Mathématiques avancées pour physiciens II — L3

Harold Erbin

Notes de cours de Magistère L3 donné par M. Mourad.

Version : 27 avril 2011
Site : http://harold.e.free.fr/

Sommaire

Chapitre 1

Transformée de Fourier

1.1 Définitions

Définition 1.1. Soit f une fonction, on a $f \in L^1$ si

$$\int |f| < \infty \tag{1.1}$$

Définition 1.2 (Transformée de Fourier)**.** On note $\hat{f}$ ou $\mathrm{F}(f)$ la transformée de Fourier de f définie par

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x = \mathrm{F}(f)(k) \tag{1.2}$$

Définition 1.3 (Cotransformée de Fourier)**.** On définit $\overline{\mathrm{F}}(f)$ la cotransformée de Fourier de f par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{d}k = \overline{\mathrm{F}}(f)(x) \tag{1.3}$$

Proposition 1.1. On a

$$\overline{\mathrm{F}}(f)(k) = \mathrm{F}(f)(-k) \tag{1.4}$$

Sous certaines conditions $\overline{\mathrm{F}}\,\mathrm{F}(f) = f$.

1.2 Propriétés

Proposition 1.2. On a les propriétés suivantes :

1. $\hat{f}$ est continue.
2. si $x^n f \in L^1$, alors $\hat{f}$ est C^n et

$$\hat{f}^{(n)}(k) = \mathrm{F}\left((-ix)^n f\right) \tag{1.5}$$

Remarques :

1. Plus f décroit à l'infini, plus $\hat{f}$ est dérivable.
2. On a par conséquent : $xf \in L^1$, alors $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}'(k) = \mathrm{F}(-ixf)$.

Avant tout, rappelons le théorème de convergence dominée.

Théorème 1.1 (Convergence dominée)**.** Si (f_n) est une suite de fonctions avec $|f_n| \leq h$ avec h intégrable et $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ p.p. alors

$$\int f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \tag{1.6}$$

Conséquences : soit $G(t) = \displaystyle\int f(x,t)\mathrm{d}x$ alors si

- $f(x,t)$ est continue comme fonction de t et $|f(x,t)| < h(x)$ avec $h \in L^1$ alors G est continue.
- $f(x,t)$ est dérivable comme fonction de t et $|\partial f(x,t)/\partial t| < k(x)$ avec k intégrable alors G est dérivable et

$$G'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

- $f(x,t)$ est dérivable n fois comme fonction de t et $|\partial^n f(x,t)/\partial t^n| < \ell_n(x)$ avec $\ell_n \in L^1$ intégrable alors G est C^n et

$$G^{(n)}(t) = \int \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

Démonstration.
Soit

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underbrace{f(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}}_{f(x,k)}\mathrm{d}x$$

alors

- f est continue comme fonction de k et

$$|g| \leq \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} \in L^1$$

  et f est continue.
- On a

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial k^n}\right| \leq |x|^n\,\frac{|f|}{\sqrt{2\pi}}$$

  alors d'après le théorème 1.1, $\hat{f}(k)$ est C^n et

$$\hat{f}^{(n)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)(-ix)^n\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = \mathrm{F}\left((-ix)^n f\right)$$

□

Exemple 1.1.
Soit $f = 1_{[-a,a]}$, c'est à dire

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a,a] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{1.9}$$

qui est la fonction indicatrice sur l'intervalle $[-a, a]$. On a

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{ik} (\mathrm{e}^{-ika} - \mathrm{e}^{ika}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ka}{k}\end{aligned}$$

et $\hat{f}(k) \sim_0 a\sqrt{2/\pi}$ donc $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 1.3. Si $f \in L^1$ est dérivable avec $f' \in L^1$ alors

$$\boxed{\mathrm{F}(f') = ik\,\mathrm{F}(f)} \tag{1.10}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(f') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f' \,\mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f' \,\mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{A\to\infty} \left[f \,\mathrm{e}^{-ikx} \big|_{-A}^{A} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(-ik \,\mathrm{e}^{-ikx}) \mathrm{d}x \right]\end{aligned}$$

or $f(\pm A) \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$ car $f \in L^1$ donc $\mathrm{F}(f') = ik\,\mathrm{F}(f)$. □

Proposition 1.4. Plus généralement si f est C^n et $\forall m \leq n, f^{(m)} \in L^1$, alors

$$\boxed{\mathrm{F}\left(f^{(n)}\right) = (ik)^n\,\mathrm{F}(f)} \tag{1.11}$$

Proposition 1.5 (Translatée)**.** Soit $\tau_a f$ la translatée de a, c'est à dire $\tau_a f(x) = f(x - a)$. On a

$$\boxed{\mathrm{F}(\tau_a f) = \mathrm{e}^{-ika}\,\mathrm{F}(f)} \tag{1.12}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\tau_a f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x - a) \,\mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) \,\mathrm{e}^{-ik(x+a)} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-ika}\,\mathrm{F}(f)\end{aligned}$$

□

Proposition 1.6 (Dilatée)**.** Soit $\Delta_a f$ la dilatée par a, c'est à dire $\Delta_a f(x) = f(x/a)$, alors

$$\boxed{\mathrm{F}(\Delta_a f)(k) = a\,\mathrm{F}(f)(ak) = a\Delta_{1/a}\hat{f}(k)} \tag{1.13}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(\Delta_a f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x/a)\,\mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\,\mathrm{e}^{-iakx} a\mathrm{d}x \\
&= a\,\mathrm{F}(f)(ak)
\end{aligned}$$

□

1.3 Théorème de Plancherel–Parseval

Rappelons les théorèmes de Fubini :

Théorème 1.2 (Fubini)**.** Si $f(x,y) \geq 0$ alors

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \tag{1.14}$$

Théorème 1.3 (Fubini)**.** Si $|f|(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ alors on (1.14).

Remarque : Pour vérifier l'hypothèse de 1.3 on utilise le théorème 1.2.

Théorème 1.4 (Plancherel–Parseval)**.** Soient $f, g \in L^1$, alors

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}} f \hat{g}} \tag{1.15}$$

Démonstration.
Soit $f(x,y) = f(x)g(y)\,\mathrm{e}^{-ixy}$ avec $f, g \in L^1$. On a

$$|f(x,y)| = |f(x)|\ |g(y)|$$

D'après le théorème 1.2 on a

$$\int_{\mathbb{R}}^2 |f(x,y)| = \left(\int_R |f(x)|\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_R |g(y)|\,\mathrm{d}y \right) < \infty$$

donc $f(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. On peut donc appliquer le théorème 1.3 à $f(x,y)$:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ixy} \mathrm{d}x \right) g(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{e}^{-ixy} \mathrm{d}y \right) f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) g(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x) f(x)\mathrm{d}x$$

□

1.4 Un exemple : la gaussienne

Dans ce paragraphe nous étudierons la gaussienne de largeur 1 :

$$\gamma(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} \tag{1.16}$$

Proposition 1.7.

$$I = \int \gamma = \sqrt{2\pi} \tag{1.17}$$

Démonstration.

$$I^2 = \left(\int \gamma(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int \gamma(y)\mathrm{d}y\right)$$

et d'après Fubini

$$I^2 = \int_R^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Passons en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} I^2 &= \int \mathrm{e}^{-r^2/2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2/2} r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left.\mathrm{e}^{-r^2/2}\right|_0^\infty \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

□

Proposition 1.8.

$$\hat{\gamma}(k) = \mathrm{e}^{-k^2/2} \tag{1.18}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2}\,\mathrm{e}^{-k^2/2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. $g(z) = \mathrm{e}^{-z^2/2}$ est analytique donc

$$\oint_{\mathcal{C}} g(z)\mathrm{d}z = 0$$

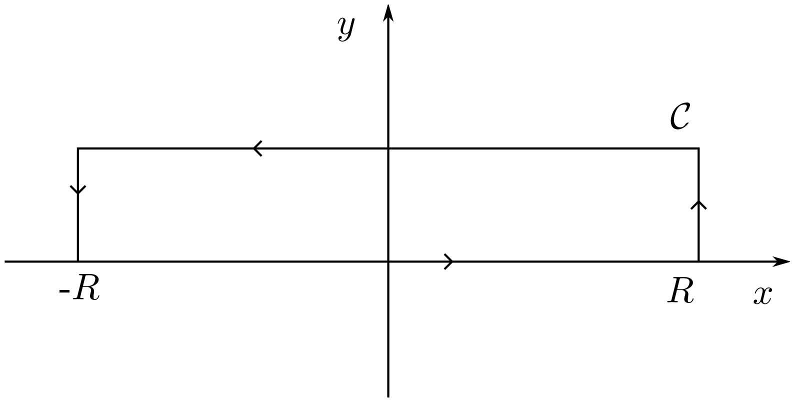


FIGURE 1.1 – Contour d'intégration pour la gaussienne.

et d'après Cauchy (figure 1.1)

$$\oint_{\mathcal{C}} g(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \gamma(x)\mathrm{d}x + \int_0^k \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(R+iy)^2} i\mathrm{d}y \\ + \int_k^0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-R+iy)^2} i\mathrm{d}y + \int_R^{-R} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2}\mathrm{d}x$$

et

$$\begin{aligned} I(R) &= i\int_0^k \mathrm{e}^{-R^2/2}\,\mathrm{e}^{y^2/2}\,\mathrm{e}^{-iRy}\mathrm{d}y \\ &= i\,\mathrm{e}^{-R^2/2}\int_0^k \mathrm{e}^{y^2/2}\,\mathrm{e}^{-iyR}\mathrm{d}y \\ &\leq \int_0^k \mathrm{e}^{y^2/2}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

et $I(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ d'où

$$\sqrt{2\pi} - \mathrm{e}^{k^2/2}\hat{\gamma}(k)\sqrt{2\pi} = 0$$

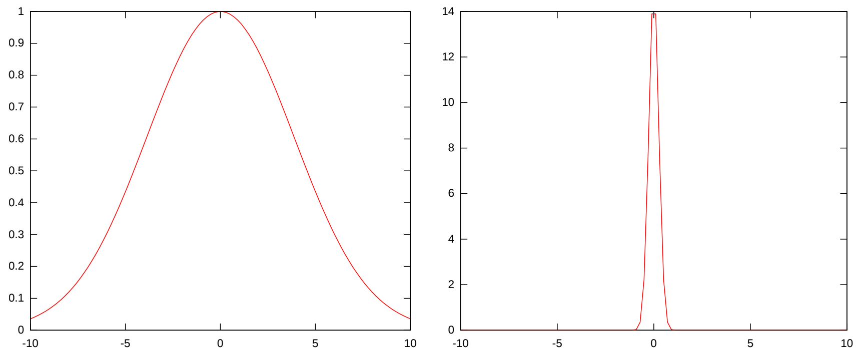
$\square$

Conséquence : la transformée de fourier de $\gamma(x/a) = \mathrm{e}^{-x^2/(2a^2)}$ (gaussienne de largeur a) est $a\,\mathrm{e}^{-a^2k^2/2}$: plus la largeur initiale est grande, plus celle de la transformée de Fourier est faible.

1.5 Théorème d'inversion de Fourier

Théorème 1.5 (Théorème d'inversion de Fourier)**.** Si $f, \hat{f} \in L^1$, f continue en x, alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k \tag{1.19}$$



(a) γ (b) $F(\gamma)$

FIGURE 1.2 – Fonction gaussienne et sa transformée ($a^2 = 15$).

Démonstration.
Il suffit de montrer (1.19) pour $a = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k)\mathrm{d}k$$

Il suffit ensuite de choisir une fonction $g(x) = \tau_a f$, alors $g(0) = f(a)$ et $\hat{g}(k) = \mathrm{e}^{ika}\hat{f}$.

On utilise le théorème de Plancherel-Parseval 1.4 :

$$\int f\hat{h} = \int \hat{f}h$$

avec $h \in L^1$.

Prenons pour h dont les graphes ressemblent à ceux de la figure 1.2, c'est à dire

$$h(x) = \gamma\left(\frac{x}{a}\right) = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2a^2}}$$
$$\hat{h}(k) = a\,\mathrm{e}^{\frac{-a^2k^2}{2}}$$

et

$$\lim_{a\to\infty} \hat{h}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ a & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\underbrace{a\int f(x)\,\mathrm{e}^{\frac{-a^2x^2}{2}}\mathrm{d}x}_{I(a)} = \underbrace{\int \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\frac{-k^2}{2a^2}}\mathrm{d}k}_{J(a)}$$

À la limite $a \to \infty$

$$\left|\mathrm{e}^{\frac{-k^2}{2a^2}}\right| \leq 1$$
$$\left|\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2a^2}}\right| \leq \left|\hat{f}(k)\right|$$

$\hat{f} \in L^1$. D'après le théorème de convergence dominée 1.1 :

$$\lim_{a\to\infty} \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2a^2}}\mathrm{d}k = \int \hat{f}(k)\ \mathrm{d}k$$

$$I(a) = \int f\left(\frac{u}{a}\right)\ \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\ \mathrm{d}u$$

en ayant posé $u = xa$. Montrons que

$$\left| I(a) - f(0) \int \mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2}}\mathrm{d}u \right| \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|\int \left(f\left(\frac{u}{a}\right) - f(0)\right)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right| &\le \int \left|f\left(\frac{u}{a}\right) - f(0)\right|\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \\
\le \int_{\left|\frac{u}{a}\right|\le\varepsilon} \left|f\left(\frac{u}{a}\right) - f(0)\right|\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u &+ \int_{\left|\frac{u}{a}\right|\ge\varepsilon} \left|f\left(\frac{u}{a}\right) - f(0)\right|\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \\
\le \sup_{|x|\le\varepsilon} |f(x) - f(0)| \int \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u &+ \int_{\left|\frac{u}{a}\right|\ge\varepsilon} \left|f\left(\frac{u}{a}\right)\right|\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \\
&+ \int_{\left|\frac{u}{a}\right|\ge\varepsilon} |f(0)|\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \\
\le \sup_{|x|\le\varepsilon} |f(x) - f(0)| \int \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u &+ \underbrace{\int_{|x|\ge\varepsilon} |f(x)|\,a\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2x^2}{2}}\mathrm{d}x}_{\le \mathrm{e}^{-\frac{a^2\varepsilon^2}{2}}a\int|f(x)|} \\
&+ |f(0)| \int_{|u|\ge a\varepsilon} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \qquad \forall\varepsilon > 0
\end{aligned}$$

Choisissons

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left|I(a) - f(0)\sqrt{2\pi}\right| \le \sup_{|x|\le\frac{1}{\sqrt{a}}} |f(x) - f(0)|\sqrt{2\pi} \\
+ a\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}} \int |f| + |f(0)| \int_{|u|>\sqrt{a}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Quand $a \to \infty$

$$\lim_{a\to\infty} I(a) - f(0)\sqrt{2\pi} \le \underbrace{0}_{f\text{ continue}} + \underbrace{0}_{a\,\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}\to 0} + \underbrace{0}_{\int \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}<\infty}$$

donc

$$I(a) \xrightarrow[a\to\infty]{} \sqrt{2\pi}f(0) \xrightarrow[a\to\infty]{} J(a)$$

□

Le théorème suivant est une conséquence du précédent.

Théorème 1.6 (Isométrie de L^2)**.** Soient $f, \hat{f} \in L^1$ alors

$$\int |f|^2 = \int \left|\hat{f}\right|^2 \tag{1.20}$$

Démonstration.

On utilise le théorème 1.4. On choisit $g = f^*$, alors $g \in L^1$ et

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}^*(k)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}k \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}k\right)^* \\
&= f(x)^*
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'inversion 1.5, on prouve l'égalité cherchée. □

1.6 Transformées de Fourier dans $\mathbb{R}^n$

f est une fonction d'une variable vectorielle $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $x_i \in \mathbb{R}$.

On définit le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1.21}$$

Définition 1.4 (Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}$)**.** On définit la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int f(\vec{x})\,\mathrm{e}^{-i\vec{x}\cdot\vec{k}}\mathrm{d}^n \tag{1.22}$$

Théorème 1.7 (Théorème d'inversion)**.** Soient $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. f est continue, alors

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^n k \tag{1.23}$$

Proposition 1.9. Si $f(\vec{x}) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$ où les f_i sont des fonctions à une variable ($f = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$), avec $f_i \in L^1$, alors

$$\hat{f} = \hat{f}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{f}_n \tag{1.24}$$

ou

$$\hat{f}(\vec{k}) = \hat{f}_1(k_1)\cdots\hat{f}_n(k_n) \tag{1.25}$$

Démonstration.

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\,\mathrm{e}^{-ik_1x_1}\cdots\mathrm{e}^{-ik_nx_n}\mathrm{d}^n x$$

par Fubini 1.3

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_1(x_1) \, \mathrm{e}^{-ik_1 x_1} \mathrm{d}x_1 \right) \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_n(x_n) \, \mathrm{e}^{-ik_n x_n} \mathrm{d}x_n \right)$$

donc

$$\hat{f}(\vec{k}) = \hat{f}_1(k_1) \cdots \hat{f}_n(k_n)$$

$\square$

Exemple 1.2.

Soit

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\vec{x}\cdot\vec{x}} = \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_1^2} \cdots \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_n^2} \end{aligned}$$

donc

$$\hat{f}(\vec{k}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k_1^2} \cdots \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k_n^2}$$

1.6.1 Autres propriétés

Translation

Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\tau_{\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \vec{a}) \tag{1.26}$$

Proposition 1.10 (Translatée)**.** On a

$$\mathrm{F}\, \tau_{\vec{a}} f = \mathrm{e}^{-i\overrightarrow{k\cdot a}} \, \mathrm{F}\, f \tag{1.27}$$

Dilatation

Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$$\Delta_a f(\vec{x}) = f\left(\frac{\vec{x}}{a}\right) \tag{1.28}$$

Proposition 1.11 (Dilatée)**.** On a

$$\mathrm{F}\, \Delta_a f = a^n \hat{f}(a\vec{k}) \tag{1.29}$$

Rotation

Il s'agit d'une transformation linéaire qui conserve le produit scalaire.

$$\vec{x}' = R\vec{x} \tag{1.30}$$

où $\vec{x}'$ est l'image de $\vec{x}$ par la rotation R. On a

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} x_j$$

où R est une matrice carrée n.

On a

$$\vec{x} \cdot \vec{x}' = x^t x'$$

avec $x, x' \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= x^t y \\ &= R\vec{x} \cdot R\vec{y} \\ &= Rx^t Ry \\ &= x^t R^t Ry \\ &\implies \boxed{R^t R = 1} \end{aligned}$$

ce qui définit le groupe orthogonal à n dimensions, noté $O(n)$. On a

$$\det R = \pm 1 \tag{1.31}$$

Le sous-groupe des rotations $SO(n)$ est défini par

$$\det R = 1 \tag{1.32}$$

Soit f une fonction à n variabmes :

$$\mathcal{R}f(\vec{x}) = f(R\vec{x}) \tag{1.33}$$

Alors on a

$$\mathrm{F}(\mathcal{R}f)(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int f(R\vec{x})\, \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathrm{d}^n x$$

avec

$$\begin{gathered} \vec{x}' = R\vec{x} \qquad \vec{x} = R^{-1}\vec{x}' \\ \vec{k} \cdot R^{-1}\vec{x}' = R\vec{k} \cdot \vec{x}' \\ \mathrm{d}^n x = \underbrace{\left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right|}_{\text{Jacobien}} \mathrm{d}^n x' = \underbrace{\left| R^{-1}_{ij} \right|}_{\det R = 1} \mathrm{d}^n x' \end{gathered}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathrm{F}\,\mathcal{R}f(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int f(\vec{x}')\, \mathrm{e}^{-iR\vec{k}\cdot\vec{x}'} \\ &= \hat{f}(R\vec{k}) \\ &= \mathcal{R}\,\mathrm{F}\, f(\vec{k}) \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{F}\,\mathcal{R} = \mathcal{R}\,\mathrm{F} \tag{1.34}$$

Si f est invariante par rotation (fonction radiale), alors $\hat{f}$ est invariante par rotation.

Exemple 1.3.

Soit $n = 3$, et f une fonction radiale.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(r)\, \mathrm{e}^{-ikr\cos\theta} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ikr\cos\theta}}{ikr}\, f(r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{ikr} - \mathrm{e}^{-ikr}}{ik}}_{2i\sin(kr)} r f(r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{k} \int_0^\infty r f(r) \sin(kr)\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

1.7 Convolution dans $\mathbb{R}$

Définition 1.5 (Convoluée)**.** Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On définit par h

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)\; g(s)\; \mathrm{d}s \tag{1.35}$$

On dit que h est la convoluée de f et g et on la note $f * g$.

Proposition 1.12. Propriétés :

1. Le produit de convolution est commutatif :
$$f * g = g * f \tag{1.36}$$
2. $h \in L^1$ et
$$\int h = \left(\int f\right)\left(\int g\right) \tag{1.37}$$

Théorème 1.8. Soient $f, g \in L^1$, alors

$$\mathrm{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{F}(f) \times \mathrm{F}(g) \tag{1.38}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\hat{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x)\, \mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\int f(x-s)\; g(s)\; \mathrm{d}s\right) \underbrace{\mathrm{e}^{-ikx}}_{\mathrm{e}^{-ik(x-s)}\,\mathrm{e}^{-iks}} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini 1.3 s'applique, on intègre d'abord sur x ($x' = x - s$) : $\hat{f}(k)$. L'intégrale sur s donne $\sqrt{2\pi}\hat{g}$, d'où

$$\hat{h} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$$

□

Exemple 1.4.
Soit
$$\gamma_a(x) = \gamma\left(\frac{x}{a}\right)$$
Que vaut $\gamma_a * \gamma_b$?
$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(\gamma_a * \gamma_b) &= \sqrt{2\pi}\hat{\gamma}_a\hat{\gamma}_b \\
&= \sqrt{2\pi}ab\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2k^2}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2k^2}{2}} \\
&= \sqrt{2\pi}ab\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}(a^2+b^2)}
\end{aligned}$$

Transformée de Fourier inverse :
$$\begin{aligned}
\gamma_a * \gamma_b &= \sqrt{2\pi}ab\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2(a^2+b^2)}} \\
&= ab\sqrt{\frac{2\pi}{a^2+b^2}}\,\gamma_{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

1.8 Application : le théorème de la limite centrale

1.8.1 Une variable

Soit x une variable aléatoire réelle et $p(x)$ une distribution de densité de probabilité. La probabilité d'avoir x dans un intervalle I est
$$P(I) = \int_I p \tag{1.39}$$

De plus on a $p \geq 0$ et
$$\int_{\mathbb{R}} p = 1 \tag{1.40}$$
donc $p \in L^1$.

La valeur moyenne (ou l'espérance) de $f(x)$, notée $\langle f(x)\rangle$ est donnée par
$$\langle f(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.41}$$
d'où
$$\langle x\rangle = \int_{\mathbb{R}} xp(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.42}$$

On définit la variance par $\left\langle x^2\right\rangle$ et l'écart type est alors
$$\sigma = \left\langle (x - \langle x\rangle)^2\right\rangle^{1/2} \tag{1.43}$$

La transformée de Fourier est
$$\begin{aligned}
\hat{p}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int p(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle \mathrm{e}^{-ikx}\right\rangle
\end{aligned}$$

$\left\langle \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle$: fonction caractéristique, développement en puissance de k :

$$\begin{aligned}
&\left\langle 1 - ikx + \frac{(-ik)^2}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-ik)^n}{n!}x^n \right\rangle \\
&= 1 - ik\langle x \rangle + \frac{(-i)^2}{2}k^2\left\langle x^2 \right\rangle + \cdots + \frac{(-i)^n}{n!}k^n\langle x^n \rangle
\end{aligned}$$

1.8.2 Deux variables

Soit x_1 et x_2 deux variables aléatoires réelles et $p(x_1, x_2)$ une distribution de densité de probabilité avec $p \geq 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2} p = 1 \tag{1.44}$$

x_1 et x_2 sont indépendantes si

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2) \tag{1.45}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
\langle f_1(x_1)f_2(x_2) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} p(x_1, x_2)f_1(x_1)f_2(x_2)\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x_1)p_1(x_1)\, \mathrm{d}x_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f_2(x_2)p_2(x_2)\, \mathrm{d}x_2\right) \\
&= \langle f_1(x_1) \rangle \langle f_2(x_2) \rangle
\end{aligned}$$

Si x_1 et x_2 sont indépendantes alors $\left\langle \mathrm{e}^{i(k_1x_1+k_2x_2)} \right\rangle$ est par définition la fonction caractéristique et on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{e}^{i(k_1x_1+k_2x_2)} \right\rangle &= \left\langle \mathrm{e}^{ik_1x_1}\, \mathrm{e}^{ik_2x_2} \right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{e}^{ik_1x_1} \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^{ik_2x_2} \right\rangle
\end{aligned}$$

$X = x_1+x_2$ est une variable aléatoire. Quelle est sa distribution ? Sa fonction caractéristique est

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{e}^{ikX} \right\rangle &= \left\langle \mathrm{e}^{ik(x_1+x_2)} \right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{e}^{ikx_1}\, \mathrm{e}^{ikx_2} \right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{e}^{ikx_1} \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^{ikx_2} \right\rangle
\end{aligned}$$

Soit $q(X)$ la distribution de X.

$$\begin{aligned}
\hat{q}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle \mathrm{e}^{ikX} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle \mathrm{e}^{ikx_1} \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^{ikx_2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{2\pi}\hat{p}_1(k)\right)\left(\sqrt{2\pi}\hat{p}_2(k)\right)
\end{aligned}$$

où p_1 et p_2 sont les distributions de x_1 et x_2.

$$\hat{q}(k) = \sqrt{2\pi}\hat{p}_1(k)\hat{p}_2(k) = \mathrm{F}(p_1 * p_2)$$

d'où, par une transformation inverse :

$$q(X) = p_1 * p_2 \tag{1.46}$$

Théorème 1.9 (Limite centrale)**.** Soit $x_1, \ldots, x_n$ n variables aléatoires indépendantes avec la même loi de distribution $p(x_i)$. Soit $x_0 = \langle x_i \rangle$ et $\sigma_0^2 = \left\langle (x_i - x_0)^2 \right\rangle$, et

$$\gamma_n = \frac{(x_1 + \cdots + x_n) - nx_0}{\sqrt{n}}$$

Soit $q_n(\gamma)$ la distribution de γ_n, alors la limite lorsque n tend vers l'infini de $q_n(\gamma)$ est la distribution gaussienne :

$$\lim_{n\to\infty} q_n(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma^2}{2\sigma_0^2}} \tag{1.47}$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned}
\hat{q}_n(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle \exp -ik\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}x_0\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle \mathrm{e}^{-\frac{ik}{\sqrt{n}}x_1} \cdots \mathrm{e}^{-\frac{ik}{\sqrt{n}}x_n}\,\mathrm{e}^{i\sqrt{n}x_0k}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle \mathrm{e}^{-\frac{ik}{\sqrt{n}}x_1}\right\rangle \cdots \left\langle \mathrm{e}^{-\frac{ik}{\sqrt{n}}x_n}\right\rangle \mathrm{e}^{i\sqrt{n}x_0k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{2\pi}\hat{p}\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \mathrm{e}^{i\sqrt{n}x_0k}
\end{aligned}$$

Si n est grand et $k/\sqrt{n}$ petit :

$$\hat{p}\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) = \hat{p}(0) + \frac{k}{\sqrt{n}}\hat{p}'(0) + \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{2}\hat{p}''(0) + \cdots$$

avec

$$\begin{aligned}
\hat{p}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
\hat{p}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int p\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \\
\hat{p}'(0) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\langle x \rangle = \frac{-ix_0}{\sqrt{2\pi}} \\
\hat{p}''(0) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle x^2 \right\rangle
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\sigma_0^2 &= \left\langle (x - x_0)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x_0^2 \right\rangle
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\hat{q}_n(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\sqrt{n}x_0 k}\left(1-\frac{ik}{\sqrt{n}}x_0-\frac{k^2}{n}\frac{1}{2}(\sigma_0^2+x_0^2)+\cdots\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\sqrt{n}x_0 k}\exp n\ln\left(1-\frac{ik}{\sqrt{n}}x_0-\frac{k^2}{n}\frac{1}{2}(\sigma_0^2+x_0^2)+\cdots\right)\end{aligned}$$

et en faisant un développement du log :

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{i\sqrt{n}x_0 k}\exp n\left(-\frac{ik}{\sqrt{n}}x_0-\frac{k^2}{2n}(\sigma_0^2+x_0^2)-\left(\frac{ik}{\sqrt{n}}x_0\right)^2\frac{1}{2}\right)$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\hat{q}_n(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2\sigma_0^2}{2}}$$

car on a $\mathrm{e}^{nO(1/n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Et il ne reste plus qu'à faire une transformée de Fourier inverse. □

1.9 Espace de Schwartz

Définition 1.6 (Espace de Schwartz)**.** L'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, est l'ensemble des fonctions C^∞ telles que f et toutes ses dérivées décroissent à l'infini plus vite que toute fonction rationelle, c'est à dire

$$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\iff f\in C^\infty, f^{(p)}\,|x|^q \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0 \qquad \forall p,q\in\mathbb{N} \tag{1.48}$$

f n'est pas vide : $\mathrm{e}^{-x^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 1.10. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier.

Dans $\mathcal{S}$, on a

$$\mathrm{F}\,\overline{\mathrm{F}}\,f=\overline{\mathrm{F}}\,\mathrm{F}\,f \tag{1.49}$$

Démonstration.

Que $\mathcal{S}$ soit stable signifie que si $f\in\mathcal{S}$, alors $\mathrm{F}\,f\in\mathcal{S}$. Soit $f\in\mathcal{S}$, alors $\forall p, f^{(p)}\in L^1$ car $(1+x^2)f^{(p)}\to 0$. Donc $\hat{f}$ existe ($p<0$) et $\mathrm{F}\,f^{(p)}=(ik)^p\,\mathrm{F}\,f$, donc

$$\mathrm{F}\,f=\frac{\mathrm{F}\,f^{(p)}}{(ik)^p} \qquad \forall p$$

donc $\forall q, |k|^q\,\mathrm{F}\,f\to 0$, donc $\mathrm{F}\,f$ est à décroissance rapide. $x^n f\in L^1$ donc $\hat{f}$ est C^n avec $\hat{f}^{(p)}=\mathrm{F}\left((-ix)^p f\right)$. n est arbitraire donc $\hat{f}$ est C^∞. $({}_ix)^p f$ est C^∞ alors $k^n\hat{f}^{(p)} \xrightarrow[|k|\to 0]{}$, donc $\hat{f}\in\mathcal{S}$.

$f,\hat{f}\in L^1$, f continue, donc $f=\overline{\mathrm{F}}\,\mathrm{F}\,f$, et par le théorème d'inversion 1.5, on a

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k$$

$k \to -k$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underbrace{\hat{f}(-k)}_{(\overline{\mathrm{F}}\, f)(k)} \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{d}k \qquad\qquad = \mathrm{F}\, \overline{\mathrm{F}}\, f$$

$\square$

Chapitre 2

Distributions

2.1 Introduction

En physique, on utilise souvent la "fonction de Dirac" $\delta(x)$. Ses propriétés sont telles que

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{2.1a}$$

$$\int \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2.1b}$$

Elle est utilisée, par exemple, pour représenter la densité de charge d'une particule ponctuelle :

$$\rho(x) = q\delta(x)$$

Mais une telle fonction ne peut pas exister car, selon la théorie de l'intégrale de Lebesgue, $f = 0$ p.p., donc $\int f\mathrm{d}x = 0$.

2.2 Les espaces $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Définition 2.1. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support borné.

Définition 2.2 (Support)**.** Le support K d'une fonction φ est l'ensemble des points où φ n'est pas nulle.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \iff$ il existe a et b tels que $\varphi = 0$ en dehors de $[a, b]$ et que φ soit C^∞.

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas vide.

Exemple 2.1.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \end{cases}$$

et

$$\varphi'(x) = 0 \quad \text{si } |x| \geq 1$$
$$\varphi'(x) = \left(\frac{-1}{1-x^2}\right)' \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$
$$\varphi^{(k)}(x) = R_n(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

où $R_n(x)$ est une fonction rationnelle.

Donc φ est C^∞, et $\varphi(x) = 0$ si $x \notin]-1, 1[$. Donc $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ n'est pas vide.

Proposition 2.1. Propriétés :

1. Si λ et μ sont des réels, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ alors $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \in \mathcal{D}$.
2. f est C^∞ (pas nécessairement à support borné), et $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $f\varphi \in \mathcal{D}$.
3. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $\tau_a f \in \mathcal{D}$ et $\Delta_a f \in \mathcal{D}$.

Définition 2.3 (Distribution)**.** Une distribution est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

L'ensemble des distributions est noté $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

C'est une application linéaire de $\mathcal{D}$ vers $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

avec

$$\langle T, \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \mu \langle T, \varphi_2 \rangle$$

Qu'elle soit continue signifie que si φ_j est une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ et $\lim \varphi_j = \varphi$, alors $\lim T(\varphi_j) = T(\varphi)$.

Dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\lim \varphi_j = \varphi \iff \forall n \quad \sup_{x\in K} \left| \varphi_j^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x) \right| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

On se place dans un modèle de la théorie des ensembles où toutes les applications linéaires sont continues.

Exemple 2.2.

Soit

$$T(\varphi) = \int \varphi$$

T est linéaire.

Exemple 2.3.

Soit

$$T(\varphi) = \varphi(a)$$

T est linéaire et $T = \delta_a$:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

Il s'agit de la distribution de Dirac au point a.

Exemple 2.4.

Distributions régulières. f localement intégrable ($f \in L^1(I)$). T_f est la distribution régulière associée à la fonction f :

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int f\varphi = \langle f, \varphi\rangle$$

Remarque : $T_f = T_g \Leftrightarrow f = g$ p.p..

Théorème 2.1 (Approximation de δ_0 par des distributions régulières)**.** Soit f_n une suite de fonctions intégrables bornées dans L^1 telles que $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{|x|\le\varepsilon} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ \int_{|x|>\varepsilon} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Alors f_n tend vers δ_0 au sens des distributions.

Démonstration.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, il faut montrer que

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0) \tag{2.3}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + r(x)$ et

$$\int f_n\varphi = \underbrace{\int f_n\varphi(0)}_{\varphi(0)\int f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1} + \int f_n r$$

Montrons que $\int f_n r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\int f_n r = \int_{|x|\le\varepsilon} f_n r + \int_{|x|>\varepsilon} f_n r$$

$$|\ldots| \le \max_{|x|\le\varepsilon} |r(x)| \int f_n + \max_{|x|>\varepsilon} |r(x)| \int f_n$$

Par continuité de φ, $\max_{|x|\le\varepsilon}$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. Donc $|\ldots| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'où

$$\int f_n\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

ce qui prouve (2.3), donc

$$T_{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_0$$

par définition de la limite au sens de la distribution. □

Remarques :

1. Soit une suite de distributions T_n, on dit que $T_n \to T$ au sens des distributions si $\forall\varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, \varphi\rangle$.
2. Les éléments de $\mathcal{D}$ sont appelés fonctions test.

Exemple 2.5.

Soit $f \in L^1$, $\int f = 1$.

$$f_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n} f\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \qquad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2.3 Opérations sur les distributions

2.3.1 Multiplication par une fonction C^∞

Distribution régulière : $T_g, f \in C^\infty$. gf est localement intégrable :

$$\langle T_{gf},\, \varphi \rangle = \int g(x)f(x)\varphi(x) = \langle T_g,\, f\varphi \rangle$$

Définition 2.4. f est C^∞ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors fT est l'élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ défini par

$$\langle fT,\, \varphi \rangle = \langle T,\, f\varphi \rangle \tag{2.4}$$

fT est une forme linéaire :

$$\begin{aligned}
\langle fT,\, \lambda\varphi_1 + \varphi_2 \rangle &= \langle T,\, f(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) \rangle \\
&= \lambda \langle T,\, f\varphi_1 \rangle + \langle T,\, f\varphi_2 \rangle \\
&= \lambda \langle fT,\, \varphi_1 \rangle + \langle fT,\, \varphi_2 \rangle
\end{aligned}$$

Exemple 2.6.
f est C^∞ et

$$\begin{aligned}
\langle f\delta_0,\, \varphi \rangle &= \langle \delta_0,\, f\varphi \rangle \\
&= f\varphi(0) \\
&= f(0)\varphi(0) \\
&= f(0) \langle \delta_0,\, \varphi \rangle \\
&= \langle f(0)\delta_0,\, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

2.3.2 Translatée d'une distribution

$$\begin{aligned}
\langle T_{\tau_a f},\, \varphi \rangle &= \langle \tau_a T_f,\, \varphi \rangle \\
&= \int (\tau_a f)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int f(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int f(x)\varphi(x+a)\mathrm{d}x \\
&= \int f\tau_a\varphi \\
&= \langle T_f,\, \tau_{-a}\varphi \rangle
\end{aligned}$$

Soit $T \in \mathcal{D}'$. On définit $\tau_a T$ par

$$\langle \tau_a T,\, \varphi \rangle = \langle T,\, \tau_{-a}\varphi \rangle \tag{2.5}$$

$\tau_a T$ est une forme linéaire et

$$\begin{aligned}
\langle \tau_a \delta_0,\, \varphi \rangle &= \langle \delta_0,\, \tau_a\varphi \rangle \\
&= (\tau_{-a}\varphi)(0) = \varphi(a) \\
&= \langle \delta_a,\, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

2.3.3 Dérivation

Soit $f \in C^1$, exprimons $T_{f'}$ en fonction de T_f :

$$\begin{aligned}\langle T_{f'}, \varphi\rangle &= \int f'\varphi \\ &= 0 - \int f\varphi' \\ &= -\langle T_f, \varphi\rangle\end{aligned}$$

Définition 2.5. Si $T \in \mathcal{D}'$, alors T' est défini par

$$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D} \tag{2.6}$$

Toutes les distributions sont dérivables.

Exemple 2.7.
Soit la fonction de Heaviside

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$f \in L^1$ localement. T_f existe.

$$\begin{aligned}\left\langle T_f', \varphi\right\rangle &= -\langle T_f, \varphi'\rangle \\ &= -\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \varphi((x) \\ &= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle\end{aligned}$$

donc

$$T_f' = \delta_0$$

Exemple 2.8.

$$\langle \delta_0', \varphi\rangle = -\langle \delta_0, \varphi'\rangle = -\varphi'(0)$$

et

$$\left\langle \delta_0^{(n)}, \varphi\right\rangle = -\left\langle \delta_0^{(n-1)}, \varphi'\right\rangle = \cdots = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

Proposition 2.2. Soient $f \in C^\infty, T \in \mathcal{D}'$, alors

$$(fT)' = fT' + f'T \tag{2.7}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\langle (fT)', \varphi\rangle &= -\langle fT, \varphi'\rangle \\ &= \langle T, f\varphi'\rangle \\ &= -\langle T, (f\varphi)' - f'\varphi\rangle \\ &= -\langle T, (f\varphi)'\rangle + \langle T, f'\varphi\rangle \\ &= \langle fT' + f'T, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3. Si $T' = 0$ alors T est de la forme

$$\langle T, \varphi \rangle = \lambda \int \varphi \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

Démonstration.

Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ avec $\int \varphi_0 = 1$ et

$$\langle T, \varphi_0 \rangle = \lambda$$

Montrons (2.8) pour tout φ.

$$\varphi = a\varphi_0 + \chi$$
$$a = \int \varphi$$

alors $\int \chi = 0$. On note $\chi = \psi'$ donc

$$\psi(x) = \int_a^x \chi(u)\mathrm{d}u$$

et $\psi \in \mathcal{D}$ et

$$\begin{aligned} \varphi &= a\varphi_0 + \psi' \\ \langle T, \varphi \rangle &= a \underbrace{\langle T, \varphi_0 \rangle}_{\lambda} + \underbrace{\langle T, \psi' \rangle}_{=0} \\ \Longrightarrow \langle T, \varphi \rangle &= \lambda \int \varphi \end{aligned}$$

□

Exemple 2.9 (Valeur principale de Cauchy)**.**

vp $1/x \notin L^1_{loc}$. $1/x$ ne définit par une distribution. Soit

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$$

et $\lim_{\varepsilon \to 0}$ existe et est finie et vaut $\langle \mathrm{vp}\, 1/x, \varphi \rangle$.

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(-x) &= \varphi(0) + x\varphi'(0) + O(x^2) - \Big(\varphi(0) - x\varphi'(0) + O(x^2)\Big) \\ &= 2x\varphi'(0) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0) + O(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2\varphi'(0)$$

Donc I_ε est finie dans la limite $\varepsilon \to 0$ et

$$\langle \mathrm{vp}\, 1/x, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$$

Quelques propriétés de la dérivation

Proposition 2.4. La dérivation est continue : si T_n est une suite de distribution qui tend vers T alors T_n' tend vers T' :

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T \Longrightarrow T_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} T' \tag{2.9}$$

Démonstration.

$$T_n \longrightarrow T \Longleftrightarrow \forall\varphi \in \mathcal{D} \quad \langle\, T_n,\, \varphi\rangle \longrightarrow \langle\, T,\, \varphi\rangle$$

et

$$\langle\, T_n',\, \varphi\rangle = -\,\langle\, T_n,\, \varphi'\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} -\,\langle\, T,\, \varphi'\rangle = \langle\, T',\, \varphi\rangle$$

donc $T_n' \longrightarrow T'$. □

Exemple 2.10.
Si $\sum\limits_i T_i = S$ alors $S' = \sum\limits_i T_i'$ $(S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} T_i)$.

Exemple 2.11 (Formule des sauts)**.**
f est C^1 par morceau discontinue en x_0 avec une discontinuité

$$s_0 = f(x_0^+ - x_0^-)$$

Soit $\{f\}'$ sa dérivée sur $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, \infty[$. f n'est pas dérivable au sens des fonctions en x_0, si elle est localement intégrable elle est dérivable au sens des distributions :

$$\begin{aligned}
\left\langle\, T_f',\, \varphi\right\rangle &= -\,\langle\, T_f,\, \varphi'\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi' = -\int_{-\infty}^{x_0} f\varphi' - \int_{x_0}^{\infty} f\varphi' \\
&= -f\varphi\Big|_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} f'\varphi - f\varphi\Big|_{x_0}^{\infty} + \int_{x_0}^{\infty} f'\varphi \\
&= \int f'\varphi + \Big(f(x_0^+) - f(x_0^-)\Big)\varphi(x_0)
\end{aligned}$$

où le premier membre n'est pas défini en x_0

$$\left\langle\, T_f',\, \varphi\right\rangle = \langle\, T_{f'},\, \varphi\rangle + s_0\,\langle\, \delta_{x_0},\, \varphi\rangle$$

avec $T_{f'}$ la distribution régulière qui coïncide avec la dérivée de f p.p.. On obtient donc

$$T_f' = T_{f'} + s_0\delta_{x_0} \tag{2.10}$$

qui est la formule des sauts.

Exemple 2.12 (Dérivée de $\mathrm{vp}\, 1/x$)**.**
On rappelle que

$$\langle\, \mathrm{vp}\, 1/x,\, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\langle\, (\mathrm{vp}\, 1/x)', \, \varphi \rangle &= -\langle\, \mathrm{vp}\, 1/x, \, \varphi' \rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x>\varepsilon} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(-x)}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x} \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x^2} \, \mathrm{d}x \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x^2} \, \mathrm{d}x \right]
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon^2) + \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon^2) \Big) \\
&= 2\varphi(0) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\langle\, (\mathrm{vp}\, 1/x)', \, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \int_{x>\varepsilon} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x^2} \right] \\
&= -\left\langle\, \mathrm{Pf}\, 1/x^2, \, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

où $\mathrm{Pf}\, 1/x^2$ est la partie finie de $1/x^2$.

Exemple 2.13.

Quelques autres exemples de parties finies :

1. $$\langle\, \mathrm{Pf}\, 1/\,|x|\,, \, \varphi \rangle = \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0) 1_{[-1,1]}}{|x|}$$

2. $$\left\langle\, \mathrm{Pf}\, 1/\,|x|^{3/2}\,, \, \varphi \right\rangle = \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^{3/2}}$$

3. $$\left\langle\, \mathrm{Pf}\, 1/\,|x|^{5/2}\,, \, \varphi \right\rangle = \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{|x|^{5/2}}$$

2.4 Solutions d'équations au sens des distributions

Théorème 2.2. La solution de l'équation

$$xT = 0 \tag{2.11}$$

dans $\mathcal{D}'$ est

$$T = c\delta_0 \tag{2.12}$$

où c est une constante.

Démonstration.

Vérifions que $c\delta_0$ est solution de $xT = 0$:

$$\begin{aligned} \langle\, x\delta_0,\, \varphi\rangle &= \langle\, \delta_0,\, x\varphi\rangle = (x\varphi)(0) = 0 \\ &\Longrightarrow x\delta_0 = 0 \end{aligned}$$

Montrons que

$$xT = 0 \Longrightarrow \exists c \mid T = c\delta_0$$

On a

$$xT = 0 \Longrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle\, xT,\, \varphi\rangle = 0 = \langle\, T,\, x\varphi\rangle$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}$, alors

$$\chi = \chi(0)\varphi_0 + x\varphi$$

avec $\varphi_0 \in \mathcal{D}$, φ_0 fixée telle que $\varphi_0(0) = 1$, et $\varphi \in \mathcal{D}$.

$$\varphi(x) = \frac{\chi(x) - \chi(0)\varphi_0(x)}{x}$$

χ et φ_0 sont à support compact donc φ l'est, et au voisinage de 0 :

$$\varphi(x) = \frac{x(\chi'(0) - \chi(0)\varphi_0'(x))}{x}$$

donc φ est C^∞.

$$\forall \chi \in \mathcal{D} \quad \chi = \chi(0)\varphi_0 + x\varphi$$

avec $\varphi \in \mathcal{D}$, donc

$$\begin{aligned} \langle\, T,\, \chi\rangle &= \chi(0)\, \langle\, T,\, \varphi_0\rangle + \langle\, T,\, x\varphi\rangle \\ &= \langle\, \delta_0,\, \chi\rangle\, c + \underbrace{\langle\, xT,\, \varphi\rangle}_{=0} \end{aligned}$$

d'où

$$T = c\delta_0$$

□

2.5 Distributions périodiques

Soit S^1 le cercle de rayon 1 :

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto f(\theta) \end{aligned}$$

avec

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$$

Définition 2.6. $\mathcal{D}(S^1)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ sur S^1.

Si $f \in \mathcal{D}(S^1)$, alors

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{in\theta} \tag{2.13}$$

avec

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \tag{2.14}$$

la convergence étant uniforme :

$$f \in C^p \Rightarrow c_n(f)\,|n|^q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall q < p \tag{2.15}$$

Définition 2.7. $\mathcal{D}'(S^1)$, l'ensemble des distributions sur S^1, est l'ensemble des formes linéaires (continues) sur $\mathcal{D}(S^1)$:

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(S^1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \langle T,\, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Notons $e_n = \mathrm{e}^{in\theta}$, alors

$$\begin{aligned} \langle\, e_n,\, \varphi\rangle &= \int \varphi(\theta)\,\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{d}\theta \\ c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\,\langle\, e_n,\, \varphi\rangle \end{aligned}$$

et d'après (2.13) :

$$\begin{aligned} \langle\, T,\, \varphi\rangle &= \left\langle\, T,\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e_n \right\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\, T,\, e_n\rangle\, c_n(\varphi) \end{aligned}$$

grâce à la continuité de T.

Définissons $c_n(T) = \frac{1}{2\pi}\,\langle\, T,\, e_n\rangle$, alors

$$\langle\, T,\, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi c_n(T)c_n(\varphi) \tag{2.16}$$

D'autre part

$$\left\langle \sum c_n(T)e_n,\, \varphi \right\rangle = \sum c_n(T)\,\underbrace{\langle\, e_n,\, \varphi\rangle}_{c_{-n}(\varphi)2\pi} = \langle\, T,\, \varphi\rangle \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(S^1)$$

Théorème 2.3.

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(T)e_n \tag{2.17}$$

avec

$$c_n(T) = \frac{1}{2\pi}\,\langle\, T,\, e_n\rangle \tag{2.18}$$

Exemple 2.14 (Peigne de Dirac)**.**
On définit le peigne de Dirac par

$$\langle P_0, \varphi \rangle = \varphi(0) \tag{2.19}$$

$$c_n(P_0) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\langle P_0, e_{-n} \rangle}_{=e_{-n}(0)=1}$$

donc

$$P_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n$$

et

$$\begin{aligned} c_n(T') &= \frac{1}{2\pi} \langle T', e_{-n} \rangle \\ &= \frac{-1}{2\pi} \langle T, e'_{-n} \rangle \\ &= \frac{-1}{2\pi} \langle T, (-in)e_{-n} \rangle \\ &= \frac{in}{2\pi} \langle T, e_{-n} \rangle \end{aligned}$$

d'où

$$c_n(T') = inc_n(T) \tag{2.20}$$

donc

$$\begin{aligned} c_n(P_0') &= \frac{in}{2\pi} \\ c_n(P_0^{(p)}) &= \frac{(in)^p}{2\pi} \\ P_0^{(p)} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^p c_n \end{aligned}$$

a un sens au sens des distributions.

2.6 Distributions de plusieurs variables

Définition 2.8. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs complexes, de classe C^∞ et nulles en dehors d'un ensemble borné.

Proposition 2.5 (Produit tensoriel)**.** On a

$$\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad j = 1, \dots, d \Longrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_d) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_d(x_d) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \tag{2.21}$$

On écrit $\varphi = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_d$. On dit que φ est le produit tensoriel des fonctions φ_j.

Définition 2.9 (Distribution)**.** Une distribution est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. L'ensemble des distributions est $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.10 (Produit tensoriel de distribution)**.** On définit le produit tensoriel $T \otimes S$ de deux distributions $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par

$$\langle\, T \otimes S,\, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle\, T,\, \varphi_1 \rangle \langle\, S,\, \varphi_2 \rangle \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{2.22}$$

Théorème 2.4. Soit $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Alors pour calculer $\langle T \otimes S,\, \varphi \rangle$, on peut fixer x et faire opérer S sur $\varphi(x,\cdot)$, on obtient une fonction de x qui appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et le résultat est obtenu en faisant opérer T sur cette fonction, c'est à dire

$$\langle\, T(x)S(y),\, \varphi(x,y) \rangle = \langle\, T(x),\, \langle\, S(y),\, \varphi(x,y) \rangle \rangle = \langle\, S(y),\, \langle\, T(x),\, \varphi(x,y) \rangle \rangle \tag{2.23}$$

2.6.1 Exemples de distributions

Définition 2.11 (Distribution régulière)**.** Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle\, T_f,\, \varphi \rangle = \langle\, f,\, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \mathrm{d}^d x \tag{2.24}$$

Exemple 2.15.

Soit $f = 1/r^\alpha$ avec $r^2 = x_1^2 + x_d^2$. f est localement intégrable si

$$\int_0 \frac{1}{r^\alpha} \mathrm{d}^d x < 0$$

Or $\mathrm{d}^d x = r^{d-1} \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega$ où $\mathrm{d}\Omega$ est l'élément de surface sur la sphère unité. Ainsi

$$\alpha - d + 1 < 1 \Longrightarrow \alpha < d$$

Exemple 2.16 (Distribution de Dirac)**.**

La distribution de Dirac est définie par

$$\langle\, \delta_{\vec{a}},\, \varphi \rangle = \varphi(\vec{a}) \tag{2.25}$$

avec

$$\delta_{\vec{a}} = \delta_{a_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{a_d} \tag{2.26}$$

et on pose $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_d)$.

Pour $d = 2$ on a par exemple

$$\langle\, \delta_{a_1} \otimes \delta_{a_2},\, \varphi(x,y) \rangle = \left\langle\, \delta_{a_1},\, \underbrace{\langle\, \delta_{a_2},\, \varphi(x,y) \rangle}_{\varphi(x,a_2)} \right\rangle = \varphi(a_1, a_2)$$

On définit

$$\partial_i \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \qquad i = 1, \cdots, d \tag{2.27}$$

Proposition 2.6 (Dérivation)**.** On a

$$\langle\, \partial_i T,\, \varphi \rangle = -\langle\, T,\, \partial_i \varphi \rangle \tag{2.28}$$

Définition 2.12 (Laplacien)**.** Le laplacien est défini par $\Delta = \sum_i \partial_i \partial_i$. On a

$$\langle\, \Delta\, T,\, \varphi \rangle = \langle\, T,\, \Delta\, \varphi \rangle \tag{2.29}$$

Définition 2.13 (Divergence)**.** On définit la divergence d'un vecteur $\vec{V}$ par

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^{d} \partial_i V^i = \operatorname{div} \vec{V} \tag{2.30}$$

Théorème 2.5 (Stokes)**.**

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^{d} \partial_i V^i \mathrm{d}^d x = \int_S \sum_i V^i n_i \mathrm{d}S \tag{2.31}$$

S est le bord de $\mathcal{V}$, $\vec{n}$ est normal à la surface et unitaire et $\vec{V} = (V_1, \ldots, V_d)$ est un vecteur.

Exemple 2.17.

Pour $d = 3$, que vaut $\Delta\, 1/r$?

Pour une fonction radiale, on a

$$\Delta\, f(r) = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} r f$$

On a $\Delta\, 1/r = 0$ avec $r \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \Delta\, \frac{1}{r}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{r}, \Delta\, \varphi \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\, \Delta\, \varphi \; \mathrm{d}^3 x \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{r > \varepsilon} \frac{1}{r}\, \Delta\, \varphi \; \mathrm{d}^3 x
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
f\, \Delta\, g &= f \sum_i \partial_i \partial_i g \\
&= \sum_i \partial_i (f \partial_i g) - \sum_i (\partial_i f) \partial_i g
\end{aligned}$$

et de même

$$g\, \Delta\, f = \sum_i \partial_i (f \partial_i g) - \sum_i (\partial_i f) \partial_i g$$

On a donc

$$f\, \Delta\, g - g\, \Delta\, f = \sum_{i=1}^{d} \partial_i (\underbrace{f \partial_i g - g \partial_i f}_{V_i})$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{r > \varepsilon} \frac{1}{r}\, \Delta\, \varphi - \int_{r > \varepsilon} \varphi\, \Delta\, \frac{1}{r} &= \int_{r > \varepsilon} \sum_i \partial_i V_i \\
&= \int_{\mathcal{S}(\varepsilon)} V^i \mathrm{d}S_i \\
&= \int_{r = \varepsilon} \left[\frac{1}{r} (-\partial_r \varphi) + \varphi \partial_r \frac{1}{r} \right] 4\pi r^2 \; \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

alors

$$\langle\, \Delta\, 1/r,\, \varphi \rangle = -4\pi\varphi(\vec{0})$$

Théorème 2.6. On a, pour $d = 3$:

$$\langle\, \Delta\, 1/r,\, \varphi \rangle = \langle\, -4\pi\delta_{\vec{0}},\, \varphi \rangle \tag{2.32}$$

Exemple 2.18.
On a aussi :
- $d \geq 3$:

$$\Delta\, \frac{1}{r^{d-2}} = \alpha_d \delta_{\vec{0}} \tag{2.33}$$

- $d = 2$:

$$\Delta \ln x = \alpha \delta_{\vec{0}} \tag{2.34}$$

Définition 2.14 (Support d'une fonction)**.** Le support d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ est par définition le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel la fonction est nulle. Il s'agit donc d'un ensemble fermé. Le support de f contient les points x avec $f(x) \neq 0$ et aussi la limite de suite de tels points.

Proposition 2.7. Si les supports de f et g sont disjoints alors $fg = 0$ et $\int fg = 0$.

Définition 2.15 (Support d'une distribution)**.** Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on dit que T est nulle sur un ouvert G si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans G alors $\langle T,\, \varphi \rangle = 0$.

Proposition 2.8. Il existe un plus grand ouvert où T est nulle. Son complémentaire est, par définition, le support de T.

Exemple 2.19.
Le support de $\delta_{\vec{0}}$ est $\{\vec{0}\}$.

2.6.2 Extension du symbole $\langle\, T,\, \varphi \rangle$

En général $\langle\, T,\, 1 \rangle$ n'a pas de sens. Cependant, pour certaines distributions, ce symbole peut être défini : si pour toute fonction de $(\mathbb{R}^d)$ avec $\varphi(0) = 1$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \langle\, T,\, \varphi(\varepsilon x) \rangle$ existe et est indépendante de φ, on appelle cette limite $\langle\, T,\, 1 \rangle$.

Exemple 2.20.

$$\delta_{\vec{0}} = \varphi(0) = 1 = \langle\, \delta_{\vec{0}},\, 1 \rangle$$

2.6.3 Produit de convolution

Définition 2.16 (Produit de convolution)**.** Soient $f, g \in L^1_{loc}$, alors

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y \tag{2.35}$$

Pour une distribution, on aura

$$\begin{aligned}\langle\, f * g,\, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int f(x-y)g(y)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

en posant $x = u + y$

$$\begin{aligned}&= \int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(y)\varphi(u+y)\mathrm{d}u\mathrm{d}y \\ &= \langle\, f(x)\varphi(y),\, \varphi(x+y)\rangle\end{aligned}$$

où $f(x)g(y)$ est le produit tensoriel de f et g et où $\varphi(x+y)$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Définition 2.17 (Convolution de deux distributions)**.** Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si $\langle\, T(x)S(y),\, \varphi(x+y)\rangle$ existe pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $T * S$ existe et

$$\langle\, T * S,\, \varphi\rangle = \langle\, T(x)S(y),\, \varphi(x+y)\rangle \tag{2.36}$$

Théorème 2.7. Si le support de S ou de T est borné alors $S * T$ existe.

Démonstration.
S a un support borné.

$$\langle\, T(x)S(y),\, \varphi(x+y)\rangle = \left\langle\, T(x),\, \underbrace{\langle\, S(y),\, \varphi(x+y)\rangle}_{\psi(x)}\right\rangle$$

Soient $[A, B]$ le support de φ et $[C, D]$ le support de S. Si $A - x > D$ ou $B - x < C$, ψ est nulle. Donc le support de ψ est $[A - D, B - C]$. □

1.

$$\begin{aligned}\langle\, \delta_0 * T,\, \varphi\rangle &= \langle\, \delta(x)T(y),\, \varphi(x+y)\rangle \\ &= \langle\, T(y),\, \langle\, \delta(x),\, \varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle\, T,\, \varphi\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\delta_0 * T = T \tag{2.37}$$

Ainsi, δ_0 est élément neutre pour la convolution.

2.

$$\begin{aligned}\langle\, \delta_a * T,\, \varphi\rangle &= \langle\, \delta_a(x)T(y),\, \varphi(x+y)\rangle \\ &= \langle\, T(y),\, \varphi(a+y)\rangle \\ &= \langle\, \tau_a T,\, \varphi\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\delta_a * T = \tau_a T \tag{2.38}$$

3.

$$\begin{aligned}\langle\, \delta_0' * T,\, \varphi\rangle &= \langle\, \delta_0'(x)T(y),\, \varphi(x+y)\rangle \\ &= \left\langle\, T(y),\, \underbrace{\langle\, \delta_0',\, \varphi(x+y)\rangle}_{-\varphi'(y)} \right\rangle \\ &= -\,\langle\, T,\, \varphi'\rangle = \langle\, T',\, \varphi\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\delta_0' * T = T' \tag{2.39}$$

On a de plus

$$(T * S)' = T' * S = T * S' \tag{2.40}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\langle\, (T*S)',\, \varphi\rangle &= -\,\langle\, T*S,\, \varphi'\rangle \\ &= -\,\langle\, T(x)S(y),\, \varphi'(x+y)\rangle \\ &= -\left\langle\, T(x),\, \underbrace{\langle\, S(y),\, \varphi'(x+y)\rangle}_{-\langle\, S'(y),\, \varphi(x+y)\rangle} \right\rangle \\ &= \langle\, T * S',\, \varphi\rangle\end{aligned}$$

□

On a aussi $(T * S)'' = T'' * S$.

Exemple 2.21.

$$\begin{aligned}\delta_0 * T &= T \\ \Longrightarrow (\delta_0 * T)' &= T' \qquad \delta_0' * T = \delta_0 * T'\end{aligned}$$

Exemple 2.22.
$H * H$ n'existe pas :

$$\begin{aligned}\langle\, H*H,\, \varphi\rangle &= \langle\, H(x)H(y),\, \varphi(x+y)\rangle \\ &= \left\langle\, H(x),\, \int_0^\infty \varphi(x+y)\mathrm{d}y \right\rangle \\ &= \left\langle\, H(x),\, \underbrace{\int_x^\infty \varphi(u)\mathrm{d}u}_{\notin\mathcal{D}} \right\rangle\end{aligned}$$

Proposition 2.9. Soit D un opérateur différentiel tel que

$$DT = \sum_{n=0}^{N} a_n T^{(n)} \tag{2.41}$$

alors

$$D(T * S) = (DT) * S \tag{2.42}$$

Exemple 2.23 (Équation de Poisson)**.**
L'équation de Poisson est
$$\Delta T = \rho \tag{2.43}$$
où ρ est à support compact.

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta_{\vec{0}}$$
$$\Delta \frac{-1}{4\pi r} = \delta_{\vec{0}}$$

Une solution à (2.43) est
$$T = \rho * \frac{-1}{4\pi r}$$

Exemple 2.24.
Pour résoudre $DT = \rho$, on détermine G tel que $DG = \delta_{\vec{0}}$, où G est une fonction de Green. Alors $G * \rho$ vérifie
$$D(G * \rho) = DG * \rho = \delta_{\vec{0}} * \rho = \rho$$

Chapitre 3

Transformées de Fourier et distributions tempérées

3.1 Transformée de Fourier d'une distribution

Soit T_f une distribution régulière associée à une fonction $f \in L^1$, et soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors

$$\left\langle T_{\hat{f}}, \phi \right\rangle = \int \hat{f}\phi \tag{3.1}$$

$\hat{f}$ est localement intégrable car $f \in L^1$. Le théorème de Plancherel–Parseval 1.4 permet d'écrire que

$$\left\langle T_{\hat{f}}, \phi \right\rangle = \left\langle T_f, \hat{\phi} \right\rangle \tag{3.2}$$

On est tenté de définir la transformée de Fourier $\mathrm{F}\,T$ de T par

$$\langle \mathrm{F}\,T, \phi \rangle = \langle T, \mathrm{F}\,\phi \rangle$$

or pour que cette définition ait un sens, il faut que $\mathrm{F}\,\phi \in \mathcal{D}$, mais $\phi \notin \mathcal{D} \Rightarrow \mathrm{F}\,T \in \mathcal{D}$:

$$\hat{\phi}(k) = \int_A^B \phi(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x$$

et $\operatorname{supp}\phi = [A, B]$. Posons $k = k_1 + ik_2$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B \phi(x)\,\mathrm{e}^{-izx}\mathrm{d}x$$

comme fonction de z complexe est analytique : elle admet un développement en série de Taylor au voisinage de tout point, donc g ne peut pas être à support compact. Or une fonction de $\mathcal{D}$ n'admet pas de développement de Taylor aux bornes de son support (car toutes ses dérivées s'annulent). Donc $\hat{\phi}$ n'est pas dans $\mathcal{D}$.

L'ensemble des fonctions test doit être stable par transformation de Fourier. L'espace $\mathcal{S}$ (définition 1.6, page 16) est stable par transformation de Fourier. Ceci nous amène à la définition des distributions tempérées.

Définition 3.1 (Distribution tempérée)**.** Une distribution $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est dite tempérée.

On note $\mathcal{S}'$ l'ensemble des distributions tempérées : il s'agit de l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{S}$.

Exemple 3.1 (Distribution de Dirac)**.**

On a

$$\langle\, \delta_a,\, \phi\rangle = \phi(a)$$

donc $\delta_a \in \mathcal{S}'$.

Si f est localement intégrable, T_f n'est pas toujours dans $\mathcal{S}'$.

Exemple 3.2.

Par exemple, $\mathrm{e}^{x^2} \in \mathcal{D}$ est localement intégrable, et $\mathrm{e}^{-x^2/2} \in \mathcal{S}$, alors

$$\int \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} = \infty$$

Donc l'inclusion $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ est stricte :

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}' \tag{3.3}$$

Si f est localement intégrable et $f = O_\infty(x^n)$, alors $T_f \in \mathcal{S}'$.

Exemple 3.3 (Valeur principale)**.**

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x < \infty$$

si $\phi \in \mathcal{S}$, donc $\mathrm{vp}\, 1/x \in \mathcal{S}'$.

Définition 3.2 (Transformée de Fourier de distributions tempérées)**.** Si $T \in \mathcal{S}'$, alors $\mathrm{F}\, T$ est définie par

$$\langle\, \mathrm{F}\, T,\, \phi\rangle = \langle\, T,\, \mathrm{F}\, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{S} \tag{3.4}$$

De même, $\overline{\mathrm{F}}\, T$ est définie par

$$\left\langle\, \overline{\mathrm{F}}\, T,\, \phi\right\rangle = \left\langle\, T,\, \overline{\mathrm{F}}\, \phi\right\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{S} \tag{3.5}$$

La définition a un sens car $\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathrm{F}\, \phi \in \mathcal{S}$.

Théorème 3.1 (Inversion)**.** Soit $T \in \mathcal{S}'$, alors on a

$$\overline{\mathrm{F}}\, \mathrm{F}\, T = T \tag{3.6}$$

Démonstration.

Soit $\phi \in \mathcal{S}$, alors

$$\begin{aligned} \left\langle\, \overline{\mathrm{F}}\, \mathrm{F}\, T,\, \phi\right\rangle &= \left\langle\, \mathrm{F}\, T,\, \overline{\mathrm{F}}\, \phi\right\rangle \\ &= \left\langle\, T,\, \mathrm{F}\, \overline{\mathrm{F}}\, \phi\right\rangle \\ &= \langle\, T,\, \phi\rangle \end{aligned}$$

□

Exemple 3.4.

$$\begin{aligned}\langle\, \mathrm{F}\,\delta_0,\, \phi\rangle &= \langle\, \delta_0,\, \mathrm{F}\,\phi\rangle \\ &= \mathrm{F}\,\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \left\langle\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\, \phi\right\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{F}\,\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.7}$$

Exemple 3.5.

$$\begin{aligned}\langle\, \mathrm{F}\,\delta_a,\, \phi\rangle &= \langle\, \delta_a,\, \mathrm{F}\,\phi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \phi(x)\,\mathrm{e}^{-iax}\mathrm{d}x \\ &= \left\langle\, \frac{\mathrm{e}^{-iax}}{\sqrt{2\pi}},\, \phi\right\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{F}\,\delta_a = \frac{\mathrm{e}^{-iax}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.8}$$

Exemple 3.6.
Soit $T = c$ constante dans $\mathcal{S}'$, alors

$$\begin{aligned}\langle\, \mathrm{F}\,c,\, \phi\rangle &= \langle\, c,\, \mathrm{F}\,\phi\rangle \\ &= \sqrt{2\pi}c\int \hat{\phi}\frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \\ &= c\sqrt{2\pi}\phi(0) \\ &= \left\langle\, c\sqrt{2\pi}\delta_0,\, \phi\right\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{F}\,c = c\sqrt{2\pi}\delta_0 \tag{3.9}$$

Proposition 3.1. Soit $T \in \mathcal{S}'$, alors on a les propriétés suivantes :

$$\mathrm{F}\,\tau_a T(k) = \mathrm{e}^{-iak}\,\mathrm{F}\,T(k) \tag{3.10a}$$

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{e}^{iax}T(x)\right) = \tau_a\,\mathrm{F}\,T(k) \tag{3.10b}$$

$$\mathrm{F}\left(xT(x)\right)(k) = i(\mathrm{F}\,T)'(k) \tag{3.10c}$$

$$\mathrm{F}\left(T'(x)\right)(k) = ik\,\mathrm{F}\,T(k) \tag{3.10d}$$

et si $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T \in \mathcal{S}'$, alors $\mathrm{F}\,T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}\,T$.

Démonstration.

1. On a
$$\langle \tau_a T,\, \phi\rangle = \langle T,\, \tau_{-a}\phi\rangle$$
et donc
$$\begin{aligned}\langle \mathrm{F}\,\tau_a T,\, \phi\rangle &= \langle \tau_a T,\, \mathrm{F}\,\phi\rangle \\ &= \langle T,\, \tau_{-a}\,\mathrm{F}\,\phi\rangle = \left\langle T,\, \mathrm{F}\left(\mathrm{e}^{-iax}\phi\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{F}\,T,\, \mathrm{e}^{-iax}\phi\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{-iax}\,\mathrm{F}\,T,\, \varphi\right\rangle\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{F}\,\mathrm{e}^{iax}T,\, \phi\right\rangle &= \left\langle \mathrm{e}^{iax}T,\, \mathrm{F}\,\phi\right\rangle \\ &= \left\langle T,\, \mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{F}\,\phi\right\rangle = \langle T,\, \mathrm{F}\,\tau_{-a}\phi\rangle \\ &= \langle \mathrm{F}\,T,\, \tau_{-a}\phi\rangle = \langle \tau_a\,\mathrm{F}\,T,\, \phi\rangle\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\langle \mathrm{F}(xT),\, \phi\rangle &= \langle xT,\, \mathrm{F}\,\phi\rangle \\ &= \langle T,\, x\,\mathrm{F}\,\phi\rangle = \langle T,\, \mathrm{F}(-i\phi')\rangle \\ &= \langle \mathrm{F}\,T,\, -i\phi'\rangle = i\,\langle (\mathrm{F}\,T)',\, \phi\rangle\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\langle \mathrm{F}\,T',\, \phi\rangle &= \langle T',\, \mathrm{F}\,\phi\rangle \\ &= -\langle T,\, (\mathrm{F}\,\phi)'\rangle = -\langle T,\, \mathrm{F}(-ix\phi)\rangle \\ &= i\,\langle T,\, \mathrm{F}\,x\phi\rangle = i\,\langle \mathrm{F}\,T,\, x\phi\rangle \\ &= i\,\langle x\,\mathrm{F}\,T,\, \phi\rangle\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}\langle \mathrm{F}\,T_n,\, \phi\rangle &= \langle T_n,\, \mathrm{F}\,\phi\rangle \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T,\, \mathrm{F}\,\phi\rangle \\ &= \langle \mathrm{F}\,T,\, \phi\rangle\end{aligned}$$

Si T_n sont régulières et associées à une fonction de L^1, on peut calculer sa transformée.

□

Exemple 3.7 (Onde plane)**.**
Soit $T = (2\pi)^{-1/2}$ et $\mathrm{F}\,T = \delta_0$, alors
$$\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{e}^{iax}}{\sqrt{2\pi}}\right) = \tau_a\delta_0 = \delta_a$$

Exemple 3.8.
On a
$$\mathrm{F}\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right) = i\delta_0' \qquad \mathrm{F}\left(\frac{x^n}{\sqrt{2\pi}}\right) = i^n\delta_0^{(n)}$$

Exemple 3.9 (Fonction de Heaviside)**.**
$H \notin \mathcal{S}$. On a $H\,\mathrm{e}^{-\varepsilon x} \in L^1$ et $H\,\mathrm{e}^{-\varepsilon x} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} H$ dans $\mathcal{S}'$.

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left(H\,\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\right)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ixk}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\varepsilon+ik}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\,H &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\varepsilon+ik} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{k}+i\pi\delta_0\right)\end{aligned}$$

car

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon} = \mathrm{vp}\,\frac{1}{x} - i\pi\delta_0$$

Exemple 3.10 (Valeur principale)**.**
On a $x\,\mathrm{vp}\,1/x = 1$, et $\mathrm{vp}\,1/x$ est impaire.

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left(x\,\mathrm{vp}\,1/x\right) &= \mathrm{F}\,1 = \sqrt{2\pi}\delta \\ i(\mathrm{F}\,\mathrm{vp}\,1/x)' &= \sqrt{2\pi}\delta = \sqrt{2\pi}H'\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{F}\,\mathrm{vp}\,1/x = -i\sqrt{2\pi}H + c$$

et comme $\mathrm{F}\,\mathrm{vp}\,1/x$ est impaire, on a

$$\mathrm{F}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = -i\sqrt{2\pi}\left(H-\frac{1}{2}\right) \tag{3.11}$$

avec $H - 1/2 = \varepsilon(k)/2$ où ε est la fonction signe.

Exemple 3.11 (Partie finie)**.**
On a

$$\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)' = -\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} &= -\,\mathrm{F}\left(\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)'\right) \\ &= -ik\,\mathrm{F}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \\ &= -\sqrt{2\pi}k\varepsilon(k)\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{F}\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} = -\sqrt{2\pi}\,|k| \tag{3.12}$$

et par le théorème d'inversion, on obtient

$$\mathrm{F}(|x|)(k) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} \tag{3.13}$$

Exemple 3.12 (Logarithme).
$\ln|x| \in \mathcal{S}'$ et $(\ln|x|)' = \mathrm{vp}\, 1/x$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left((\ln|x|)'\right)(k) &= -ik\,\mathrm{F}\ln|x| \\ &= \mathrm{F}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\varepsilon(k)\end{aligned}$$

On a

$$\left\langle \mathrm{Pf}\,\frac{1}{|k|},\, \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|k|>\varepsilon} \frac{\phi(k)}{|k|}\mathrm{d}k - 2\phi(0)\ln\varepsilon$$

donc

$$k\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{|k|} = \varepsilon(k)$$

et en reprenant le calcul précédent

$$k\,\mathrm{F}\ln|x| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}k\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{|k|}$$

ce qui nous ramène à l'équation

$$k\left(\mathrm{F}\ln x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{k}\right) = 0$$

donc

$$\mathrm{F}\ln|x| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{|k|} + c\delta_0 \tag{3.14}$$

Il faut encore trouver la constante.

3.2 Transformée de Fourier et produit de convolution

En général, si $S, T \in \mathcal{S}'$, $S * T$ n'existe pas (par exemple $H * H \notin \mathcal{S}'$).

Théorème 3.2. Si $S \in \mathcal{S}'$ et T à support borné, alors $S * T \in \mathcal{S}'$.

Démonstration.
Soit $\phi \in \mathcal{S}$, alors

$$\begin{aligned}\langle\, S * T,\, \phi\rangle &= \langle\, S_x T_y,\, \phi(x+y)\rangle \\ &= \langle\, S_x,\, \langle T_y,\, \phi(x+y)\rangle\rangle\end{aligned}$$

$\langle T_y,\, \phi(x+y)\rangle$ est à support borné donc dans ϕ. □

Lemme 3.1. Si T est à support borné, alors

$$(\mathrm{F}\,T)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle\, T_x,\ \mathrm{e}^{-ikx}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle\ \mathrm{e}^{-ikx}T_x,\, 1\right\rangle \tag{3.15}$$

Démonstration.

On a

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle T_x,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle$$

et soit $\phi \in \mathcal{S}$, alors

$$\begin{aligned}
\langle g,\, \phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k \left\langle T_x,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \phi(k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k \left\langle T_x,\, \phi(k)\, \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \\
&= \left\langle T_x,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k\ \phi(k)\, \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \\
&= \langle T,\, \mathrm{F}\,\phi\rangle = \langle \mathrm{F}\,T,\, \phi\rangle
\end{aligned}$$

donc

$$g = \mathrm{F}\,T$$

□

Exemple 3.13.

$$\mathrm{F}\,\delta_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle \delta_a,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-ika}$$

Lemme 3.2. Soit $S \in \mathcal{S}'$, alors

$$(\mathrm{F}\,S)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle S_x,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \tag{3.16}$$

Démonstration.

Soit $\psi \in \mathcal{D}$ avec $\psi(0) = 1$, et soit $S_\varepsilon = \psi(x\varepsilon)S$ à support borné. On a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} S_\varepsilon = S$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}\,S &= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{F}\,S_\varepsilon \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle S_\varepsilon,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle
\end{aligned}$$

par le lemme 3.1

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle \psi(\varepsilon x)S,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle S,\, \psi(\varepsilon x)\, \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle S,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3. Soit $S \in \mathcal{S}'$ et T à support borné, alors

$$\mathrm{F}(S * T) = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{F}(S)\, \mathrm{F}(T) \tag{3.17}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(S*T)(k) &= \left\langle\, S*T,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle\, S_x T_y,\ \mathrm{e}^{-ik(x+y)} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle\, S_x,\ \left\langle\, T_y,\ \mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{e}^{-iky} \right\rangle \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle\, S_x,\ \sqrt{2\pi}\,\mathrm{F}\,T(k)\,\mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \\
&= \left\langle\, S_x,\ \mathrm{e}^{-ikx} \right\rangle \mathrm{F}\,T(k) \\
&= \sqrt{2\pi}\,\mathrm{F}\,S(k)\,\mathrm{F}\,T(k)
\end{aligned}$$

□

3.3 Applications

3.3.1 Équations différentielles

Soit D un opérateur différentiel d'ordre N, c'est à dire que D s'écrit comme

$$D = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \tag{3.18}$$

Rappelons que

$$D(S*T) = (DS)*T = S*(DT) \tag{3.19}$$

Définition 3.3 (Fonction de Green)**.** Une fonction de Green associée à l'opérateur D est une solution de

$$DG = \delta_0 \tag{3.20}$$

Remarque : La fonction de Green n'est généralement pas unique.

Théorème 3.4. Une solution à l'équation $DT = F$ où F est à support borné est donnée par

$$T = G*F \tag{3.21}$$

Démonstration.

$$D(G*T) = DG*T = \delta_0 * T = T$$

□

Théorème 3.5. La transformée de Fourier de G est solution de

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n (ik)^n\right)(FG)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.22}$$

Démonstration.
On a $DG = \delta_0$ et

$$\mathrm{F}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n G^{(n)}\right) = \mathrm{F}\,\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

et

$$\mathrm{F}\,G^{(n)} = (ik)^n(\mathrm{F}\,G)$$

□

Exemple 3.14.
Soit

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

On a

$$ik\,\mathrm{F}\,G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\mathrm{F}\,G = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{k} + c\delta_0$$

Exemple 3.15.
Soit

$$D = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - a^2$$

avec $a \neq 0$. On a

$$(-k^2 - a^2)\,\mathrm{F}\,G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\mathrm{F}\,G = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2 + a^2} \in L^1$$

donc

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2+a^2}\right)\mathrm{e}^{ikx} \\ &= \frac{-1}{2\pi}(2\pi i)\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{2ia} \\ &= -\frac{1}{2a}\,\mathrm{e}^{-a|x|} \end{aligned}$$

car $G(x) = G(-x)$, et on a intégré dans le plan complexe sur le cercle de rayon R.

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N} a_n (ik)^n\right)}_{P_N(k)}\mathrm{F}\,G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

où $P_N(k)$ est un polynôme de degré N dans $\mathbb{C}$: il admet donc N racines complexes, c'est à dire

$$P_N(k) = a_N \prod_{i=1}^{N}(k - k_i) \tag{3.23}$$

Si pour tout i on a $J_m(k_i) \neq 0$, alors $k - k_i$ ne s'annule pas. Dans ce cas

$$\mathrm{F}\, G(k) = \frac{1}{P_N(k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.24}$$

Exemple 3.16 (Oscillateur harmonique)**.**

On étudie l'oscillateur harmonique amorti couplé à une force extérieure :

$$\ddot{u}(t) + 2\gamma \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = f(t) \tag{3.25}$$

que l'on récrit

$$Du = f$$

avec

$$D = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2$$

alors

$$\begin{aligned} P_2(k) &= -k^2 + 2i\gamma k + \omega_0^2 \\ &= -(k - i\gamma)^2 - \gamma^2 + \omega_0^2 \\ &= -(k - k_+)(k - k_-) \end{aligned}$$

avec

$$k_\pm = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

et $\gamma \neq 0 \Rightarrow \Im(k_\pm) \neq 0$.

G est solution et

$$(FG)(k) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(k - k_-)(k - k_+)}$$

donc

$$G(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \right) \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{(k - k_+)(k - k_-)}$$

$\omega_0^2 > \gamma^2$: $\Im(k_\pm) = i\gamma > 0$. $G = 0$ si $x < 0$, sinon

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{-1}{2\pi} 2\pi i \left(\frac{\mathrm{e}^{ixk_+}}{k_+ - k_-} + \frac{\mathrm{e}^{ixk_-}}{k_- - k_+} \right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x\gamma}}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x \right) H(x) \end{aligned}$$

La solution particulière est $u = G * f$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{\mathbb{R}} G(t - \tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(t - \tau)\, \mathrm{e}^{(t-\tau)\gamma} \frac{\sin \nu_0 (t - \tau)}{\nu_0} f(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{(t-\tau)\gamma} \frac{\sin \nu_0 (t - \tau)}{\nu_0} f(\tau) \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

solution causale car $u(t)$ dépend de $t(\tau)$, $\tau < t$.

Une fonction de Green causale est 0 si $t < 0$.

Remarque : Si $\gamma = 0$, on a $P(k) = -(k - \omega_0)(k + \omega_0)$. Pour obtenir la solution causale, il suffit de prendre la limite $\gamma \to 0$ de la solution précédente, de changer les pôles : $\pm\omega_0 \to \pm\omega_0 + i\varepsilon$, alors

$$\mathrm{F}\,G = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{k - (\omega_0 + i\varepsilon)} \, \frac{1}{k - (-\omega_0 + i\varepsilon)}$$

3.3.2 Formule sommatoire de Poisson

Théorème 3.6. Soit $\phi \in S$, alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(n) \tag{3.26}$$

Démonstration.

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(x + 2\pi n) \\ f(x+2\pi) = f(x) \qquad f \in C^\infty \\ f(x) = \sum_n c_n \, \mathrm{e}^{inx} \end{gathered}$$

et

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \phi(x + 2\pi p) \, \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \phi(x + 2\pi p) \, \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi p}^{2\pi(p+1)} \phi(u) \, \mathrm{e}^{in(u - 2\pi p)} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \, \mathrm{e}^{-inu} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\phi}(n) \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(x + 2\pi u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\phi}(u) \, \mathrm{e}^{iux}$$

et on retrouve le théorème en prenant $x = 0$. □

Exemple 3.17 (Gaussienne)**.**

On a

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$
$$\hat{\phi}(x) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2x^2}{2}}$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{(2\pi n)^2}{2a^2}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{n^2a^2}{2}}$$

et en posant $a = \sqrt{2\pi}\tau$ on a

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi\tau^2 n^2}$$
$$\tau\theta(\tau) = \theta\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

Cette dernière relation est appelée propriété de dualité. $\theta(\tau)$ est la fonction de Jacobi.

Chapitre 4

Les fonctions spéciales : la fonction Gamma

4.1 Définition et propriétés

Définition 4.1 (Fonction Gamma)**.** On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma = \int_0^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$.

Cette définition est due à Euler.
On a

$$\begin{aligned} \left|t^{z-1}\right| &= \left|t^{x+iy-1}\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{(x+iy-1)\ln t}\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\right| \\ &= t^{x-1} \end{aligned}$$

et

$$\int_0 t^{x-1}\mathrm{d}t < \infty$$

si $x > 0$. Et de même

$$\int^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t < \infty \qquad \forall x$$

Proposition 4.1. On a les propriétés suivantes :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{4.2}$$
$$\Gamma(n+1) = n! \tag{4.3}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z \,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{t^z \,\mathrm{e}^{-t}}_{=0}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}
$$

On a

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$$

□

Théorème 4.1. $\Gamma(z)$ est dérivable pour $\Re(z) > 0$ et

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}z}(z) = \int_0^\infty \ln t \; t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

Démonstration.

$$t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\,\mathrm{e}^{-t}$$

est dérivable et a pour dérivée

$$\ln t \;\mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\,\mathrm{e}^{-t} = \ln t \; t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t} = f(t,z)$$

Montrons que $|f(t,z)| \leq h(t)$, avec $\int_0^\infty h \leq \infty$.

– $\Re(z) > 0$.
– $a < \Re(z) < A$, avec $a, A > 0$.
– Pour $0 < t < 1$:

$$
\begin{aligned}
|f(t,z)| &= |\ln t|\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \\
&\leq |\ln t|\, t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}
$$

– Pour $1 < t < \infty$:

$$|f(t,z)| \leq \ln t \; t^{A-1}\,\mathrm{e}^{-t}$$

On a bien $\int h < \infty$. Donc $\Gamma(z)$ est dérivable. □

Exemple 4.1 (Prolongement analytique)**.**

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n \qquad |z| < 1$$

alors

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

est un prolongement analytique de f définie dans $\mathbb{C} - \{1\}$. En 1 se trouve un pôle simple.

Théorème 4.2. La fonction Γ admet un prolongement analytique dans $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Ce prolongement admet des pôles simples en $z = -n$, avec $n \in \mathbb{N}$ avec

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{4.5}$$

Démonstration.

On utilise la formule (4.2). Soit

$$f_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

alors $f_1(z)$ est analytique pour $\Re(z+1) > 0$ et $\Re(z) > -1$ avec un pôle simple en $z = 0$ avec résidu $\Gamma(1) = 1$.

De même

$$f_2(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}$$

est analytique pour $\Re(z+2) > 0$ et coïncide avec Γ pour $\Re(z)$ et admet un pôle simple en $z = -1$ avec résidu -1. □

Finalement, soit

$$f_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

qui admet comme pôle simple $z = -(n-1)$ avec le résidu

$$\frac{\Gamma(1)}{-(n-1)(-n+2)\cdots 1} = \frac{1}{(-1)^{n-1}(n-1)\cdots 1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Lemme 4.1. Soit

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & 0 \leq t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases} \tag{4.6}$$

alors

$$f_n(t) \leq \mathrm{e}^{-t} \tag{4.7}$$

Démonstration.

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x_0^2}{2}$$

avec $0 < x_0 < x$ donc $\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$ et

$$\mathrm{e}^{-t/n} \geq 1 - \frac{t}{n}$$
$$\mathrm{e}^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

□

Théorème 4.3 (Gauss)**.**

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{4.8}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \exp n \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp n \left(-\frac{t}{n} + O\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}$$

Considérons

$$\int_0^\infty \underbrace{f_n(t)t^{z-1}}_{I(n,z)}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

d'après le théorème de convergence dominée $|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t}$ et

$$\int \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t < \infty$$

pour $\Re(z) > 0$.

En utilisant le chagement de variable $t = nu$, on a aussi

$$I(z,n) = n^2 \int_0^1 \underbrace{(1-u)^n u^{z-1}}_{J(z,n)}\mathrm{d}u$$

que l'on intègre par récurrence et

$$J(n,z) = \frac{n!}{z\cdots(z+n-1)} J(0, z+n)$$

avec

$$J(0,z+n) = \frac{1}{z+n}$$

□

Théorème 4.4 (Weierstrass)**.** On a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n} \tag{4.9}$$

où γ, la constante d'Euler, est définie par

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) \tag{4.10}$$

Corrolaire 4.1.

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n}\right) \tag{4.11}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n}\right) < \infty$$

Corrolaire 4.2. On a

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma \tag{4.12}$$

4.2 Applications

Soit Ω_n la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \tag{4.13}$$

alors

$$\Omega_n = 2\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \tag{4.14}$$

Chapitre 5

Polynômes orthogonaux

5.1 Produit scalaire

Soit X l'ensemble des polynômes de degré n définis sur $[a, b]$:

- a et b sont finis, et par une translation et et une dilatation on se ramène à $[-1, 1]$;
- $[0, \infty[$;
- $]-\infty, \infty[$.

X est un espace vectoriel dont $(x^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base. On munit X d'un produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; \omega(x) f(x) g(x) \qquad f, g \in X \tag{5.1}$$

où ω est une fonction de poids qui est positive et on a

$$\int_a^b \omega p < \infty \qquad \forall p \in X \tag{5.2}$$

On définit la norme $\|f\|$ de f par

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle \tag{5.3}$$

5.2 Orthogonalisation de Gram–Schmidt

Soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base d'un espace vectoriel V et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée. On a

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} \qquad \langle\, e_1 |\, e_1\rangle = 1 \tag{5.4a}$$

$$e_2 = \frac{f_2 - \langle\, f_2 |\, e_1\rangle\, e_1}{\|f_2 - \langle\, f_2 |\, e_1\rangle\, e_1\|} \qquad \langle\, e_1 |\, e_2\rangle = 0 \tag{5.4b}$$

$$e_i = \frac{f_i - \sum\limits_{k=1}^{i+1} \langle\, f_i |\, e_{i-k}\rangle\, e_{i-k}}{\left\| f_i - \sum\limits_{k=1}^{i+1} \langle\, f_i |\, e_{i-k}\rangle\, e_{i-k} \right\|} \qquad \langle\, e_i |\, e_j\rangle = \delta_{ij} \tag{5.4c}$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij} e_j \tag{5.4d}$$

$$\langle\, f_i |\, e_k\rangle = 0 \quad \forall k > i \tag{5.4e}$$

Exemple 5.1 (Polynômes de Legendre)**.**
On prend $[a, b] = [-1, 1]$ et $V = X$. On a $(f_i)_{1\leq i\leq n+1} = (x^k)_{0\leq k\leq n}$. On prend $\omega = 1$, donc le produit scalaire est

$$\langle\, f |\, g\rangle = \int_1^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{5.5}$$

Une base orthonormée de X est donc (ϕ_i) donc

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\phi_1(x) = 2x$$
$$\phi_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}(3x^2 - 1)$$

ce qui donne comme formule générale

$$\left\langle\, \phi_n \middle|\, x^k \right\rangle = 0 \qquad x > k \tag{5.6a}$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} P_n(x) \tag{5.6b}$$

où $P_n(x)$ sont les polynômes de Legendre.

Théorème 5.1. ϕ_n admet n racines réelles.

Démonstration.
Supposons que ϕ_n admette k racines réelles $k < n$, notées x_i, alors

$$\phi_n(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - x_i) = p$$

est un polynôme ne changeant pas de signe, donc

$$\int_a^b \omega p > 0$$

ou

$$\int_a^b \omega p < 0$$

Il s'agit d'une contradiction avec (5.6a) et donc $k = n$. □

Théorème 5.2. On a la relation de récurrence

$$\phi_{n+1} = (A_n x + B_n)\phi_n + C_n \phi_{n-1} = \frac{-\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} \tag{5.7}$$

avec

$$A_n = \frac{k_n + 1}{k_n} \tag{5.8}$$

où k_n est le coefficient du k-ième ordre.

Démonstration.

$x\phi_n$ est un polynôme de degré $n+1$ alors

$$x\phi_n = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \phi_i$$

et

$$\langle\, \phi_k |\, x\phi_n \rangle = \langle\, x\phi_k |\, \phi_n \rangle = \alpha_k$$

et $\alpha_k = 0$ si $k < n-1$ et

$$x\phi_n = \alpha_{n+1}\phi_{n+1} + \alpha_n \phi_n + \alpha_{n-1}\phi_{n-1}$$

□

5.3 L'espace de Hilbert

Définition 5.1. $L^2(\omega)$ est l'ensemble des fonctions telles que

$$\int_a^b \omega f^2 < \infty \tag{5.9}$$

Théorème 5.3. $L^2(\omega)$ muni du produit scalaire est un espace de Hilbert.

Théorème 5.4. Pour tout $f \in L^2(\omega)$ on a

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in L^2(\omega) \tag{5.10}$$

avec $\alpha_n = \langle\, f |\, \phi_n \rangle$.

On se place désormais dans le cas où $[a, b] = [-1, 1]$.

Théorème 5.5. Les fonctions (formule de Rodrigue)

$$f_n(x) = \frac{1}{\omega(x)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\omega(x)(1-x^2)^n\right) \tag{5.11}$$

vérifient

$$\langle\, x^k |\, f_n \rangle = \int_{-1}^{1} \omega(x) x^k f_n(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{5.12}$$

En général les f_n ne sont pas des polynômes. Par exemple, f_1 est un polynôme de degré 1 si

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{\omega}\left(\omega(1-x^2)\right)' \\ &= \frac{\omega'}{\omega}(1-x^2) - 2x \\ &= ax + b \end{aligned}$$

ce qui donne une équation différentielle à résoudre pour ω :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(a+2)x+b}{1-x^2} = \frac{-\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} \tag{5.13}$$

ce qui donne

$$\omega = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{5.14}$$

Théorème 5.6. Pour

$$\omega = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{5.15}$$

les f_n sont des polynômes de degré n.

Par convention on définit les polynômes de Jacobi par

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x^2)^n\right) \tag{5.16}$$

- $\alpha = \beta = 0$: polynômes de Legendre.
- $\alpha = \beta = -1/2$: polynômes de Tchebicheff :

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{2^n}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-1/2} \tag{5.17}$$

Il vérifient la propriété

$$T_n(\cos\theta) = A_n \cos(n\theta) \tag{5.18}$$

Théorème 5.7. Les fonctions

$$f_n = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\omega x^n) \tag{5.19}$$

vérifient

$$\left\langle f_n \middle| x^k \right\rangle = 0 \qquad k < n \tag{5.20}$$

Pour que f_1 soit un polynôme de degré 1, on a l'équation

$$\frac{\omega'}{\omega} = a + \frac{\tilde{b}}{x}$$

donc

$$\omega = \tilde{c}\,\mathrm{e}^{ax}x^{\tilde{b}}$$

et $\omega \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ donc $a < 0$ et par une dilatation on se ramène à

$$\omega = \mathrm{e}^{-x}x^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{5.21}$$

On définit les polynômes de Laguerre par

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} \, \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (\, \mathrm{e}^{-x} x^{\alpha+n}) \tag{5.22}$$

On choisit l'intervalle $[a, b] =]-\infty, \infty[$ et

$$f_n = \frac{1}{\omega} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \omega \tag{5.23}$$

avec $\left\langle f_n \middle| x^k \right\rangle = 0$ si $k < n$ donc

$$\frac{\omega'}{\omega} = ax + b$$

d'où

$$\omega = \, \mathrm{e}^{\alpha x^2/2 + bx} \tag{5.24}$$

et on se ramène, par dilatation et translation, à

$$\omega = \, \mathrm{e}^{-x^2} \tag{5.25}$$

On définit les polynômes de Hermite par

$$H_n(x) = (-1)^n \, \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \, \mathrm{e}^{-x^2} \tag{5.26}$$

Index

Table des matières