Invariances et symétries

Harold Erbin

Notes de cours de Magistère M1, donné par M. David.

Version : 1er mai 2011
Site : http://harold.e.free.fr/

Table des matières

Chapitre 1

Formalisme lagrangien

1.1 Principes variationnels

1.1.1 Équations d'Euler–Lagrange

Principe 1.1 (d'économie naturelle)**.** La nature réalise des lois qui sont nécessairement simples.

Exemple 1.1 (Chemin d'un rayon lumineux)**.**

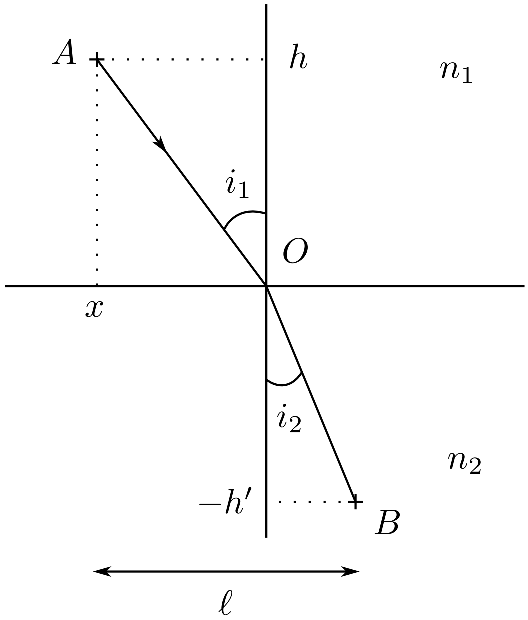

FIGURE 1.1 – Propagation d'un rayon lumineux à travers deux milieux.

On suppose qu'un rayon lumineux est dévié à l'interface de deux milieux d'indice n_1 et n_2 (figure **??**. On suppose que la vitesse dans un milieu est inversement proportionnel à l'indice :

$$v_i = \frac{c}{n_i} \tag{1.1}$$

Le temps nécessaire pour parcourir le chemin total est :

$$T = \frac{n_1\, OA + n_2\, OB}{c} \tag{1.2}$$

avec

$$OA^2 = x^2 + h^2 \tag{1.3a}$$

$$OB^2 = h'^2 + (\ell - x)^2 \tag{1.3b}$$

On cherche à minimiser le temps par rapport à la grandeur x :

$$\delta\, T = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

ce qui donne la loi bien connue

$$\sin i_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin i_2 \tag{1.5}$$

Exemple 1.2 (Géodésique d'un plan euclidien)**.**

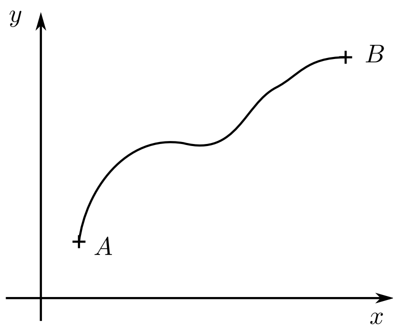

FIGURE 1.2 – Géodésique.

On considère deux points d'un espace plan euclidien (figure **??**). L'élement de distance s'écrit

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \tag{1.6}$$

et on obtient la longueur en intégrant :

$$\begin{aligned} \ell &= \int_A^B \mathrm{d}s \\ &= \int \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x \\ &= \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

en notant

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.7}$$

où t est un paramètre arbitraire.

On obtient le chemin le plus court en écrivant que la variation de cette intégrale est nulle :

$$\delta\, \ell = 0 \tag{1.8}$$

ℓ dépend du chemin suivi : il s'agit donc d'une fonctionnelle. Elle est de plus linéaire car elle apparait sous forme de somme.

On suppose que Γ minimise s qui est donné par

$$s_\Gamma = \int F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

et on considère une petite variation :

$$\tilde{s}_{\tilde{\Gamma}} = \int F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\mathrm{d}x \tag{1.10a}$$

$$\tilde{y} = y + h(x) \qquad h(x) \ll 1 \tag{1.10b}$$

En développant la fonction F :

$$\tilde{s}_{\tilde{\Gamma}} = \int F(x, y, y')\mathrm{d}x + \int \left(\frac{\partial F}{\partial y}\ h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\ h'(x) \right) \mathrm{d}x$$

et on peut ainsi écrire la variation de s :

$$\begin{aligned} \delta\, s &= \tilde{s}_{\tilde{\Gamma}} - s_\Gamma \\ &= \int \left(\frac{\partial F}{\partial y}\ h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\ h'(x) \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

et en intégrant par partie et en disant que le terme de bord est nul car $h(a) = h(b) = 0$:

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \mathrm{d}x\ \frac{\partial F}{\partial y}\ h + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\ h \right]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'}\ h \\ &= \int \mathrm{d}x\ h \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \qquad \forall h \end{aligned}$$

ce qui donne les équation d'Euler–Lagrange :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \tag{1.11}$$

Il faut prendre garde aux notations :
- $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$: dérivée totale ;
- $\partial/\partial t$: dérivée partielle ;
- $\mathrm{d}t$: variation sur un chemin ;
- $\delta\, t$: variation virtuelle.

Une autre manière d'obtenir les équations est de faire varier l'intégrale (**??**) :

$$\begin{aligned} \delta\, s &= \int \mathrm{d}x\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\ \delta\, y + \frac{\partial F}{\partial y'}\ \delta\, y' + \frac{\partial F}{\partial x}\ \delta\, x \right) \\ &= \int \mathrm{d}x\, \delta\, y\ \frac{\partial F}{\partial y} + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\ \delta\, y \right]_a^b - \int \mathrm{d}x\, \delta\, y\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \forall\, \delta\, y \end{aligned}$$

ce qui, en annulant le second terme comme $\delta\, y(a) = \delta\, y(b) = 0$, redonne les équations d'Euler–Lagrange (**??**).

Un changement des conditions initiales ne fait qu'ajouter une constante à s et modifier les constantes d'intégration, ce qui ne change pas la physique.

Exemple 1.3 (Géodésique d'un plan euclidien (suite)).

Reprenons l'exemple **??**. Nous avions trouvé que la fonction caractéristique était

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2} \tag{1.12}$$

On obtient donc, à partir des équations d'Euler–Lagrange (**??**) :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2y'^2}{2(1 + y'^2)} = k \tag{1.13}$$

soit

$$y' = a \tag{1.14}$$

ce qui donne après intégration :

$$y = ax + b \tag{1.15}$$

Étudions ce que cela donne avec un paramètre arbitraire :

$$F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{1.16}$$

On obtient deux équations à partir des équations d'Euler–Lagrange :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = k \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = k' \tag{1.17}$$

On a donc

$$\dot{x}^2 = \lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad \dot{y}^2 = \lambda'(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{1.18}$$

et en faisant le rapport :

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = C = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \tag{1.19}$$

soit finalement

$$y = ax + b \tag{1.20}$$

Exemple 1.4 (Géodésique d'un espace non-euclidien).

Considérons un espace muni de la métrique

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

ce qui donne comme élément de longueur :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.22}$$

soit une fonction caractéristique

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2 + y'} \tag{1.23}$$

1.1.2 Fonction énergie

On peut se demander s'il n'existe pas une autre équation. Pour ce faire, écrivons la différentielle de $F(x, y, y')$:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} \tag{1.24}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial F}{\partial x} - y'\frac{\partial F}{\partial y} &= y''\frac{\partial F}{\partial y'} \\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial F}{\partial x} - y'\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - y'\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)}_{=0} &= -\frac{\partial F}{\partial x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F\right) &= -\frac{\partial F}{\partial x}
\end{aligned}$$

et en définissant la fonction énergie [1] (ou première fonction de Hamilton)

$$\boxed{H = y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F} \tag{1.25}$$

on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F}{\partial x}} \tag{1.26}$$

Si on utilise le paramètre t, alors, si F est explicitement indépendant du temps, on a

$$H = cste \tag{1.27}$$

et nous trouvons ainsi un des invariants. Ainsi, implicitemet, dès que l'on choisit un lagrangien qui ne dépend pas du temps, on introduit une symétrie.

Exemple 1.5 (Fonction de Hamilton pour les géodésiques d'un espace plan euclidien)**.**

En reprenant toujours l'exemple **??**, on obtient

$$H = \frac{-1}{\sqrt{1 + y'^2}} = K \tag{1.28}$$

Une intégration donne le résultat

$$y = ax + b \tag{1.29}$$

Théorème 1.1. Pour un système à d degrés de libertés, il existe $2d$ constantes.

Toutefois ce théorème ne permet pas forcément d'obtenir d'informations :

- constantes triviales ;
- constantes qui ne sont pas interprétables physiquement (penser à la fonction de Hamilton pour la géodésique (**??**)).

1. Ce nom est justifié par une analyse dimensionnelle. Il est important de noter qu'il ne s'agit pas du hamiltonien car ce dernier dépend des moments conjugués et des coordonnées généralisées, et non des vitesses.

1.1.3 Lagrangien dépendant de dérivées quelconques des coordonnées

En mécanique, on note $L = L(t, x, \dot{x})$, appelé lagrangien, la fonction qui apparait dans la fonctionnelle. Ce n'est pas toujours une position ni une vitesse qui apparaissent dans L, bien que l'on garde ces termes (exemple : choix de coordonnées de différents). On notera plutôt $L = L(t, q, \dot{q})$. On appelle :

- q les coordonnées généralisées ;
- $\dot{q}$ les vitesses généralisées.

Il faudra prendre garde au fait que q et $\dot{q}$ sont indépendants.

Exemple 1.6.
Si on choisit comme coordonnée $q = \theta$, alors la vitesse $\dot{q} = \dot{\theta}$. Cette "vitesse" a pour dimension T^{-1} et non LT^{-1}.

Si le système est décrit par N coordonnées généralisées, alors on a N équations d'Euler–Lagrange couplées.

Il peut être utile d'ajouter à L une dépendance dans l'accélération généralisée : $L = L(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$. Cherchons les équations d'Euler–Lagrange dans ce cas, en se restreignant à un lagrangien pour lequel $\partial_t L = 0$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \mathrm{d}t \, \left(\frac{\partial L}{\partial q} \, \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \, \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \, \delta \ddot{q} \right) \\ &= \int \mathrm{d}t \, \delta q \, \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0 \qquad \forall \, \delta q \end{aligned}$$

où on a intégré deux fois par partie le troisième terme et en tenant compte des conditions :

$$\delta q(a) = \delta q(b) = 0 \qquad \delta \dot{q}(a) = \delta \dot{q}(b) = 0 \tag{1.30}$$

soit finalement

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{1.31}$$

Si le lagrangien dépend des n dérivées des N coordonnées q_i $(q_i, \dot{q}_i, \ldots, q_i^{(n)})$, on obtiendra :

$$\boxed{\sum_n (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(n)}} = 0} \tag{1.32}$$

Supposons que le lagrangien ait été écrit dans un système cartésien :

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2, x_3) \tag{1.33}$$

et que l'on souhaite l'exprimer dans un système de coordonnées généralisées. On note

$$x_i = f_i(q_j) \tag{1.34}$$

Les dérivées s'écrivent (avec la convention de sommation) :

$$\dot{x}_i = \dot{q}_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \tag{1.35}$$

dont le carré vaut

$$\dot{x}_k^2 = \dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \qquad \text{pas de sommation sur } k \tag{1.36}$$

et le lagrangien devient

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \frac{\partial f_k}{\partial q_j} - U(q_k) \tag{1.37}$$

et en introduisant la métrique

$$g(q_i, q_j) = \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \tag{1.38}$$

on peut récrire le lagrangien

$$L = \frac{1}{2} g(q_i, q_j) \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{1.39}$$

Dérivons par rapport à $\dot{q}_k$ (pas de sommation) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{j \neq k} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \frac{1}{2} a_{kk} \dot{q}_k \dot{q}_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (a_{kj} \dot{q}_j + a_{jk} \dot{q}_j) + a_{kk} \dot{q}_k = \sum_i a_{ik} \dot{q}_i \end{aligned}$$

et dérivons par rapport au temps

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_i a_{ik} \ddot{q}_i + \sum_i \dot{a}_{ik} \dot{q}_i \\ &= \sum_i a_{ik} \ddot{q}_i + \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ik}}{\partial a_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned}$$

car

$$\dot{a}_{ik} = \sum_{\ell} \dot{q}_{\ell} \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_{\ell}} \tag{1.40}$$

Finalement, on a

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

En rassemblant tous les termes, les équations d'Euler–Lagrange deviennent

$$\sum_i a_{ik} \ddot{q}_i + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial a_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \tag{1.41}$$

Le terme entre parenthèses est un tenseur d'ordre 3 :

$$\Gamma_{ik}{}^{j} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial a_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \tag{1.42}$$

On définit le moment généralisé par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.43}$$

Il ne s'agit pas forcément d'une quantité de mouvement (par exemple pour $q = \theta$, p correspond au moment cinétique).

En utilisant cette définition, l'équation du hamiltonien devient

$$H = \sum_i p_i q_i - L \tag{1.44}$$

L'énergie est une quantité extensive :

$$E = \sum_i E_i \tag{1.45}$$

On fait l'hypothèse que L s'écrit sous la forme

$$L = T - U \tag{1.46}$$

où T est l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle. On suppose que $T = T(\dot{q})$ et $U = U(q,t)$ et que T est homogène de degré 2.

Théorème 1.2 (Euler)**.** Si f est une fonction homogène de degré k, c'est à dire

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_k) \tag{1.47}$$

On a alors :

$$\sum_i x_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i} = k \; f(x_i) \tag{1.48}$$

Le hamiltonien peut s'écrire

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \dot{q}_i \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \\ &= \sum_i \dot{q}_i \, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - (T - U) \\ &= 2T - T + U \\ &= T + U \end{aligned}$$

Ce choix de lagrangien est donc compatible avec l'extensivité de l'énergie.

1.2 Théorème du Viriel

Prenons une fonction G telle que

$$G = \sum_i p_i q_i \tag{1.49}$$

Sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} &= \sum_i (\dot{p}_i q_i + p_i \dot{q}_i) \\ &= 2T + \sum_i \dot{p}_i q_i \\ &= 2T + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{q}\end{aligned}$$

en utilisant le principe de d'Alembert

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = F_i \tag{1.50}$$

où F_i a les dimensions d'une force. Si G est bornée, sa moyenne sur un intervalle T est nulle et alors

$$\frac{G(\tau)-G(0)}{\tau} = 0 = 2\langle T\rangle + \langle \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{q}\rangle$$

On trouve donc

$$\boxed{\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{q}\rangle} \tag{1.51}$$

Pour un potentiel central tel que

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \tag{1.52}$$

et finalement

$$\boxed{\langle T\rangle = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{q}\cdot\nabla U\rangle} \tag{1.53}$$

Pour un potentiel harmonique $U \sim q^2$, on trouve

$$\langle T\rangle = \langle U\rangle \tag{1.54}$$

1.3 Principe de d'Alembert, travaux virtuels et expression du lagrangien classique

Montrons maintenant que

$$L = T - U \tag{1.55}$$

Dans le principe de d'Alembert, p_i est la quantité de mouvement.
On a

$$\sum_i (\dot{p}_i - F_i)\,\delta r_i = 0 \tag{1.56}$$

Les r_i sont des fonctions des q_j : $r_i = r_i(q_j)$. δr_i s'écrit comme

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\,\delta q_j \tag{1.57}$$

d'où

$$\begin{aligned}\dot{p}_i\,\delta\,r_i &= \sum_j m_i\ddot{r}_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\\ &= \sum_j\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{r}_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)-m_i\dot{r}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right]\end{aligned}$$

On a de plus

$$v_i = \dot{q}_i = \frac{\partial r_i}{\partial t}+\sum_k \dot{q}_k\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \tag{1.58}$$

et donc

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \tag{1.59}$$

car

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial^2 r_i}{\partial t\partial q_j}+\sum_k \dot{q}_k\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k\partial q_j}\\ &= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}+\sum_k\dot{q}_k\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial v_i}{\partial q_j}\end{aligned}$$

En reprenant la relation du début, on peut remplacer :

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\ddot{r}_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\;\;\delta\,q_j &= \sum_i\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_iv_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)-m_iv_i\frac{\partial v_i}{\partial q_j}\right]\\ &= \sum_i\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_iv_i\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\end{aligned}$$

d'où au final

$$\sum_i \dot{p}_i\,\delta\,r_i = \sum_j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta\,q_j \tag{1.60}$$

Faisons de même avec la partie en F_i, en faisant l'hypothèse qu'il s'agit d'une force centrale $F_i = -\nabla_i\,U$:

$$\begin{aligned}\sum_i F_i\,\delta\,r_i &= \sum_{i,j}-\frac{\partial U}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\,\delta\,q_j\\ &= -\sum_j\frac{\partial U}{\partial q_j}\,\delta\,q_j\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_i(\dot{p}_i-F_i)\,\delta\,r_i = 0$$

$$\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)\delta\,q_j = 0 \tag{1.61}$$

$$\sum_j\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right) = 0 \tag{1.62}$$

en introduisant la notation

$$L = T - U \tag{1.63}$$

On généralise donc cette notation.

1.4 Invariances et symétries

1.4.1 Invariance de jauge

En faisant la transformation

$$L \longrightarrow L' = L + K \qquad K = cste \tag{1.64}$$

on obtient les mêmes équations que pour L. De fait, en partant des équations du mouvement, on ne peut pas savoir quel était lagrangien de départ (L ou L'). On a donc une symétrie de forme.

Cette transformation peut se généraliser à l'ajout d'une dérivée totale :

$$L \longrightarrow L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(q, t) \tag{1.65}$$

La dérivée de χ s'exprime comme

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\chi}{\partial t} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial\chi}{\partial q_j} \tag{1.66}$$

et alors

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial^2\chi}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2\chi}{\partial q_i \partial q_j} \tag{1.67}$$

De même on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial\chi}{\partial q_i} \tag{1.68}$$

et aussi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial^2\chi}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2\chi}{\partial q_i \partial q_j} \tag{1.69}$$

Les deux termes sont identiques et s'annulent dans les équations.

Le nouveau moment conjugué est

$$p' = p + \frac{\partial\chi}{\partial q} \tag{1.70}$$

et donc on peut écrire

$$\delta\, p = \frac{\partial\chi}{\partial q} \tag{1.71}$$

Le moment conjugué est donc une mauvaise quantité physique car elle dépend de la jauge.

Comme on ne peut pas changer l'énergie cinétique, l'invariance de jauge peut être vue comme un point de vue d'observateur, c'est à dire un changement des origines de l'énergie potentielle. En effet, dans le cas constant, on a $U' = U - K$. L'invariance de jauge consiste donc à dire que la physique ne dépend pas du point de vue de l'observation.

Exemple 1.7 (Particule libre)**.**
On considère un lagrangien du type

$$L = \frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 \tag{1.72}$$

Les transformations de Galilée sont :

$$x' = x - Vt \qquad t' = t \tag{1.73}$$

On a

$$\delta\, x = -Vt \qquad \delta\, \dot{x} = -V \tag{1.74}$$

et alors

$$\delta\, L = m\dot{x}\,\delta\, \dot{x} = -m = V\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.75}$$

et dans ce cas

$$\chi = -mVx \tag{1.76}$$

On obtient dans les deux cas la même équation du mouvement

$$m\ddot{x} = 0 \tag{1.77}$$

On obtient les moments :

$$p = m\dot{x} \qquad p' = m(\dot{x} - V) \tag{1.78}$$

1.4.2 Lois d'invariance classiques

Postulat 1.1. Le temps est uniforme.

Il s'agit donc d'une symétrie. Regardons la variation du lagrangien :

$$\delta\, L = \frac{\partial L}{\partial t}\ \delta\, t + \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta\, q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\, \dot{q} \tag{1.79}$$

Si le temps est uniforme, alors

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad \forall t \tag{1.80}$$

Or puisque

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.81}$$

on obtient que

$$H = cste \tag{1.82}$$

Postulat 1.2. L'espace est homogène.

On considère le cas où $\delta\, t = 0$. Alors le lagrangien ne peut pas dépendre des coordonnées d'où

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{1.83}$$

ce qui entraine, par les équations d'Euler–Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow p = cste \tag{1.84}$$

Postulat 1.3. L'espace est isotrope.

On prend encore $\delta\, t = 0$. On envisage une rotation infinitésimale :

$$\delta\, \boldsymbol{q} = \delta\, \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r} \tag{1.85}$$

et dans ce cas $\delta\, \dot{\boldsymbol{q}} = \delta\, \boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{r}}$. Alors

$$\begin{aligned}
\delta\, L &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, \delta\, q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \delta\, \dot{q}_i \right) \\
&= \dot{\boldsymbol{p}} \cdot (\delta\, \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{p} \cdot (\delta\, \boldsymbol{\phi} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \\
&= \delta\, \boldsymbol{\phi}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \\
&= \delta\, \phi\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i J_i = 0
\end{aligned}$$

où on a noté

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{1.86}$$

que l'on appelle moment angulaire. On a donc

$$J_i = cste \tag{1.87}$$

1.5 Contraintes

On cherche à ajouter l'expression de contraintes dans l'écriture du lagrangien et des équations d'Euler–Lagrange.

Exemple 1.8 (Ensemble microcanonique)**.**
On considère un système comportant N microétats. L'entropie s'exprime comme

$$S = -\sum_i P_i \ln P_i \tag{1.88}$$

où les P_i sont les probabilités associées à chaque état. On a évidemment

$$\sum P_i = 1 \tag{1.89}$$

Pour obtenir la distribution de probabilités, on fait l'hypothèse que chaque microétat est équiprobable.

Cette hypothèse peut sembler très forte, et on peut se demander si l'on ne pourrait pas s'en affranchir et utiliser un principe de minimisation. On forme la quantité

$$S' = -\sum_i P_i \ln P_i - \lambda \left(\sum_i P_i - 1 \right) \tag{1.90}$$

Dans ce cas, on doit avoir

$$\frac{\partial S'}{\partial P_k} = \ln P_k + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \forall k \quad P_k = cste \tag{1.91}$$

et

$$\frac{\partial S'}{\partial \lambda} = \sum P_i - 1 = 0 \Longrightarrow P_k = \frac{1}{N} \tag{1.92}$$

On considère une fonction $f(x,y)$ telle que $y = g_0(x)$. On introduit un paramètre λ de manière à former la fonction

$$h(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) \tag{1.93}$$

où on a noté $g(x,y) = g_0(x) - y$. On doit alors avoir les équations

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0 \tag{1.94}$$

On peut étendre cette idée au cas où l'on a plusieurs coordonnées q_i et contraintes $g_j(q_i)$ et la fonction $f(q_i)$:

$$h = f(q_i) + \sum_j \lambda_j g_j(q_i) \tag{1.95}$$

et alors

$$\frac{\partial h}{\partial q_i} = \frac{\partial h}{\partial \lambda_j} = 0 \qquad \forall i, j \tag{1.96}$$

Exemple 1.9.
On considère une particule soumise à la contrainte

$$ax + b = y \tag{1.97}$$

et à la force

$$\boldsymbol{F} = m\omega^2 x\,\hat{\mathbf{x}} \tag{1.98}$$

On a donc le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda(y - ax - b) \tag{1.99}$$

ce qui nous donne les équations

$$\begin{cases} y = ax + b \\ m\ddot{x} + m\omega^2 x + \lambda a = 0 \\ m\ddot{y} - \lambda = 0 \end{cases} \tag{1.100}$$

On obtient les deux équations

$$\ddot{y} = a\ddot{x} \qquad m\ddot{y} = \lambda \tag{1.101}$$

ce qui montre que λ est une force. On a aussi

$$\ddot{x} + \omega^2 x + a^2\ddot{x} = 0$$

soit

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0 \tag{1.102}$$

où on a noté

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{1 + a^2} \tag{1.103}$$

Il s'agit d'un oscillateur harmonique dans le plan, contraint à se déplacer sur une droite.

On obtient les solutions

$$\begin{cases} x = A\cos(\Omega t + \phi) \\ y = aA\Omega\sin(\Omega t + \phi) \\ \lambda = ma\Omega^2 A\cos(\Omega t + \phi) \end{cases} \tag{1.104}$$

Cherchons maintenant à exprimer des contraintes générales, qui peuvent dépendre des coordonnées, des vitesses et du temps. Soit

$$G = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, g(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{1.105}$$

et les conditions $\delta G = 0$ et $\delta S = 0$ donnent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \tag{1.106}$$

Exemple 1.10 (Circuit électrique)**.**
Dans un circuit électrique, on minimise toujours la perte par effet Joule.

1.6 Effets dissipatifs

On cherche à introduire un effet dissipatif proportionnel à $\dot{q}$. On a l'équation

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i)\, \delta\, r_i = 0 \tag{1.107}$$

où on a

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_{nc} \tag{1.108}$$

ce qui donne
On suppose que

$$F_i \propto -v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.109}$$

où ϕ est le potentiel dissipatif, donc $\boldsymbol{F}_{nc} = -\nabla_{\dot{q}}\, \phi$. On a donc

$$\sum_i F_i\, \delta\, r_i = -\sum_{i,j} \frac{\phi}{v_i}\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}\, \delta\, q_j = -\sum_j \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_j}\, \delta\, q_j \tag{1.110}$$

ce qui donne l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.111}$$

Exemple 1.11 (Oscillateur harmonique amorti)**.**
On a

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad \phi = \frac{1}{2}\alpha m \dot{x}^2 \tag{1.112}$$

On obtient l'équation

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1.113}$$

Cherchons la variation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
&= \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}} \right) + \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial t} - \dot{q}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}} \tag{1.114}$$

1.7 Théorème de Noether

Théorème 1.3 (de Noether)**.** À toute invariance (symétrie) est associée une quantité conservée.

On considère la transformation

$$\begin{cases} q_i' = q_i + \delta\, q_i(q_j, t) \\ t' = t + \delta\, t \end{cases} \tag{1.115}$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q + \delta\, q) = \frac{1}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t}\left(\dot{q} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta\, q\right) \\ &= \frac{1}{1 + \mathrm{d}(\delta\, t)/\mathrm{d}t}\left(\dot{q} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta\, q\right) \\ &\approx \left(1 - \frac{\mathrm{d}(\delta\, t)}{\mathrm{d}t}\right)\left(\dot{q} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta\, q\right) \\ &= \dot{q} + \frac{\mathrm{d}(\delta\, q)}{\mathrm{d}t} - \dot{q}\frac{\mathrm{d}(\delta\, t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

L'action doit rester invariante sous ce changement de variable :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t = \int_{t_1'(t_1)}^{t_2'(t_2)} L'(q', \dot{q}', t')\mathrm{d}t' \tag{1.116}$$

soit

$$L'(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q', t') \tag{1.117}$$

qui donne

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}, t) &= L(q', \dot{q}', t')\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q', t) \\ &= L(q', \dot{q}', t')\left(1 + \frac{\mathrm{d}(\delta\, t)}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q', t) \\ -\,\delta\, L = L(q, \dot{q}, t) - L(q', \dot{q}', t') &= L(q', \dot{q}', t')\frac{\mathrm{d}(\delta\, t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q', t) \\ &= L(q, \dot{q}, t)\frac{\mathrm{d}(\delta\, t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\delta\, \Omega)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

donc la condition d'invariance est

$$\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta\, q_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta\, t + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\frac{\mathrm{d}(\delta\, t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\delta\, \Omega)}{\mathrm{d}t} \tag{1.118}$$

car

$$\delta\, L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta\, q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta\, \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta\, t \tag{1.119}$$

Après quelques calculs, la grandeur conservée est

$$K = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta\, q_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta\, t + \delta\, \Omega = cste \tag{1.120}$$

Exemple 1.12 (Translation temporelle)**.**
On a $\delta\, q = \delta\, \dot{q} = 0$ et $\delta\, t = cste$, donc

$$\frac{\partial L}{\partial t}\,\delta\, t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta\,\Omega = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} = 0$$

et on peut déduire $\delta\,\Omega(t)$ après intégration de

$$\frac{\partial L}{\partial t}\,\delta\, t = -\frac{\mathrm{d}(\delta\,\Omega)}{\mathrm{d}t} \tag{1.121}$$

et comme

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta\, t + \delta\,\Omega = cste$$
$$-H\,\delta\, t + \delta\,\Omega = cste$$

soit au final

$$H - \delta\,\Omega = cste \tag{1.122}$$

ou encore

$$H + \int \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t = cste$$

ce qui implique $\Omega = cste \Rightarrow H = cste$ et plus généralement $\delta\,\Omega = cste \Rightarrow H = cste$

Exemple 1.13 (Translation dans l'espace)**.**
On a $\delta\, t = \delta\, \dot{q} = 0$ et $\delta\, q = cste$, donc

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta\, q_i = -\frac{\mathrm{d}(\delta\,\Omega)}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta\, q_i = -\frac{\mathrm{d}(\delta\,\Omega)}{\mathrm{d}t}$$
$$-\left(\frac{\partial(\delta\,\Omega)}{\partial t} + \dot{q}_i\frac{\partial(\delta\,\Omega)}{\partial q_i}\right)$$

d'où

$$\frac{\partial(\delta\,\Omega)}{\partial q_i} = 0 \tag{1.123}$$

et on peut déduire $\delta\,\Omega(t)$.
Pour $L = T(\dot{q}) - U(q)$, avec $p_i = \partial T/\partial q_i$, on a

$$\sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\,\delta\, q_i = \frac{\mathrm{d}(\delta\,\Omega)}{\mathrm{d}t} \tag{1.124}$$

donc

$$\delta\,\Omega(t) = \left(\sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i}\,\delta\, q_i\right) t \tag{1.125}$$

et comme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta\,\dot{q}_i + \delta\,\Omega = cste$$

on trouve

$$P + \frac{\partial U}{\partial q} t = cste \tag{1.126}$$

soit encore

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{f}\,t = cste \tag{1.127}$$

Exemple 1.14 (Rotation)**.**
Dans ce cas $\delta\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{q}$ et $\delta\,\dot{\boldsymbol{q}} = \delta\,\phi \times \dot{\boldsymbol{q}}$, on trouve

$$-\,\phi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q})_i = -\frac{\mathrm{d}(\delta\,\Omega)}{\mathrm{d}t} \tag{1.128}$$

donc

$$\delta\,\Omega = \phi_0 \sum_i L_i \tag{1.129}$$

avec $(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q})_i = -L_i$. $\delta\,\Omega = 0$ donne $\boldsymbol{L} = cste$.

Exemple 1.15 (Transformation de Galilée)**.**
On considère le groupe restreint (à une dimension) : $\delta\,t = 0$, $\delta\,q = vt$ et $\delta\,\dot{q} = v$.
On a

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) vt = -\frac{\mathrm{d}(\delta\,\Omega)}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\partial(\delta\,\Omega)}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial(\delta\,\Omega)}{\partial q}\right)$$

On prend $L = T - U$ avec $T = m/2\dot{q}^2$ d'où, après identification :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\delta\,\Omega)}{\partial q} = mv \Longrightarrow \delta\,\Omega = mvq + f(t) \\ \dfrac{\partial U}{\partial q} vt = \dfrac{\partial(\delta\,\Omega)}{\partial t} \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

si $\partial U/\partial q = cste$, alors

$$f(t) = \frac{1}{2} v \frac{\partial U}{\partial q} t^2 + cste \tag{1.130}$$

On a aussi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\,q + \delta\,\Omega = cste \tag{1.131}$$

soit

$$pt + mq + \alpha t^2 = cste \qquad \alpha \sim F \tag{1.132}$$

Exemple 1.16 (Invariance d'échelle)**.**
On a $q' = \alpha(t)q$ donc $\delta\,q = (1 + \alpha(t))q$ et $\delta\,\dot{q} = (1 + \alpha)\dot{q} + \dot{\alpha}q$. Il faut étudier les cas $\dot{\alpha} = cste$ et $\dot{\alpha} \neq cste$.

Chapitre 2

Milieux continus

Les variables discrètes q et $\dot{q}$ sont remplacées par le champ $\psi(q,t)$ et leurs dérivées $\dot{\psi}$ et ψ', où on a noté

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \psi' = \nabla \psi \tag{2.1}$$

En effet, dans un milieu continu la trajectoire n'a plus de sens, on parle plutôt de la propagation d'une onde. L'action s'écrit

$$S = \int_a^b L \mathrm{d}t \qquad [L] = E \tag{2.2}$$

Mais dans ce contexte, on a

$$L = \int_a^b \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \psi') \mathrm{d}^3 r \qquad [L] = EL^{-3} \tag{2.3}$$

d'où

$$S = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3 r \; \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \psi') \mathrm{d}^3 r \tag{2.4}$$

Cherchons la variation de l'action :

$$\delta\, S = \int \mathrm{d}^4 x \, \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} \,\delta\, \psi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \,\delta\, \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \psi'} \,\delta\, \psi' \right)$$

et on note que l'on a

$$\delta\, \dot{\psi} = \frac{\partial}{\partial t} \,\delta\, \psi \qquad \delta\, \psi' = \nabla\, \delta\, \psi \tag{2.5}$$

et alors

$$\int_a^b \mathrm{d}t \, \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \,\delta\, \psi = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \,\delta\, \psi \bigg|_a^b}_{=0} - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) \delta\, \psi \mathrm{d}t$$

$$\int_a^b \mathrm{d}^3 r \, \frac{\partial L}{\partial \psi'} \,\nabla\, \delta\, \psi = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \psi'} \,\delta\, \psi \bigg|_a^b}_{=0} - \int_a^b \nabla \left(\frac{\partial L}{\partial \psi'} \right) \delta\, \psi \mathrm{d}t$$

ce qui permet d'obtenir

$$\delta\, S = \int \mathrm{d}^4 x \, \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \nabla\, \frac{\partial L}{\partial \psi'} \right) \delta\, \psi = 0 \tag{2.6}$$

soit au final

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\frac{\partial L}{\partial(\partial_i \psi)} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \tag{2.7}$$

Exemple 2.1 (Lagrangien d'une particule libre dans un plan baignant dans E_3 (complexe))**.**

On a

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{z}\dot{z}^* = \frac{m}{2} m \left|\dot{z}\right|^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^*$$

Cherchons dans l'ordre :

1. l'équation du mouvement ;
2. le hamiltonien ;
3. la jauge globale $\mathrm{e}^{i\theta}$ et la quantité conservée ;
4. la jauge locale $\mathrm{e}^{i\theta(t)}$ et la quantité conservée.

Les équations du mouvement sont

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \ddot{z}^* = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*} - \frac{\partial L}{\partial z^*} = 0 \Longrightarrow \ddot{z} = 0$$

et on revient à x et y :

$$\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{z}^* \qquad \ddot{y} = \ddot{z} - \ddot{z}^* \tag{2.8}$$

Les moments conjugués sont :

$$p_z = \frac{m}{2}\dot{z}^* \qquad p_{z^*} = \frac{m}{2}\dot{z} = p_z^* \tag{2.9}$$

et alors

$$H = p_z \dot{z} + p_{z^*}\dot{z}^* - L$$

d'où

$$H = \frac{\left|p_z\right|^2}{2m} \tag{2.10}$$

On considère la transformation $z \to z' = z\,\mathrm{e}^{i\theta}$, d'où $\delta\, z = z(\mathrm{e}^{i\theta} - 1) \approx i\theta z$ et $\delta\, \dot{z} = i\theta\dot{z}$. Dans ce cas

$$\delta\, L = \frac{m}{2}(\dot{z}\,\delta\,\dot{z}^* + \dot{z}^*\,\delta\,\dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{z}(-i\theta\dot{z}^*) + \dot{z}^* i\theta\dot{z}) = 0$$

La quantité conservée vaut

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\,\delta\, z + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*}\,\delta\, z^* = \frac{m}{2}(\dot{z}^* z - \dot{z} z^*) i\theta = cste = L_3$$

On considère maintenant la transformation locale $z \to z' = z\,\mathrm{e}^{i\theta(t)}$, d'où $\delta\, z = z(\,\mathrm{e}^{i\theta(t)} - 1) \approx i\theta(t)z$ et $\delta\, \dot{z} = i\theta\dot{z} + i\dot{\theta}z$, et alors

$$\delta\, L = \frac{m}{2}\Big(\dot{z}(-i\theta\dot{z}^* - i\dot{\theta}z^*) + \dot{z}^*(i\theta\dot{z} + i\dot{\theta}z)\Big) = \frac{im\theta}{2}(\dot{z}^* z - z^*\dot{z}) \neq 0$$

Comment modifier le lagragien afin de le rendre invariant de jauge locale ?

On définit un champ w pour remplacer z, tel que

$$w = \dot{z} + iAz \tag{2.11}$$

et alors

$$\begin{aligned} \delta\, w &= \delta\, \dot{z} + iz\,\delta\, A + iA\,\delta\, z \\ &= i\dot{\theta}z + i\theta\dot{z} + \delta\, \dot{z} + iz\,\delta\, A + iA\,\delta\, z \end{aligned}$$

et on rappelle que $\delta\, z = i\theta z$.

On a $L = m/2\boldsymbol{v}^2$, et $\delta\, q = \boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{q}$, et $\delta\, L = 0$, ainsi que $L' = m/2\boldsymbol{w}^2$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{q}$, ce qui permet de déduire $\delta\, \boldsymbol{A}$.

On trouve que $\delta\, A = -\dot{\theta} = \delta\, A^*$. La quantité conservée est

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\,\delta\, z + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*}\,\delta\, z^* = \frac{im\theta}{2}(\dot{z}^* z - \dot{z}z^*) + A\theta\,|z|^2 \tag{2.12}$$

Le deuxième terme est un couplage champ–champ, et $|z|^2$ se comporte comme une masse pour A.

On obtient

$$L = \frac{m}{2}\,|\dot{z} + iAz|^2 \tag{2.13}$$

Exemple 2.2.

On considère le lagrangien :

$$L = \alpha\psi'\psi'^* - i\beta(\dot{\psi}\psi^* - \dot{\psi}^*\psi) \tag{2.14}$$

Cherchons dans l'ordre :

1. l'équation du mouvement ;
2. le hamiltonien ;
3. la jauge globale $\mathrm{e}^{ig\theta}$ et la quantité conservée ;
4. la jauge locale $\mathrm{e}^{ig\theta(r,t)}$ et la quantité conservée ;
5. si L est invariant par translation dans le temps.

On obtient les équations :

$$\begin{cases} \alpha\psi''^* - 2i\beta\dot{\psi}^* = 0 \\ \alpha\psi'' + 2i\beta\dot{\psi} = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Il s'agit de l'équation de Schrödinger, qui est une équation de diffusion (le vide est dispersif).

Les moments conjugués sont :

$$p_{\dot{\psi}} = -i\beta\psi^* = p^*_{\dot{\psi}} \qquad p_{\psi'} = \alpha\psi'^* = p^*_{\dot{\psi}} \tag{2.16}$$

et alors
$$H = \alpha \left|\psi'\right|^2 \tag{2.17}$$
Remarque : on doit avoir $L = L^*$, donc $\alpha = \alpha^*$ et $\beta = \beta^*$. On a $[L] = EL^{-1}$, et $\mathrm{d}p(x) = \left|\psi\right|^2 \mathrm{d}x$ d'où $[\psi] = L^{-1/2}$, d'où $[\alpha] = SM^{-1}$ et $[\beta] = S$ (S : action), donc
$$\alpha = \frac{\hbar^2}{2m} \qquad \beta = \frac{\hbar}{2} \tag{2.18}$$
Les facteurs 2 proviennent de la définition des constantes.

On définit $\psi(x,t) = \phi(x)\chi(t)$, d'où
$$\alpha \frac{\phi''}{\phi} = i\beta \frac{\dot{\chi}}{\chi} = cste = E \tag{2.19}$$
soit
$$\chi \sim \mathrm{e}^{-iEt} \qquad \phi \sim \mathrm{e}^{ikx} \tag{2.20}$$
et $\hbar^2 = 2mE$ et $\alpha = -1/2m$. On a donc
$$H = E\left|\psi\right|^2 = \varepsilon^2 \alpha \left|\psi'\right|^2 = \frac{\left|p'\right|^2}{\alpha}$$
H est une densité de hamiltonien.

Le champ se transforme comme $\psi \to \psi\, \mathrm{e}^{ig\theta}$, soit $\delta\, \psi = ig\theta\psi$ et on trouv $\delta\, L = 0$. On a donc
$$J = cste(\psi'\psi^* - \psi'^*\psi) \tag{2.21}$$
Pour une variation locale, on trouve $\delta\, \dot{\psi} = ig\theta\dot{\psi} + ig\dot{\theta}\psi$ et $\delta\, \psi' = ig\theta\psi' + ig\theta'\psi$, soit
$$\delta\, L = g\beta\dot{\alpha}\left|\psi\right|^2 + J_i \neq 0 \tag{2.22}$$
Rendons le lagrangien invariant :
$$w = \dot{z} + iAz = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + iA\right) zDz$$
où D est l'opérateur de dérivation covariante (qui rend le lagrangien invariant).

Ici on a $D' = \nabla - igA$ qui remplace ∇ et $\dot{D} = \partial_t + igV$ remplace ∂_t, où $A = A(r,t)$ et $V = V(r,t)$. On a $D'\psi = \psi' - igA\psi$ et alors
$$\begin{aligned}
\delta(D'\psi) &= \delta\, \psi' - ig\psi\, \delta\, A - igA\, \delta\, \psi \\
&= ig\theta\psi' + ig\theta'\psi - ig\psi\, \delta\, A - igA(ig\theta\psi) \\
&= ig\theta D'\psi = ig\theta(\psi' - igA\psi)
\end{aligned}$$
On a donc $\delta\, A = -\theta'$ et $\delta\, v = -\dot{\theta}$. On définit le lagrangien
$$L = \alpha D'\psi D'\psi^* - i\beta\Big((\dot{D}\psi)\psi^* - (\dot{D}\psi^*)\psi\Big) \tag{2.23}$$
et dans ce cas $\delta\, L = 0$. L'équation du mouvement devient
$$2(\nabla - ig\boldsymbol{A})^2\psi = i\beta\left(\frac{\partial}{\partial t} + igv\right)\psi \tag{2.24}$$

Il ne s'agit plus d'une équation pour une particule libre. Il y a un couplage de ψ avec $\boldsymbol{A}$ et V.

On a $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \theta$, et on définit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ qui est invariant de jauge. On rajoute un terme au lagrangien pour établir la dynamique du champ A_μ. Il faut rajouter une partie cinétique invariante de jauge (proportionnelle à $F_{\mu\nu}$) car le champ A_μ est massif.

Remarque : ψcorrespond à une particule chargée sans spin. Il n'y a pas de choix pour $\boldsymbol{A}$ et V qui sont les potentiels vecteur et scalaire, donc le photon.

Un lagrangien qui respecte la symétrie imposée est :

$$L = \alpha \psi'^* \psi' - i\beta(\dot{\psi}\pi^* - \dot{\psi}^* \psi) + F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu} \tag{2.25}$$

On peut aussi ajouter des termes traduisant de faibles brisures de symétrie.

On a $\psi(t) = \mathrm{e}^{-iHt}\psi(0)$ s'il est indépendant par translation dans le temps, et $\psi(t') = \mathrm{e}^{-iH(t'-t)}\psi(t)$ et on pose $\tau = t' - t$.

On a les relations : $\psi \to \mathrm{e}^{-iH\tau}\psi$, et on considère une translation infinitésimale de paramètre τ, et $\delta\,\psi = -iH\tau\psi = -iE\tau\psi$, d'où $\delta\,\psi' = -iE\tau\psi'$ et $\delta\,\dot{\psi} = -iE\tau\dot{\psi}$. Dans ce cas $\delta\,L = 0$ comme précédemment. On définit l'opérateur de translation $U = \mathrm{e}^{-ig\tau H}$ qui est tel que $U^\dagger U = 1$. Maintenant on va utiliser des générateurs de transformation (ici H). On a $U \in U(1)$.

Chapitre 3

Formalisme hamiltonien

On a défini le moment conjugué comme

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{3.1}$$

et alors, en utilisant les équations d'Euler–Lagrange :

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{3.2}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= \frac{\partial L}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\mathrm{d}\dot{q} = p\mathrm{d}\dot{q} + \dot{p}\mathrm{d}q \\ \mathrm{d}(p\dot{q} - L) &= \dot{p}\mathrm{d}q - \dot{q}\mathrm{d}p = \mathrm{d}H \end{aligned}$$

avec $H = H(p, q)$:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L \tag{3.3}$$

Définition 3.1 (Transformation de Legendre)**.** Soit une fonction $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ et on définit

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{3.4}$$

Si les y_i sont indépendants, c'est à dire si

$$\det\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \neq 0 \tag{3.5}$$

On définit une nouvelle fonction g :

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}x_i - f \tag{3.6}$$

Exemple 3.1 (Thermodynamique)**.**

La différentielle de l'énergie vaut

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V \tag{3.7}$$

avec $U = U(S, V)$. On peut passer à l'enthalpie $H = H(S, p)$ par une transformation de Legendre :

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \qquad \frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} \tag{3.8}$$

On montre que

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.9}$$

On a ici perdu la symétrie temporelle qui était présente dans L. On obtient une dérivée totale (somme de dérivées partielles) dans le cas de H contre une seule dérivée partielle pour L. t peut être traité comme une simple coordonnée dans le cas de L, c'est pourquoi il est utilisé en relativité.

La différentielle de H est :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}}\mathrm{d}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \dot{q}\mathrm{d}p - \dot{p}\mathrm{d}q - \frac{\partial L}{\partial y}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et on obtient alors les équations de Hamilton :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.10}$$

H répond-il au principe de moindre action, c'est à dire, est-ce que si $S = \int p\mathrm{d}q$, alors $\delta S = \int \delta H = 0$? On a

$$\delta S = \int_a^b (\delta p\mathrm{d}q + p\,\delta q) = \underbrace{p\,\delta q\Big|_a^b}_{=0} + \int (\delta p\mathrm{d}q - \delta q\mathrm{d}p)$$

comme $\delta q_a = \delta q_b = 0$, alors comme

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}p = -\frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}t$$

et donc

$$\delta S = \int \mathrm{d}t \left(\delta p \frac{\partial H}{\partial p} + \delta q \frac{\partial H}{\partial q}\right)$$

c'est à dire

$$\int \mathrm{d}t\,\delta H = 0 \tag{3.11}$$

H répond donc au principe de moindre action, comme L.

Il est important de noter que H ne correspond pas forcément à l'énergie.

Définition 3.2 (Crochet de Poisson)**.** Soit $f = f(q, p)$ et $g = g(q, p)$ deux fonctions, alors on définit leur crochet de Poisson par

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) \tag{3.12}$$

Les équations de Hamilton se récrivent donc

$$\dot{q} = \{q, H\} \qquad \dot{p} = \{p, H\} \tag{3.13}$$

Proposition 3.1. Les crochets de Poisson répondent aux propriétés :

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{3.14a}$$
$$\{\lambda f, g\} = \lambda \{f, g\} \tag{3.14b}$$
$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \tag{3.14c}$$
$$\{f, gh\} = \{f, g\} h + g \{f, h\} \tag{3.14d}$$
$$\{q, f(p)\} = \{q, p\} \frac{\partial f}{\partial p} \tag{3.14e}$$
$$\{q, p\} = 1 \tag{3.14f}$$
$$\{f, H\} = 0 \Longrightarrow f = cste \tag{3.14g}$$
$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} = 0 \qquad \text{identité de Jacobi} \tag{3.14h}$$

Toute fonction dont le crochet avec H est nul est une constante du mouvement. Si $f_1 = H$, et $\{f_2, H\} = 0$ et $\{f_3, H\} = 0$, alors $\{f_2, f_3\} = f_4$ est une constante du mouvement.

La dérivée par rapport au temps d'une fonction f est :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \tag{3.15}$$

Pour $f = H$, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.16}$$

Quand les dérivées totale et partielle sont identiques, alors on a perdu de l'information. On a transféré une partie de l'information contenue dans L dans les équations de Hamilton, qui sont au nombre de deux (contre pour Euler–Lagrange).

3.1 Espace des phases

On se donne une équation dynamique, et on cherche $q(t)$ et $\dot{q}(t)$ dans le cas de L. Avec le hamiltonien, les variables sont q et p dont les "vitesses" $\dot{q}$ et $\dot{p}$ sont données par les équations de Hamilton. On définit le flot de H comme étant l'ensemble $\{\dot{q}, \dot{p}\}$. Les trajectoires ne peuvent pas se croiser dans l'espace des phases, car la vitesse ne serait pas définie. Une courbe fermée dans l'espace des phases correspond à un système périodique.

On peut aussi avoir des attracteurs, comme le point stable $(0, 0)$ d'un oscillateur harmonique amorti.

Théorème 3.1 (Liouville)**.** On a la relation

$$\sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0 \tag{3.17}$$

Exemple 3.2 (Oscillateur harmonique)**.**
On a

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{3.18}$$

Les équations de Hamilton donnent :

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -m\omega^2 q \tag{3.19}$$

Le théorème de Liouville est bien vérifié.

3.2 Transformations canoniques

On cherche un changement de variable $(q,p) \to (Q,P)$ avec un nouvel hamiltonien $H'(Q,P)$ et la relation $\{Q,P\} = 1$. On veut que la transformation soit un isomorphisme. Le jacobien vaut :

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \end{vmatrix} = 1 \Longrightarrow \{Q,P\} = 1$$

Exemple 3.3 (Oscillateur harmonique)**.**
L'hamiltonien vaut

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{3.20}$$

On fait les transformations :

$$p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \qquad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \tag{3.21}$$

Le déterminant vaut bien 1. Le nouveau hamiltonien s'écrit :

$$H' = P\omega \tag{3.22}$$

On obtient alors

$$Q = \omega t + Q_0 \qquad P = P_0 \tag{3.23}$$

On définit cette fois-ci :

$$a = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}}\,\mathrm{e}^{i\omega t} \qquad a^* = (a)^* \tag{3.24}$$

Dans ce cas on définit $Q = a$ et $P = ia^*$, comme $\{a, a^*\} = -i$. On trouve

$$H' = \omega a^* a \tag{3.25}$$

On considère les transformations $x' = x + \delta\, x$ et $p' = p + \delta\, p$. On considère la fonction génératrice xp'. On a alors

$$p' = \frac{\partial G}{\partial x} \qquad x = \frac{\partial G}{\partial p'} \tag{3.26}$$

et de même $G' = G + \delta\, G = x'p$ donne

$$x' = \frac{\partial G'}{\partial p} \qquad p = \frac{\partial G'}{\partial x'} \tag{3.27}$$

On a

$$x' = x + \delta\, x = \frac{\partial G}{\partial p'} + \delta\, x = \frac{\partial G'}{\partial p} = \frac{\partial G}{\partial p} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p}$$

donc (et en faisant de même pour $\delta\, p$) :

$$\delta\, x = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p} \qquad \delta\, p = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial x} \tag{3.28}$$

en utilisant

$$\frac{\partial G}{\partial p'} = \frac{\partial p}{\partial p'} \frac{\partial G}{\partial p} = \frac{\partial G}{\partial p}$$

La variation d'une fonction f est :

$$\delta\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\, \delta\, x + \frac{\partial f}{\partial p}\, \delta\, p = \varepsilon \{f, G\} \tag{3.29}$$

Si $x \to x + \delta\, x_0$ avec $\delta\, x_0 = \varepsilon$, alors $\delta\, x = \varepsilon \{x, G\} = \varepsilon$ donc $\{x, G\} = 1$ et alors $G = p$.

Si $G = p^2/2m$, on a $\delta\, x = p/m = cste$ et $\delta\, p = \varepsilon \{p, H\} = 0$ d'où $p' = p = cste$.

Finalement si $x' = x + vt$, alors $\delta\, x = vt$ et $\delta\, p = vm$, et $v \{x, G\} = vt$, $v \{p, G\} = vm$.

Exemple 3.4 (Perturbation)**.**

On prend le hamiltonien

$$H = H_0 + H_1 = \frac{p^2}{2m} + \lambda q \tag{3.30}$$

On trouve les équations

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -\lambda \qquad \ddot{q} = -\frac{\lambda}{m} \tag{3.31}$$

qui s'intègrent en

$$q = -\frac{\lambda}{m}\frac{t^2}{2} + \dot{q}_0 t + q_0 \qquad p = -\lambda t + p_0 \tag{3.32}$$

Pour $\lambda \ll 1$, on considère le second terme comme une perturbation. On trouve :

$$\dot{q} = \{q, H_0\} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = \{p, H_0\} = 0 \tag{3.33}$$

et donc $\dot{q} = a^{(0)}t + b^{(0)}$ et $p = p_0$, avec

$$a^{(0)} = \frac{p}{m} \qquad b^{(0)} = q - \frac{p}{m} t \tag{3.34}$$

Les constantes vont changer à cause de la perturbation, c'est à dire on calcule $\dot{a}^{(0)} = \left\{a^{(0)}, H_1\right\}$ et $\dot{b}^{(0)} = \left\{b^{(0)}, H_1\right\}$. On trouve

$$a^{(0)} = -\frac{\lambda}{m} t + a^{(1)} \qquad b^{(0)} \frac{1}{m} \frac{t^2}{2} + b^{(1)} \tag{3.35}$$

et en injectant, on obtient :

$$q = -\frac{\lambda}{m}\frac{t^2}{2} + a^{(1)}t + b^{(1)} \qquad p = -\lambda t + ma^{(1)} \tag{3.36}$$

On retombre sur les équations non perturbées.

Chapitre 4

Groupes

Il existe deux types de groupes :
- ponctuels (cardinaux) ;
- continus (paramétrés).

Définition 4.1 (Groupe)**.** Soit $\circ$ une loi interne, alors G est un groupe si :

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 \circ g_2 \in G \tag{4.1a}$$

$$\exists e \in G \mid \forall g \in G \quad g \circ e = e \circ g = g \tag{4.1b}$$

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G \mid g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = 1 \tag{4.1c}$$

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3) \tag{4.1d}$$

On adapte la définition aux groupes continus en remplaçant g_1, g_2 par $g(\theta_1), g(\theta_2)$, où θ est un paramètre.

Définition 4.2 (Groupe abélien)**.** Un groupe G est commutatif (abélien) si

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 \tag{4.2}$$

Exemple 4.1.

Quelques groupes classiques :
- $(\mathbb{Z}, +)$ est abélien.
- $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas abélien.
- $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe.
- $(S_n, \circ)$, où S_n est l'ensemble des permutations de n éléments. L'ordre de S_n est égal à son cardinal soit $n!$.
  Par exemple $S_2 = \{e, t_{12}\}$ où $t_{12} = t_{12}^{-1}$ est abélien. On a $\operatorname{card} S_2 = 2$.

Exemple 4.2 (Groupe S_3)**.**

S_3 est constitué par les transformations :
- $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 3$.
- $1 \to 3, 2 \to 2, 3 \to 1$.
- $1 \to 1, 2 \to 3, 3 \to 2$.
- $1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3$.

On a les lois de compositions du tableau 4.1 (convention : la ligne agit puis la colonne). On a noté

$$\ell = t_{12} \circ t_{23} \qquad d = t_{23} \circ t_{12} \tag{4.3}$$

On a donc :

– $d : 1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2$.

	e	t_{12}	t_{23}	t_{13}
e	e	t_{12}	t_{23}	t_{13}
t_{12}	t_{12}	e	d	ℓ
t_{23}	t_{23}	ℓ	e	d
t_{13}	t_{13}	d	ℓ	e

TABLE 4.1 – Loi de composition des éléments de S_3.

À des éléments t_{ij} on va associer les éléments P_{ij} d'un espace vectoriel (de matrices) par une application Φ. On choisit comme représentation :

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & P_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & P_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

En appliquant le commutateur des matrices à un vecteur quelconque v, on montre que le commutateur répond aux mêmes règles. Tous les éléments P_{ij} sont inversibles.

Définition 4.3 (Morphisme)**.** Soient (G, τ) et (G', τ') deux groupes. Alors $\Phi : G \to G'$ est un morphisme si

$$\forall a, b \in G \quad \Phi(a\tau b) = \Phi(a)\tau'\Phi(b) \tag{4.5}$$

Φ est :
– un homomorphisme si $\tau = \tau'$.
– un isomorphisme s'il s'agit un homomorphisme bijectif.

Exemple 4.3.
Soit $G = (U(1), \times)$. On a $z_1 = \mathrm{e}^{i\theta_1}, z_2 = \mathrm{e}^{i\theta_2}$ et $|z_1| = 1$. On a $z_1 z_2 = \mathrm{e}^{i\theta_1}\,\mathrm{e}^{i\theta_2} = \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}$, donc $z_1 z_2 = z_{1+2}$ et $z_1^{-1} = \mathrm{e}^{-i\theta_1} \in G$.

Une grandeur est dite :
– scalaire si $P_i a = a \quad \forall P_i$;
– pseudoscalaire si $P_i a = -a \quad \forall P_i$.

Définition 4.4 (Caractère)**.** Le caractère χ d'une représentation vaut

$$\chi = \operatorname{tr} P_{rep} \tag{4.6}$$

Théorème 4.1. Pour un groupe galiléen, la dimension des représentations irréductibles vaut 1.

Définition 4.5 (Éléments conjugués)**.** On dit que a et b sont conjugués si

$$\exists x \in G \mid a = x \circ b \circ x^{-1} \tag{4.7}$$

et donc $a, b \in c\ell$.

Remarque : Si $a = b$, alors $a \circ x - x \circ a = 0$, c'est à dire $[a, x] = 0$. e s'autoconjugue.

Définition 4.6 (Multiplicité)**.** La multiplicité ν d'une classe est le nombre d'éléments qu'elle contient.

Proposition 4.1. On a les formules :

$$N = \sum_j d_j^2 \tag{4.8a}$$

$$\frac{1}{N} \sum_g {\chi_{(g)}^{\tau_i}}^* \chi_{(g)}^{\tau_j} = \delta_{ij} \tag{4.8b}$$

$$\frac{\nu_k}{N} \sum_{\tau_i} {\chi_{(c\ell_k)}^{\tau_i}}^* \chi_{(c\ell_\ell)}^{\tau_i} = \delta_{k\ell} \tag{4.8c}$$

Exemple 4.4 (Groupe du triangle équilatéral)**.**

Les éléments du groupe sont :

– Rotations autour des médiatrices : $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
– Rotations autour de Oz : e, C_2, C_4 (en unités de $2\pi/3$).
– Symétrie par rapport au plan Σ.

On ne va considérer que les deux premiers sous-groupes. Les lois de composition sont données dans le tableau 4.2.

	e	C_2	C_4	σ_1	σ_2	σ_3
C_2	C_2	C_4	e	σ_3	σ_1	σ_2
C_4	C_4	e	C_2	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	C_2	C_4
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_4	e	C_2
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_2	C_4	e

Table 4.2 – Loi de composition des transformations du triangle équilatéral.

On choisit comme représentation :

$$\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & P_{\sigma_2} &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
P_{\sigma_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & P_{\sigma_3} &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
P_{C_2} &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & P_{C_4} &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Pour déterminer les matrices C_2 et C_4, on utilise les expressions des matrices de rotation en en remplaçant θ par $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

On peut essayer de décomposer les représentations : $\varepsilon = \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$ où ε_2 agit sur des vecteurs 2D et ε_1 sur des scalaires :

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} P_{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & P_{\varepsilon_1} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

	e	C_2	C_4	σ_1	σ_2	σ_3
τ_1 (pseudoscalaire)	1	1	1	-1	-1	-1
τ_2 (vecteur)	2	2	-1	0	0	0
τ_3 (scalaire)	1	1	1	1	1	1

Table 4.3 – Caractères de la représentation matricielle.

	$c\ell_1$	$c\ell_2$	$c\ell_3$
τ_1	1	1	-1
τ_2	2	-1	0
τ_3	1	1	1

Table 4.4 – Classes de conjugaison.

On va chercher si ε_2 peut se réduire à nouveau.

Les caractères sont indiqués dans le tableau 4.3. Les colonnes identiques correspondent à des classes de conjugaison (tableau 4.5).

C_2 et C_4 forment une classe de conjugaison :

$$C_4 = \sigma_1 C_2 \sigma_1 \tag{4.11}$$

comme $\sigma_1 = \sigma_1^{-1}$.

Si on avait oublié les σ_i, on aurait découvert que $C_2, C_4 \in c\ell$, mais on n'aurait pas pu écrire la relation de conjugaison et le groupe n'aurait pas été complet.

On a $\tau = n_1\tau_1 \oplus n_2\tau_2 + n_3\tau_3$.

	e	C_2	C_4	σ_1	σ_2	σ_3
τ (réductible)	3	0	0	-1	-1	-1
τ_1 (irrréductible)	1	1	1	-1	-1	-1
τ_2 (irrréductible)	2	-1	-1	0	0	0
τ_3 (irrréductible)	1	1	1	1	1	1

Table 4.5 – Décompte du nombre d'éléments de classes.

De la formule

$$n_j = \frac{1}{N} \sum_g \chi_g^\tau \chi_g^{\tau_j} \tag{4.12}$$

on trouve $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0$.

Théorème 4.2 (Cayley)**.** Soit un groupe ponctuel G, alors G est isomorphe au groupe de permutations d'indices.

On considère un système décrit par le lagrangien $L(q, \dot{q})$ qui est invariant par $G = C_{3v} = \{\Delta, \circ\}$. On note g_i les éléments de G. On cherche une représentation par ϕ de G dans un espace vectoriel ε de dimension 3, muni d'une base. En travaillant avec les traces, on aura des invariants, qui ne dépendent pas de la base choisie. On se demande si ε peut se décomposer.

Le lagrangien doit être $L = L(V \cdot V, S, PS \times PS)$.

Définition 4.7 (Groupe continu)**.** Les éléments g dépendent d'un paramètre $\phi \in \mathbb{R}$.

Définition 4.8 (Groupe compact)**.** Un groupe est dit compact si $g(\phi)$ est borné quelque soit ϕ.

Définition 4.9 (Groupe connexe)**.** Un groupe est dit connexe si pour tout $g(\phi_1), g(\phi_2)$, il existe une transformation continue faisant passer du premier au second.

Définition 4.10 ($GL(E)$)**.** Soit E un espace vectoriel, alors $GL(E)$ est l'ensemble des applications linéaires bijectives, notées A, de E dans E.

On note

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{M_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det M_A \neq 0\} \tag{4.13}$$

On montrera qu'il existe G tel que $M = \mathrm{e}^G$. Si $n > 2$, $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas abélien.

On définit les groupes

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{M_A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det M_A = 1\} \tag{4.14a}$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \left\{M_A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M_A^t = M_A^{-1}\right\} \tag{4.14b}$$

$$SO(n, \mathbb{R}) = \left\{M_A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M_A^t = M_A^{-1}, \det M_A = 1\right\} \tag{4.14c}$$

$$U(n, \mathbb{R}) = \left\{M_A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M_A^\dagger = M_A^{-1}\right\} \tag{4.14d}$$

$$SU(n, \mathbb{R}) = \left\{M_A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M_A^\dagger = M_A^{-1}, |\det M_A| = 1\right\} \tag{4.14e}$$

avec

$$\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1 \qquad \dim O(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4.15}$$

Le groupe O conserve le produit scalaire.

Exemple 4.5 ($O(2)$)**.**

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

et la relation $M^t = M^{-1}$ implique

$$a = d \qquad c = -b \tag{4.17}$$

donc

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Dans le cas de $SO(n)$, les relations $M = \mathrm{e}^G$ et $M^t = M^{-1}$ impliquent $G = -G$ antisymétrique.

Exemple 4.6 ($SO(2)$)**.**

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

et la relation $M^t = M^{-1}$ implique

$$a = d \qquad c = -b \tag{4.20}$$

donc

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad a^2 + b^2 = 1 \tag{4.21}$$