorname{rg} A = 2$

Alors $\operatorname{Sp} A = \{\lambda_1, \lambda_2, 0\}$, avec 0 valeur propre simple. On réduit en

$$\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \gamma' Z + \delta' = 0$$

$\operatorname{rg} A = 1$

Alors $\operatorname{Sp} A = \{\lambda, 0\}$, avec 0 valeur propre double. On réduit en

$$\lambda X'^2 + \beta' Y' + \gamma' Z + \delta' = 0$$

# Chapitre 12

# Fonctions de plusieurs variables

On s'intéresse à des propriétés de différentiation

Soit

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) \end{aligned}$$

Alors on a

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + o_{(0,0)}(\sqrt{h^2+k^2})$$

Dans la suite du chapitre, sauf indication contraire, nous considérerons $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $a \in U$, avec $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

## 12.1 Applications de classe $C^1$

### 12.1.1 Dérivée selon un vecteur ou une direction

**Définition**

Application partielle en un point selon une direction

Soit $a \in U, h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$

$\exists r > 0 \not B(a,r) \subset U$ et choisissons $X = a + th \not N_p(th) = |t|N_p(h) < r$

Posons

$$\begin{aligned} \varphi_a : \left]\frac{-p}{N_p(h)}, \frac{p}{N_p(h)}\right[ &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \varphi_a(t) = f(a+th) \end{aligned}$$

Donc $\varphi_a$ est une fonction vectorielle d'une variable réelle.

$\varphi_a$ est une fonction vectorielle d'une variable réelle. Elle s'appelle application partielle de $f$ en $a$ selon la direction $h$.

---

**Définition**

Dérivée selon une direction en un point

On dit que $f$ admet une dérivée en $a$ semon la direction $h \neq 0$ si $\varphi_a$ est dérivable en 0, c'est à dire si

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_a(t) - \varphi_a(0)}{t - 0}$$

existe.

On notera cette limite $\varphi_a'(0) = D_h f(a)$

---

*Exemples* :

1. $\ell : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ avec $\ell$ linéaire

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_a(t) - \varphi_a(0)}{t} &= \frac{\ell(a+th) - \ell(a)}{t} \\ &= \frac{\ell(a) + t\ell(h) - \ell(a)}{t} = \ell(h) \xrightarrow[t \to 0]{} \ell(h)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \qquad D_h \ell(a) = \ell(h)$$

2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

On travaille en $a = (0,0)$ et pourtant $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.
Soit $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$, alors

$$\frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{t^2 h_2^2}{th_1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

**Définition**

**Dérivée partielle**

On dit que $f$ admet une dérivée partielle en $a$ selon la j^e direction si $D_{e_j} f(a)$ existe.

On notera

$$D_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

### 12.1.2 Applications de classe $C^1$

**Définition**

On dit que $f$ est de classe $C^1$ sur $U$ si $f$ admet des dérivées partielles sur $U$ continues sur $U$.

**Théorème**

Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, alors $\forall a \in U$, $f$ admet une dérivée partielle selon la direction $h = \sum_{j=1}^p h_j e_j$ en $a$ et

$$D_h f(a) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

### 12.1.3 Théorème fondamental

### 12.1.4 Opérations sur l'ensemble des applications de classe $C^1$

### 12.1.5 Matrice jacobienne d'une application de classe $C^1$

**Définition**

On appelle matrice jacobienne de $f$ en $a \in U$ la matrice de $\mathrm{d}f_a$ relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

Notation : $J_f$

On a

$$J_{f_a} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

### 12.1.6 $C^1$ difféomorphisme

**Définition**

Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $\phi$ est un $C^1$-difféomorphisme de $U$ sur $V$ si $\phi : U \to V$ est bijective, avec $\phi$ de classe $C^1$ sur $U$ et $\phi^{-1}$ sur $V$.

*Remarques* :
- $\mathrm{d}\phi_a \in GL(\mathbb{R}^n)$
  On a donc $(\mathrm{d}\phi_a)^{-1})\mathrm{d}\phi^{-1}_{\phi_a}$

**Théorème**

Il y a équivalence entre :

1. $\phi$ réalise un $C^1$-difféomorphisme de $U$ sur $\phi(U)$
2. $\forall a \in U, \mathrm{d}\phi_a \in GL_n(\mathbb{R})$

## 12.2 Fonction numériques de classe $C^1$

### 12.2.1 L'algèbre $C^1(U, \mathbb{R})$

**Définition**

$C^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications numériques définies sur $U$ et admettant des dérivées partielles continues sur $U$.

$\forall a \in U \quad \mathrm{d}f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, c'est à dire $\mathrm{d}f_a$ est une forme linéaire.

$$J_{f_a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Soit $h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, alors

$$\mathrm{d}f_a(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, h_j$$

---

**Théorème**

$C^1(U, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. En outre, l'application

$$\begin{aligned} \Psi_a : C^1(U,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \Psi_a(f) = \mathrm{d}f_a \end{aligned}$$

est linéaire, c'est à dire $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{d}(\lambda f + g)_a = \lambda \mathrm{d}f_a + \mathrm{d}g_a$$

De plus, on a

- $f \times g \in C^1(U, \mathbb{R})$
- $\forall a \in U$
$$\mathrm{d}(f \times g)_a = g(a)\mathrm{d}f_a + f(a)\mathrm{d}g_a$$
- si de plus $f \in C^1(U, \mathbb{R}^*)$, alors $1/f \in C^1(U, \mathbb{R}^*)$ et $\forall a \in U$
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{1}{f(a)^2}\, \mathrm{d}f_a$$

---

### 12.2.2 Gradient d'une fonction numérique de classe $C^1$

On travaille sur $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique.

**Théorème**

$\forall a \in U, \forall f \in C^1(U, \mathbb{R})$, alors il existe un unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ noté $\nabla f(a)$ vérifiant

$$\forall h \in \mathbb{R}^p \qquad \mathrm{d}f_a(h) = \langle\, \nabla f(a) \,|\, h \,\rangle$$

$\nabla f(a)$ s'appelle le vecteur gradient de $f$ en $a$.

Si de plus $(e_1, \ldots, e_p)$ base canonique de $\mathbb{R}^p$

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, e_j$$

---

### 12.2.3 Application à la recherche des extrema

**Définition**

**Point critique**

On appelle point critique de $f$ tout point $a \in U$ vérifiant $\nabla f(a) = 0$.

---

**Définition**

**Extremum**

On dit que $f$ admet un maximum local en $a \in U$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et vérifiant $\forall x \in B(a, r) \quad f(x) \leq f(a)$.

De même, $f$ admet un maximum local strict en $a \in U$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et vérifiant $\forall x \in B(a, r) \setminus \{a\} \quad f(x) < f(a)$.

---

**Théorème**

Si $f$ admet un extremum local en $a$, alors $a$ est un point critique de $f$.

---

## 12.3 Applications de classe $C^k$

### 12.3.1 Définitions

**Définition**

On définit les fonctions de classe $C^k$ par récurrence :$f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\forall j \in [\![1, p]\!] D_j f \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^n)$$

---

**Proposition**

$C^k(U, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel dont $C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace.

En outre, $\forall j \in [\![1, p]\!]$

$$\begin{aligned} D_j : C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^k(U, \mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto D_j f = \frac{\partial f}{\partial j} \end{aligned}$$

est linéaire.

---

**Théorème**

**Théorème de Schwarz**

$\forall i, j \in [\![1, p]\!]$ les restrictions de $D_i$ et $D_j$ à $C^2(U, \mathbb{R}^n)$ commutent, c'est à dire :

$$\forall f \in C^2(U, \mathbb{R}^n) \qquad D_i \circ D_j(f) = D_j \circ D_i(f)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

### 12.3.2 Opérations

**Proposition**

- Composition :
  Soient $f \in C^k(U \subset \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n), g \in (V \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, et $f(u) \subset V$, alors $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$.
- $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

**Proposition**

Caractérisation des $C^k$-difféomorphisme.

Soit $\phi \in (U, \mathbb{R}^p)$ avec $\phi$ injective de $U$ sur l'ouvert $V = \phi(U)$. Il y a équivalence entre :
- $\forall x \in U \qquad \mathrm{d}\phi_x \in GL(\mathbb{R}^p)$
- $\phi : U \to V$ est bijective avec $\phi$ et $\phi^{-1}$ de classe $C^k$.

# Chapitre 13

# Géométrie

Soit $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère cartésien orthonormé.

## 13.1 Plan

### 13.1.1 Droites

**Définition**

Notation : $D(a, \overrightarrow{u})$, avec $A(a, b)$, et

$$\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{u} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j}$$

Alors

$$M(x, y) \in D(A, \overrightarrow{u}) \iff \begin{cases} \exists\lambda \in \mathbb{R} \\ x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \end{cases}$$

qui est un système d'équations paramétrées ($\lambda$ est le paramètre).

L'élimination de $\lambda$ donne une équation cartésienne :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$$

$\overrightarrow{v} = \beta\,\overrightarrow{i} - \alpha\,\overrightarrow{j}$ est orthogonal à $D(A, \overrightarrow{u})$.

---

**Proposition**

Cas où la droite est définie par deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ distincts. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. L'équation de la droite est alors :

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B \\ y & y_A & y_B \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

---

**Définition**

Distance d'un point M à une droite :

$$d(M, D) = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{n} \right\rangle\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

où $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur $D$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $D$.

---

### 13.1.2 Coniques

**Définition**

Équations réduites :
– ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– parabole :

$$y^2 = 2px$$

où $p$ est le paramètre.

---

### 13.1.3 Arcs paramétrés

**Définition**

**Arc paramétré**

Soit $A(I, f)$ un arc paramétré, avec $f \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$.

$$M \in A(I, f) \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} \\ f(t) = (x(t), y(t)) \end{cases}$$

---

*Exemples* :
Soit

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{2t^2}{t+1} \end{cases}$$

Étude locale : on a

$$x(t) \sim_0 -t^2$$
$$y(t) \sim_0 2t^2$$
$$\frac{x''(0)}{2} = -1 \qquad \frac{y''(0)}{2} = 2$$

$P = 2$, on a

$$x(t) = -t^2 - t^3 + o(t^3)$$
$$y(t) = 2t^2 - 2t^3 + o(t^3)$$
$$\overrightarrow{OM}(t) = t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + o(t^3)$$

**Proposition**

Réduction de l'intervalle d'étude
– si $r(-\theta) = r(\theta)$, alors on a une symétrie
– si $r(2\theta_0 - \theta) = r(\theta)$, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[\theta_0, \theta_0 + T]$.

**Théorème**

**Théorème des fonctions implicites**

Soit $F \in C^1(U, \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma = \{M(x,y) \;/\; F(x,y) = 0\} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow y = f(x) \quad \text{localement}$$

avec

$$f(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

## 13.2 Espace

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère cartésien orthonormé.

**Définition**

**Plan**

$\Pi(M_0, F)$, avec $F$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $E_3$. Il s'agit du plan passant par $M_0$ et de direction $F$.

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0), F = \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}, \overrightarrow{v} = \alpha'\overrightarrow{i} + \beta'\overrightarrow{j} + \gamma'\overrightarrow{k}$ (remarque : $\dim F = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq 0$), alors

$$M(x,y,z) \in \Pi(M_0, F) \Longleftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \;/\; \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda x + \mu x' \\ y = y_0 + \lambda y + \mu y' \\ z = z_0 + \lambda z + \mu z' \end{array}\right.$$

(système paramétrique)

Enfin, l'équation cartésienne indique que $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée. On élimine $\lambda, \mu$ entre les trois équations :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y' & \beta & \beta' \\ z - z' & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

On obtient alors une équation du type $((a,b,c) \neq (0,0,0))$

$$ax + by + cz = h$$

Et $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal au plan.

---

**Proposition**

Equation d'un plan passant par trois points $M_0, M_1, M_2$ :

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

---

**Proposition**

Distance d'un point à un plan.

$$d(A,\Pi) = \|\overrightarrow{AH}\| = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM_0} \mid \overrightarrow{n} \right\rangle\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

avec $\overrightarrow{n}$ normal au plan, et $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $\Pi$.

---

*Remarques* :
– si on choisit $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, on a

$$\|AH\| = \frac{|\det(\overrightarrow{AM_0}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}$$

**Proposition**

Distance d'un point à une droite

$$d(A,\Delta) = \frac{\|\overrightarrow{M_0A} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

avec $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\Delta$.

---

# Index

# Table des matières