

# Hydrodynamique — L3

Harold Erbin

*Notes de cours de Magistère L3 donné par M. Di Meglio.*

Ce texte est publié sous la licence libre

**Licence Art Libre :**

<http://artlibre.org/licence/lal/>

Version : 27 avril 2011

Site : <http://harold.e.free.fr/>

# Sommaire

1	Introduction	1
2	Hydrostatique	6
3	Surfaces et interfaces, capillarité	12
4	Cinématique	21
5	Dynamique des fluides	27
6	Conservation de l'énergie	36
7	Écoulements potentiels. Équation de la vorticité	41
8	Écoulements à bas nombre de Reynolds	46
9	Couche limite	50
A	Correction du partiel	51
	Index	55
	Table des figures	56
	Table des matières	58

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Fluide, liquide

On parle de "mécanique des fluides", qui est un terme plus général que "hydrodynamique".

**Définition 1.1** (Fluide). Un liquide est un corps qui peut s'écouler. Le fluide correspond à un état désordonné de la matière.

Un fluide est un gaz ou un liquide.

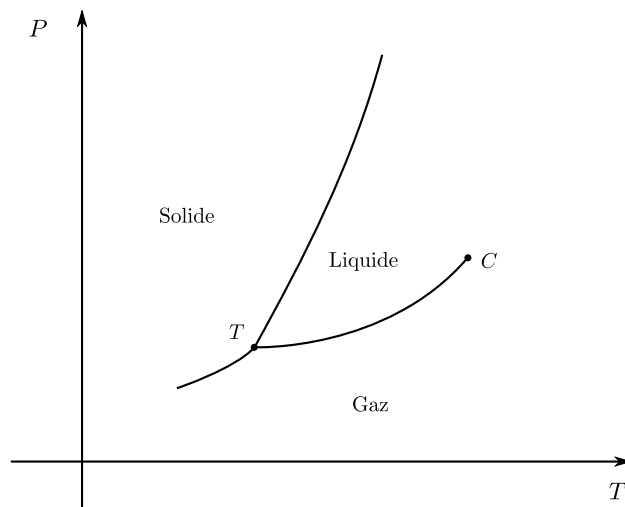


FIGURE 1.1 – Diagramme de phase

*Remarques :*

1. Un gaz est un milieu dilué et un liquide est une phase condensée.
2. Un solide est un objet qui ne peut pas se déformer. Il s'agit aussi d'une phase condensée, mais il est ordonné.

La distinction entre liquide et solide n'est pas toujours évidente.

**Exemple 1.1.**

Systèmes viscoélastique : ils sont caractérisés par un temps  $\tau$ . Si la durée d'observation  $T$  est telle que

- $T < \tau$  : comportement solide ;
- $T > \tau$  : comportement liquide.

## 1.2 Milieux continus

En mécanique des fluides, on considère les milieux comme continus : on ne décrit pas les milieux à l'échelle moléculaire.

Les dimensions caractéristiques  $d$  du système sont très supérieures à la taille caractéristique du fluide  $\lambda$  :

$$d \gg \lambda \quad (1.1)$$

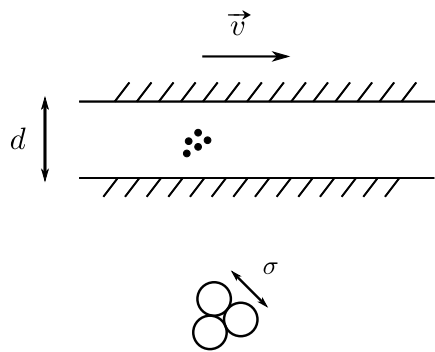


FIGURE 1.2 – Dimensions caractéristiques dans un écoulement de Couette plan

**Exemple 1.2.**

Libre parcours moyen d'une molécule d'air :

$$N \times \pi \sigma^2 \times \lambda = V_{tot}$$

et

$$pV = Nk_bT$$

donc

$$\lambda = \frac{V}{N\pi\sigma^2} \approx 0.3 \mu\text{m}$$

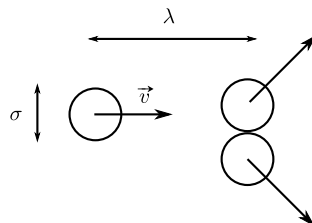


FIGURE 1.3 – Collision de deux particules d'air : libre parcours moyen

## 1.3 Forces

### 1.3.1 Forces volumiques

Les forces sont appliquées à un volume :

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}_v \delta V \quad (1.2)$$

#### Exemple 1.3.

Gravité (champ de pesanteur  $\mathbf{g}$ ) : à  $\delta V$  s'applique  $d\mathbf{F}$  et

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}_v \delta V = dm\mathbf{g} = \rho \delta V \mathbf{g}$$

donc

$$\mathbf{f}_v = \rho \mathbf{g} \quad (1.3)$$

Dans un champ électrique :

$$\mathbf{f}_v = \rho \mathbf{E}(\mathbf{n}, t) \quad (1.4)$$

### 1.3.2 Forces surfaciques

Les forces de surface correspondent aux forces de contact.

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}_s \delta S \quad (1.5)$$

Par convention, le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  perpendiculaire à  $\delta S$ , pointe vers l'extérieur de  $\delta V$  (figure 1.4). On la définit par

$$\mathbf{f}_s = \frac{d\mathbf{F}}{\delta S} = \boldsymbol{\sigma} \quad (1.6)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{xn} \mathbf{e}_x + \sigma_{yn} \mathbf{e}_y + \sigma_{zn} \mathbf{e}_z \quad (1.7)$$

qui est la contrainte (unité : pascal), pour la force repérée par  $\mathbf{n}$ .

$$\frac{\text{force}}{\text{surface}} = \text{contrainte}$$

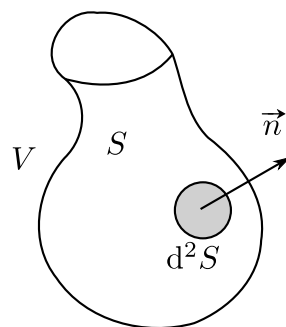


FIGURE 1.4 – Forces surfaciques s'exerçant sur un objet quelconque

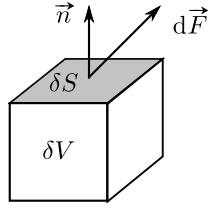


FIGURE 1.5 – Forces surfaciques s'exerçant sur un cube

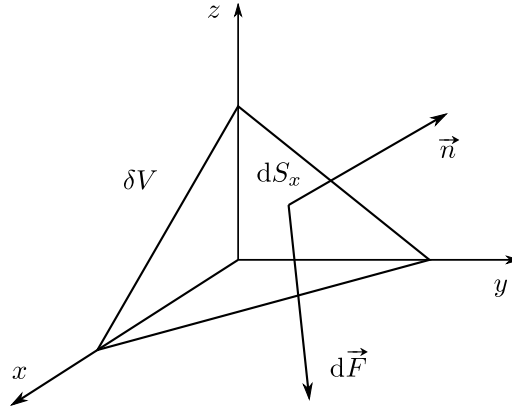


FIGURE 1.6 – Triangle subissant des forces de contrainte

$dS_x$  : surface orthogonale à l'axe  $x$ , c'est à dire

$$dS_x = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_x$$

On écrit l'équilibre des forces, par exemple en projetant sur l'axe  $x$ .

$$\mathbf{f}_{s,x} = -\sigma_{xx}\mathbf{e}_x - \sigma_{yx}\mathbf{e}_y - \sigma_{zx}\mathbf{e}_z$$

et sur  $x$  on a  $-\sigma_{xx}dS_x$  (avec  $dS_x = dSn_x$ ), et de même avec les autres.

La force totale (projection sur  $x$ ) est

$$\underbrace{-\sigma_{xx}n_x dS - \sigma_{xy}n_y dS - \sigma_{xz}n_z dS}_{3 \text{ forces (dessus, dessous, côté)}} + \underbrace{\sigma_{xn} dS}_{\text{force sur face } \mathbf{n}} + f_v dV = \rho dV \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Quand  $dV \rightarrow 0$ ,  $dV \sim a^3$  et  $dS \sim a^2$ , où  $a$  est la taille caractéristique de l'élément  $dV$ .  $dS \rightarrow 0$

$$\frac{dV}{dS} \sim \frac{a^3}{a^2} \rightarrow 0$$

donc

$$(\sigma_{xn} - \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z) + \underbrace{f_v}_{=0} \frac{dV}{dS} = \rho \underbrace{\frac{dV}{dS}}_{=0} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xn} \\ \sigma_{yn} \\ \sigma_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

ou encore

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (1.9)$$

où on définit le tenseur d'ordre 2  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ .

*Remarque* : On peut écrire avec la convention d'Einstein

$$\sigma_i = \sigma_{ij}n_j$$



## Chapitre 2

# Hydrostatique

### 2.1 Un exemple

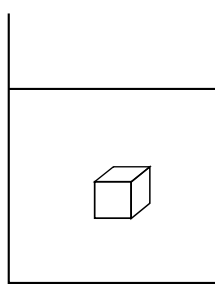


FIGURE 2.1 – Force de contrainte sur un cube immergé

Quel est le tenseur des contraintes (figure 2.1) ?

Les forces associées à la pression agissent perpendiculairement aux éléments de surface, d'où  $\sigma_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . On a

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

avec  $p > 0$ .

### 2.2 Équation de l'hydrostatique

Équilibre en présence de forces en volume :

$$\int_V \mathbf{f}_v d^3\tau + \oint_S -p \mathbf{n} dS = \mathbf{0}$$

Rappelons le théorème du gradient :

**Théorème 2.1** (Théorème du gradient).

$$\int_V \mathbf{f}_v d^3\tau + \int_V -\nabla p d^3\tau = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

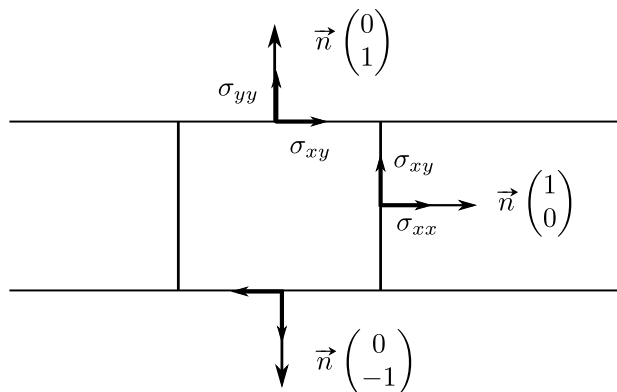


FIGURE 2.2 – Force de contrainte sur un cube immergé (deux dimensions).

Nous en déduisons l'équation

$$\mathbf{f}_v - \nabla p = 0 \quad (2.2)$$

**Exemple 2.1.**

Force de volume = gravité :  $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$ , d'où

$$\rho\mathbf{g} = \nabla p$$

Dans le cas où on s'intéresse uniquement à  $z$ , l'équation devient

$$\frac{dp}{dz} = \rho g$$

d'où

$$p = \rho g z + p_0$$

*Remarque :* On a  $\rho g(z = 10 \text{ m}) = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa} = 0.76 \text{ mHg}$  (avec  $\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ).

### 2.3 Poussée d'Archimède

- Poids :  $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = \rho_S V_S \mathbf{g}$
- Force de surface :

$$\oint_{\Sigma} -\rho_L \mathbf{n} dS = - \int_{\Omega} \nabla p d\tau = -\rho_L \mathbf{g} V_S$$

car  $\nabla p = \rho_L \mathbf{g}$ .

On l'appelle force d'Archimède<sup>1</sup>.

Au total, les forces qui s'exercent sur le solide sont

$$\rho_S V_S g \mathbf{e}_z - \rho_L V_S g \mathbf{e}_z \quad (2.3)$$

La flottaison va dépendre du sens de  $\rho_S - \rho_L$ .

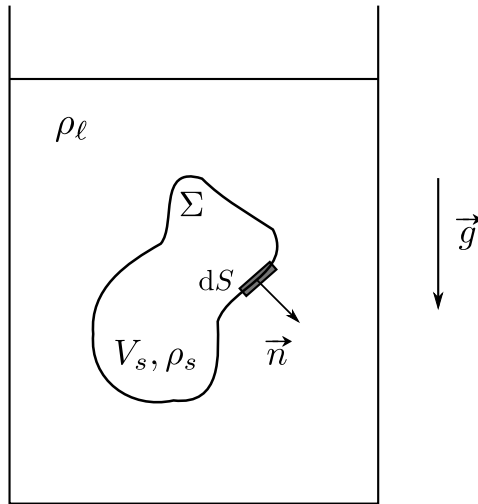


FIGURE 2.3 – Poussée d'Archimède sur un corps immergé.

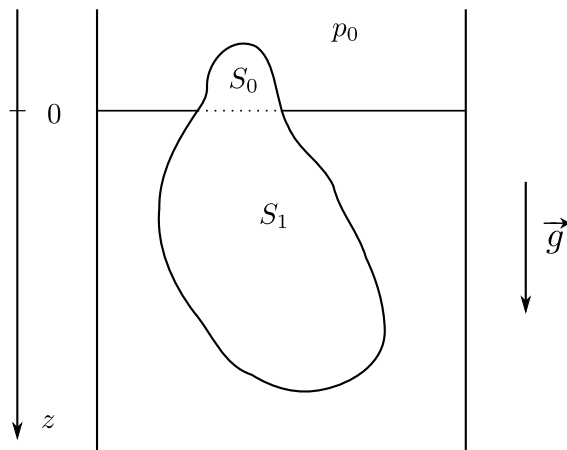


FIGURE 2.4 – Poussée d'Archimède s'exerçant sur un corps entre deux fluides.

**Exemple 2.2.**

À l'équilibre :

- $S_0$  : surface émergée;
- $S_1$  : surface immergée;
- $\Sigma = S_1 + S_2$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{surface} &= \int_{S_1} -p_0 \mathbf{n} dS + \int_{S_1} -(p_0 + \rho_L g z) \mathbf{n} dS \\
 &= \int_{S_0+S_1} -p_0 \mathbf{n} dS - \int_{S_1} \rho_L g z \mathbf{n} dS \\
 &= \underbrace{-\oint_S p_0 \mathbf{n} dS}_{=0} - \int_{S_1} \rho_L g z \mathbf{n} dS \\
 &= \int_{\Omega} -\nabla p_0 d\tau = 0 \\
 &= \oint_{S+S_1} \rho_L g z \mathbf{n} dS \\
 &= -\rho_L g V_{im} \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$

En quel point s'applique la poussée d'Archimède ?

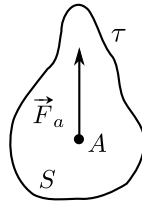


FIGURE 2.5 – Point d'application de la poussée d'Archimède.

$A$  est le centre de masse du volume déplacé (= barycentre). L'autre force volumique — le poids — s'applique au centre de gravité  $G$ . Si  $A \neq G$ , le solide n'est pas homogène.

**Exemple 2.3** (Sous-marin).

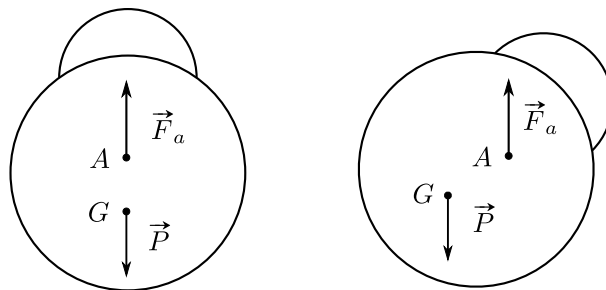


FIGURE 2.6 – Poussée d'Archimède sur un sous-marin cylindrique.

1. En anglais, on dit Buoyancy.

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_A = 0$$

Exemple 2.4.

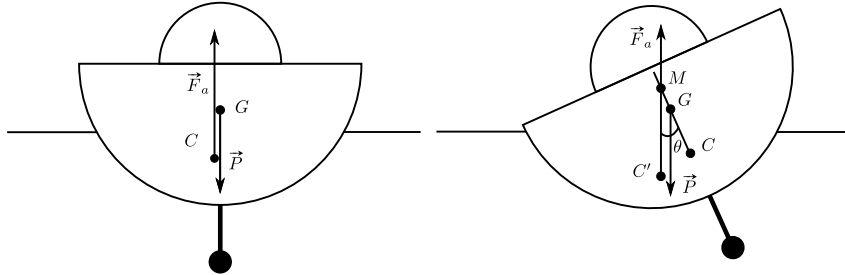


FIGURE 2.7 – Poussée d'Archimède sur un bateau.

On appelle  $C$  le centre de carène.  
Le moment des forces est

$$\mathcal{M} = \mathbf{MC} \times \mathbf{F}_c + \mathbf{MA} = \mathbf{MG} \times m\mathbf{g}$$

donc

$$\mathcal{M} = ZG \times mg = GMmg \sin \theta$$

où  $\theta$  est l'angle de gîte et  $M$  le métacentre.

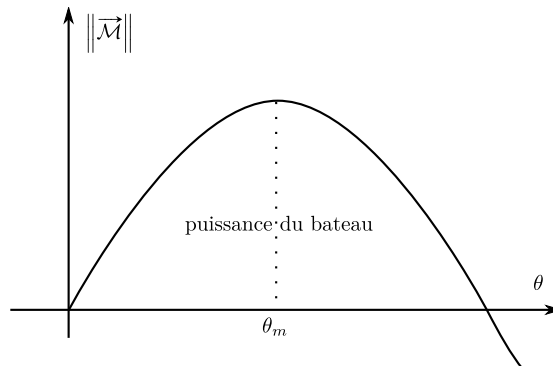


FIGURE 2.8 – Moment du bateau en fonction de l'angle de gîte.

Sur la figure,  $\theta_m$  représente l'angle de chavirage.

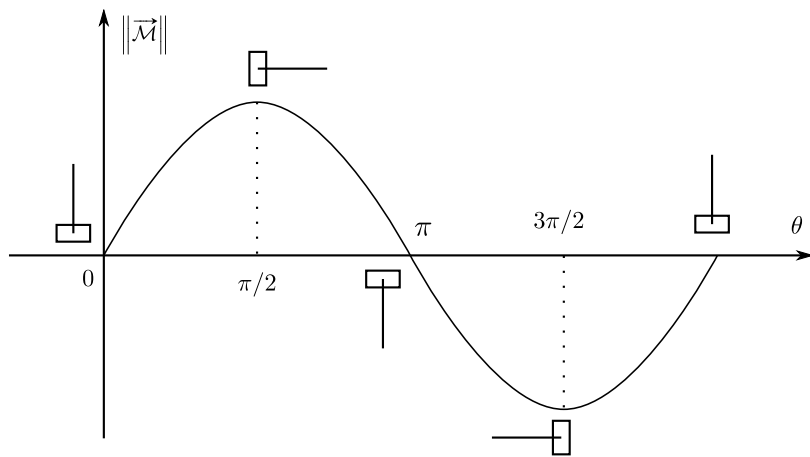


FIGURE 2.9 – Moment en fonction de l'angle de gite pour un bateau idéal.

# Chapitre 3

## Surfaces et interfaces, capillarité

### 3.1 Tension de surface

#### 3.1.1 Modèle mécanique

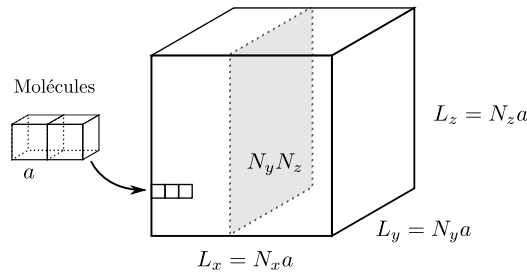


FIGURE 3.1 – Matière condensée.

On note  $-\mathcal{V}$  : énergie de cohésion (avec  $\mathcal{V} > 0$ ).

Quelle est l'énergie  $W$  du cube ?

$$\begin{aligned} W &= -\mathcal{V} \times \text{nombre de faces en contact} \\ &= -\mathcal{V} \left( (N_x - 1)N_y N_z + N_x(N_y - 1)N_z + N_x N_y(N_z - 1) \right) \\ &= -\mathcal{V}(3N_x N_y N_z - N_x N_y - N_x N_z - N_y N_z) \end{aligned}$$

– Volume :  $\Omega = N_x N_y N_z a^3$

– Surface :  $\Sigma = 2(N_x N_y + N_x N_z + N_y N_z) a^2$ .

donc

$$W = -\frac{3\mathcal{V}}{a^3} \Omega + \frac{\mathcal{V}}{2a^2} \Sigma \quad (3.1)$$

–  $-\frac{3\mathcal{V}}{a^3} \Omega < 0$  est l'énergie de formation en volume.

– On définit par

$$\gamma = \frac{\mathcal{V}}{2a^2} > 0 \quad (3.2)$$

la tension de surface.  
 $\mathcal{V}$  doit être relié à la chaleur latente de vaporisation.

**Exemple 3.1.**

Pour l'eau  $L = 2200 \text{ kJ kg}^{-1}$ .

$$\mathcal{V} = k_b T_{eb} = 10^{-20} \text{ J}$$

$$\frac{\mathcal{V}}{2a^2} = \frac{10^{-20}}{2 \times 4 \times 10^{-20}} = 10^{-1} \text{ J m}^{-2}$$

donc  $\gamma_{eau} = 0.073 \text{ N m}^{-1}$  et

$$\mathcal{V} = \frac{2200 \times 10^3}{2 \times 18 \times 6 \times 10^{23}} \approx 10^{-19} \text{ J}$$

Par exemple, pour une pièce de  $40 \text{ m}^2$ , il faut  $3 \text{ J}$  pour étaler un film d'eau sur toute la surface.

**Exemple 3.2.**

Quand on casse un objet, on augmente sa surface de contact (figure 3.2) :

$$s = 2 \times 4\pi r^2 = 2 \times 4\pi \times 2^{-2/3} R^2 = 2^{1/3} S > S$$

car

$$\frac{4}{3}\pi R^2 = 2 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\implies r = 2^{-1/3} R < R$$

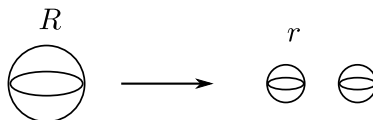


FIGURE 3.2 – Gouttes.

$r$	$n$ (nombre de gouttes)	$\Sigma$ (surface)
1 mm	239	$0.003 \text{ m}^2$
1 $\mu\text{m}$	$239 \times 10^{11}$	$3 \text{ m}^2$
10 nm	$239 \times 10^{17}$	$300 \text{ m}^2$

TABLE 3.1 – Gouttes d'huile ( $\Omega = 1 \text{ cm}^3$ ).

**3.1.2 Autre représentation de la tension de surface. Formule de Laplace**

Calculons la norme de la force tension de surface (figure 3.4).  
 $A \rightarrow A + dA$  avec  $dA = Ld\ell$ .



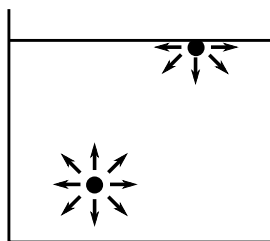


FIGURE 3.3 – Différences des tensions de surface sur un objet immergé.

$$\begin{aligned}\gamma dA &= F d\ell \\ \gamma L d\ell &= F d\ell\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{F = \gamma \ell} \quad (3.3)$$

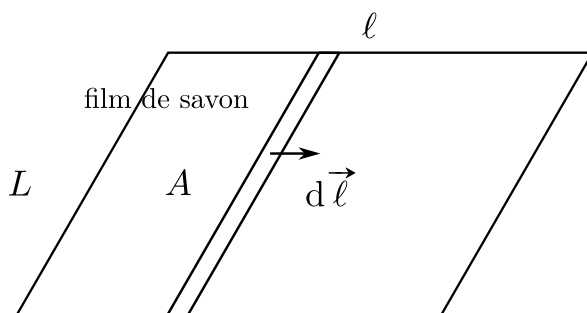


FIGURE 3.4 – Film de savon et capillarité.

**Définition 3.1** (Pression de Laplace). On définit la pression de Laplace (ou pression capillaire) par

$$\boxed{p_i - p_0 = \frac{2\gamma}{R}} \quad (3.4)$$

car (figure 3.5

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ d\Omega &= 4\pi R^2 dR \\ \Sigma &= 4\pi R^2 \\ d\Sigma &= 2\pi R dR \\ (p_i - p_0)d\Omega &= \gamma d\Sigma\end{aligned}$$

**Exemple 3.3.**

Dans le cas de l'eau ( $\gamma = 0.1 \text{ N m}^{-1}$ ), on a

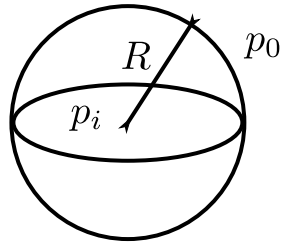


FIGURE 3.5 – Pression de Laplace.

- pour  $R = 1 \text{ mm}$  :  $\Delta p = 0.002 p_{\text{atm}}$ .
- pour  $R = 1 \text{ }\mu\text{m}$  :  $\Delta p = 2 p_{\text{atm}}$ .

Dans le cas général, une surface a deux rayons de courbures. Dans ce cas, la formule de Laplace est

$$p_i - p_0 = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.5)$$

### 3.2 Rayons de courbures

On a

$$\begin{aligned} \Sigma &= xy \\ d\Sigma &= xdy + ydx \end{aligned}$$

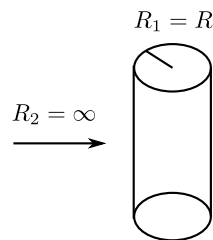


FIGURE 3.6 – Rayons de courbures d'un cylindre.

Pour la figure 3.6

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\gamma}{R}$$

D'une manière générale, on a la relation

$$p_i - p_0 = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.6)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure.

- Si  $R_1 = -R_2$  (selle de cheval),  $p_i - p_0 = 0$ .
- Si  $R_1 = R_2$  (sphère),  $p_i - p_0 = 2\gamma/R$ .

### 3.2.1 Expressions analytiques

Soient  $R$  le rayon de courbure et  $C$  le centre de courbure. On a les relations

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{dy}{dx} \\ \frac{1}{R} &= \frac{d\theta}{ds} \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ \frac{d}{dx} \tan \theta &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} \times \frac{1}{\cos^2 \theta}\end{aligned}$$

d'où<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}}} \frac{d^2y}{dx^2} \\ &= \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

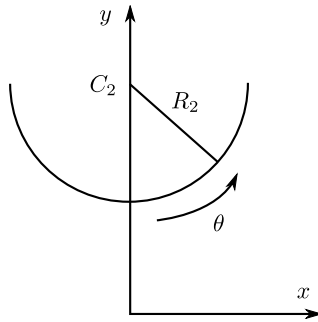


FIGURE 3.7 – Cercle osculateur.

Dans le cas d'une surface axisymétrique<sup>2</sup> (figure 3.7), l'autre rayon de courbure est obtenu par ( $C_2$  appartenant à l'axe de symétrie) :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{y'}{x\sqrt{1 + y'^2}} \quad (3.7)$$

d'après la relation

$$x = R_2 \sin \theta$$

**Exemple 3.4** (Catenoïde).

On a

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

---

1. En notant

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

2. Symétrique par rotation autour d'un axe.

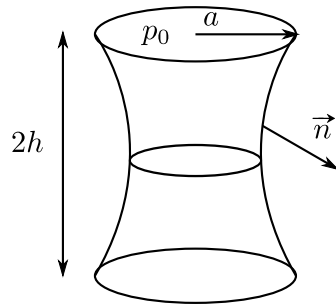


FIGURE 3.8 – Caténoïde.

donc  $\Delta p = 0$  et

$$\begin{aligned} \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} &= 0 \\ \frac{dp}{dx(1+p^2)} + \frac{p}{x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dp}{p} - \frac{pdp}{1+p^2} &= \frac{-dx}{x} \\ \ln\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) &= \ln \frac{k}{x} \end{aligned}$$

où  $k$  est une constante, et avec

$$p \equiv \frac{dy}{dx}$$

$x \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} b$  donc

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{b}{x}$$

d'où

$$dy = \frac{bdx}{\sqrt{x^2 - b^2}}$$

or comme

$$\begin{aligned} x &= b \operatorname{ch} u \\ dx &= b \operatorname{sh} u du \end{aligned}$$

on obtient

$$y = bu$$

la constante étant prise nulle. Finalement

$$\begin{aligned} y &= bu = b \operatorname{ch}^{-1} \frac{x}{b} \\ x &= b \operatorname{ch} \frac{y}{b} \end{aligned}$$

En particulier, quand  $x = a$ ,  $y = h$ , et

$$a = b \operatorname{ch} \frac{h}{b}$$

on a

$$\frac{a}{h} = \frac{b}{h} \operatorname{ch} \frac{h}{b}$$

$a/h$  a deux solutions, sauf au point  $h/b = 1.22$  où la solution est double et vaut 1.5 (en dessous il n'y a aucune solution).

### 3.3 Ondes capillaires

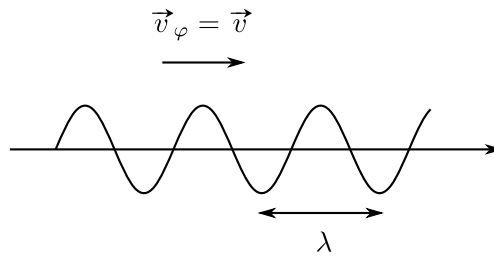


FIGURE 3.9 – Onde capillaire.

Si  $v = f(g, \lambda, \ell)$ , dimensionnellement, on voit que  $v$  ne peut pas dépendre de  $\ell$  donc

$$v \approx \sqrt{g\lambda} \quad (3.8)$$

et si on pose

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{k}} \times k = \sqrt{gk}$$

on a

$$\omega^2 = gk \quad (3.9)$$

dû à la gravité.

Cette expression diffère du cas où l'on cherche les ondes de capillarité. En effet, la surface  $S$  d'eau lors de la formation de vagues est supérieure à la surface  $S_0$  sans vagues, ce qui coûte une énergie

$$\Delta E = \gamma(S - S_0) \quad (3.10)$$

donc

$$v \approx \frac{\gamma}{\ell\lambda} \quad (3.11)$$

et

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\ell}} k^{3/2}$$

donc pour la capillarité on a

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\ell} k^3 \quad (3.12)$$

Selon la valeur de  $k$ , la gravité ou la capillarité prédomine (figure 3.10).

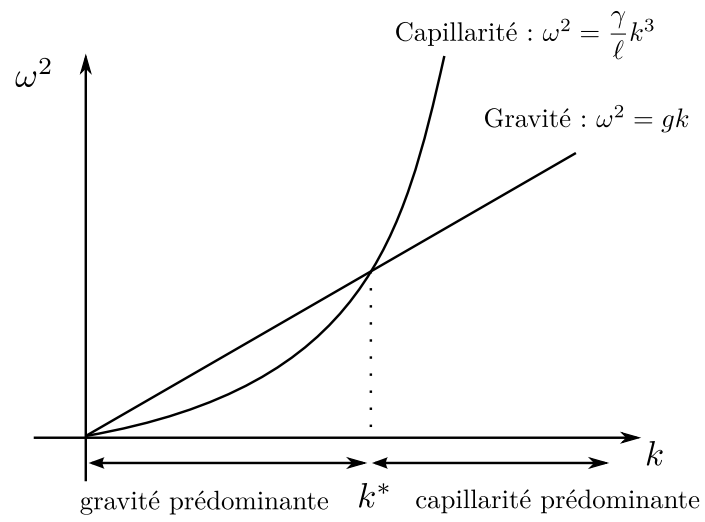


FIGURE 3.10 – Courbe de  $\omega^2(k)$  pour une onde capillaire.

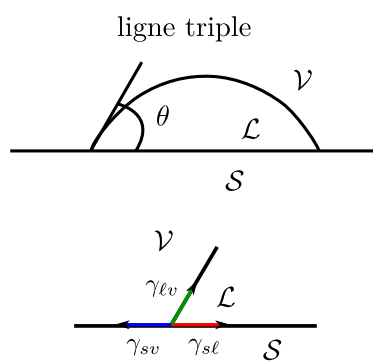


FIGURE 3.11 – Mouillage.

### 3.3.1 Relation de Young–Dupré

On appelle  $\theta$  l'angle de contact et la ligne triple correspond à la ligne de contact (figure 3.11 : liquide, solide, vapeur).

$$\gamma_{sv} = \gamma_{lv} \cos \theta + \gamma_{s\ell} \quad (3.13)$$

Relations :

$$2a^2\gamma_{ij} \approx V_{ii} + V_{jj} - 2V_{ij}$$

$$\gamma_{ij} \approx \alpha_i^2 + \alpha_j^2 - 2\alpha_i\alpha_j$$

$$\gamma = \frac{\text{énergie}}{\text{surface}}$$

$$\gamma = \frac{\text{énergie}}{\text{volume}}$$

où  $\alpha$  est la polarisabilité et  $E$  le module de Young du solide (= densité d'énergie de cohésion). On a

$$a = \frac{\gamma}{E} < 1 \text{ \AA}$$

# Chapitre 4

## Cinématique

### 4.1 Eulérien–Lagrangien

Soit une particule de fluide, de taille  $\lambda$ , et l'on suppose le milieu continu.

– Point de vue d'Euler : on étudie  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  au point  $\mathbf{r}$ .

– Point de vue de Lagrange : on suit la particule.

Calcul de l'accélération de la particule du point de vue eulérien :

$$\begin{aligned}d\mathbf{v} &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t) \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t') + \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}} \quad (4.1)$$

### 4.2 Tenseur des taux de déformation

L'élément de fluide peut se déformer<sup>1</sup> sous l'action des forces de surfaces. On s'intéresse uniquement aux déformations et non aux translations (car cela revient à changer le temps). En adoptant une notation tensorielle, la variation de la vitesse est

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad (4.2)$$

$\partial_j v_i$  sont les éléments d'un tenseur d'ordre 2 (le tenseur des taux de déformation) que l'on notera  $\underline{\underline{g}}$ , c'est à dire

$$g_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (4.3)$$

et on peut réécrire (4.2) comme

$$d\mathbf{v} = \underline{\underline{g}} d\mathbf{r} \quad (4.4)$$

---

1. C'est à dire couler comme il s'agit d'un fluide.



On peut décomposer  $\underline{g}$  en un tenseur symétrique<sup>2</sup> et un tenseur antisymétrique<sup>3</sup> :

$$g_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{e_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{\omega_{ij}} \quad (4.5)$$

## 4.2.1 Partie symétrique

### Termes diagonaux

La discussion se fera à deux dimensions. Seuls les termes diagonaux ne sont pas nuls et le tenseur est

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

On voit facilement que les côtés changent de longueur. Par exemple :

$$dx_1 \longrightarrow dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dt$$

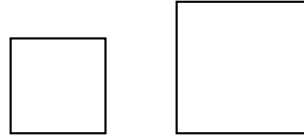


FIGURE 4.1 – Variation du volume d'une particule de fluide.

La surface elle aussi change :

$$\begin{aligned} dS &= \left( dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dt \right) \left( dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_2 dt \right) - dx_1 dx_2 \\ &= \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 dt \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{dS}{S} = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dt \quad (4.7)$$

De même, la variation du volume sera

$$\frac{dV}{V} = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dt = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dt = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dt \quad (4.8)$$

Lorsque le fluide est incompressible, on a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.9)$$

2. Pour un tenseur symétrique  $\underline{e}$ , on a  $e_{ij} = e_{ji}$ .

3. Pour un tenseur antisymétrique  $\underline{\omega}$ , on a  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ .

### Termes non diagonaux

Prenons par exemple  $dx_1$ , on aura

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

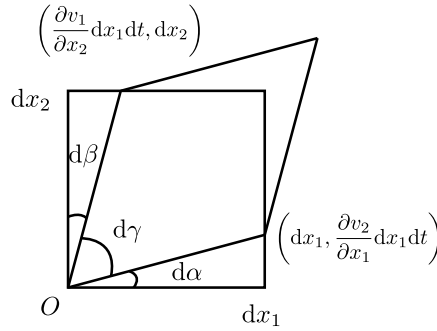


FIGURE 4.2 – Déformation d'une particule de fluide.

Les angles  $d\alpha$  et  $d\beta$  sont (en passant par les tangentes)

$$d\alpha = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dt$$

$$d\beta = -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} dt$$

et leur variation temporelle est donc

$$d\alpha = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dt \quad (4.10a)$$

$$d\beta = -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} dt \quad (4.10b)$$

La variation de l'angle  $\gamma = \pi/2 - d\alpha + d\beta$  est

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = -2e_{12} \quad (4.11)$$

Les termes non diagonaux du tenseur symétrique  $e_{ij}$  correspondent à des déformations. On peut le réécrire

$$e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk}}_{t_{ij}} + \underbrace{\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk}\right)}_{d_{ij}} \quad (4.12)$$

$t_{ij}$  représente le changement de volume et  $d_{ij}$ , que l'on appelle déviateur et dont la trace est nulle, représente la déformation angulaire à volume fixe.

**Exemple 4.1.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 4.2.2 Partie antisymétrique

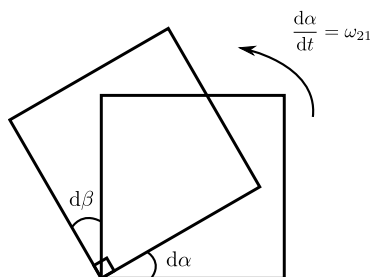


FIGURE 4.3 – Rotation d'une particule de fluide.

On a  $d\alpha = d\beta$  car

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

Donc  $\omega_{ij}$  représente un rotation.

On introduit un pseudo-vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  tel que<sup>4</sup>

$$\omega_k = -\varepsilon_{ijk} \omega_{ij} \quad (4.13)$$

On a donc

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (4.14)$$

Ce vecteur est appelé vecteur vorticité.

On définit aussi le vecteur tourbillon par

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \quad (4.15)$$

**Exemple 4.2** (Écoulement orthoradial).

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\omega} &= \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\Omega} \end{aligned}$$

4. Où

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k \text{ direct} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ indirect} \\ 0 & \text{si deux indices égaux} \end{cases}$$

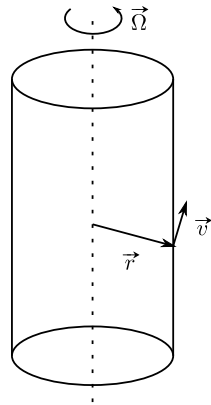


FIGURE 4.4 – Écoulement orthoradial.

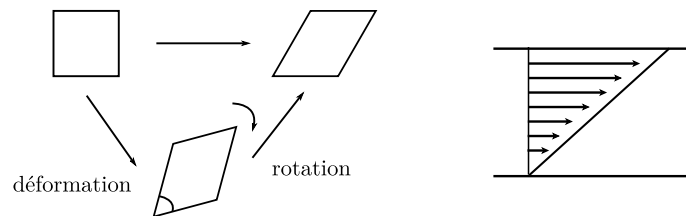


FIGURE 4.5 – Cisaillement simple dans un écoulement de Couette : déformation + rotation.

### 4.3 Conservation de la masse

La masse est

$$m = \int_{\Omega} \rho d\tau \quad (4.16)$$

où  $d\tau$  est un élément de fluide et  $\rho$  la masse volumique.

On a

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\tau \\ &= - \oint_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla(\rho \mathbf{v}) d\tau \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega} \rho d\tau + \int_{\Omega} \nabla(\rho \mathbf{v}) d\tau &= 0 \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) \right) d\tau &= 0 \\ \int_{\Omega} \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right)}_{\frac{d\rho}{dt}} d\tau &= 0 \end{aligned}$$

Puisque la dernière équation est vraie pour tout  $\Omega$ , on a l'équation locale de conservation de la masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.17)$$

À deux dimensions, si  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , on introduit une fonction  $\psi$ , appelée fonction de courant telle que

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.18)$$

et il est suffisant pour calculer  $v_x$  et  $v_y$  car

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\psi = cste$  définit une ligne de courant :  $\nabla \psi$  est orthogonal à la ligne  $\psi = cste$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \psi &= v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= -v_x v_y + v_x v_y = 0 \end{aligned}$$

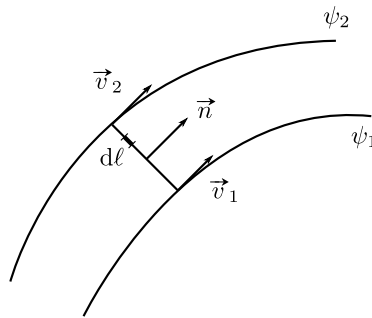


FIGURE 4.6 – Deux lignes de courant.

Prenons deux lignes de courant (figure 4.6), et soit  $Q$  le débit entre ces deux lignes :

$$Q = \int_1^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dl = \psi_2 - \psi_1$$

# Chapitre 5

## Dynamique des fluides

Il s'agit de mettre en relation les mouvements et les forces.

### 5.1 Relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformation

On a vu que

$$\frac{\mathbf{F}}{S} = \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}$$

Ce tenseur des contraintes est symétrique. On écrit

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij} \quad (5.1)$$

où  $p$  est la pression hydrostatique. Quelle est la relation entre  $\sigma'_{ij}$  et  $g_{ij}$ , avec

$$g_{ij} = t_{ij} + d_{ij} + \omega_{ij} \quad (5.2)$$

et en négligeant la viscosité?

On a

$$\sigma'_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$$

On s'intéresse à des liquides isotropes, c'est à dire

$$\sigma'_{ij} = a \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes.

Recommençons

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \\ &= \eta \left( 2e_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} e_{kk} \right) + \underbrace{\zeta \delta_{ij} e_{kk}}_{\text{changement de volume}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $\eta$  est la viscosité cinématique. On a

$$\eta = a \quad b = \zeta - \frac{2}{3}\eta$$

**Exemple 5.1.**

Dans un écoulement de Couette (cisailé à  $v$ ) :

$$\sigma'_{xy} = 2\eta e_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{v}{d}$$

avec  $\eta = \text{contrainte} \times \text{temps}$ , c'est à dire que son unité est Pa.s. Pour l'eau, on a  $\eta = 10^{-3}$  Pa.s.

**Définition 5.1** (Rhéologie). La rhéologie consiste en l'étude des déformations des liquides.

## 5.2 Origine physique de la viscosité

Imaginons deux trains à peu près infiniment long et sans masse, possédant  $N$  wagons. À l'instant initial, le premier a une vitesse  $v_1 = v$ , tandis que le second est au repos ( $v_2 = 0$ ). Un voyageur de masse  $m$  saute du premier train dans le second. La conservation de la quantité de mouvement donne :

$$\begin{aligned} mv &= (n+1)v_2 \\ \Rightarrow v_2 &= \frac{v}{N+1} \approx \frac{v}{N} \end{aligned}$$

S'il recommence plusieurs fois, la vitesse du premier train ne changera pas tandis que la vitesse du second tendra vers  $v$ .

Donc la viscosité correspond à des transferts de quantité de mouvement.

**Exemple 5.2** (Application à un gaz).

Soit  $V$  la vitesse de cisaillement. Le taux de cisaillement est défini par

$$\sigma = \eta \frac{V}{\lambda}$$

Soit  $\lambda$  le libre parcours moyen d'une particule, et  $v$  sa vitesse due à l'agitation thermique :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_bT \implies v \approx \sqrt{\frac{k_bT}{m}}$$

Le nombre de molécules du gaz qui changent de branche pendant un temps  $dt$  est

$$n \propto \rho v dt \times A$$

où  $A$  est la surface. La force associée est

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho v A dt \frac{mV}{dt} = \rho v AmV$$

et donc<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ \implies \eta &= \lambda \rho v m = \frac{vm}{\sigma_c} \end{aligned}$$

---

1. Un facteur 1/3 apparait lors d'un calcul rigoureux.

où  $\sigma_c$  est la section efficace.

On déduit

$$\eta \propto \sqrt{T} \quad (5.4)$$

Pour l'air, on obtient  $\eta \approx 10^{-5}$  Pa.s.

**Exemple 5.3** (Modèle d'Eyring).

Pour passer du gaz au liquide, on pourrait vouloir faire les transformations :

$$\lambda \rightarrow a \quad \rho \rightarrow \frac{1}{a^3}$$

Mais quel est le volume ?

Expérimentalement, on trouve que  $\eta$  diminue quand  $T$  augmente, ce qui est incompatible avec (5.4).

On utilise donc le modèle d'Eyring pour décrire le liquide.

Soit  $\nu$  la fréquence des sauts des molécules. On a

$$\nu_{1 \rightarrow 2} = \nu_{2 \rightarrow 1} = \nu_0 e^{-\frac{\Delta H}{k_b T}}$$

où  $\nu_0$  est la fréquence de saut "naturelle".

Le passage de 1 à 2 est plus facile que de 2 à 1. On a

$$\begin{aligned} \Delta H_{1 \rightarrow 2} &= \Delta H_0 - a \times \underbrace{\sigma a^2}_{\text{force}} \\ \Delta H_{2 \rightarrow 1} &= \Delta H_0 + \sigma a^3 \end{aligned}$$

où  $a$  est le déplacement. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{V}{a} \\ &= \frac{1}{2} \left( \nu_0 e^{-\frac{\Delta H_0 - \sigma a^3}{k_b T}} - \nu_0 e^{-\frac{\Delta H_0 + \sigma a^3}{k_b T}} \right) \\ &= \nu_0 \operatorname{sh} \left( \frac{\sigma a^3}{k_b T} \right) e^{-\frac{\Delta H_0}{k_b T}} \end{aligned}$$

et  $\sigma a^3 < k_b T$  car ce dernier terme correspond à peu près à l'énergie de cohésion. On a donc

$$\dot{\gamma} \approx \nu_0 \frac{\sigma a^3}{k_b T} e^{-\frac{\Delta H_0}{k_b T}} \quad (5.5)$$

La viscosité est

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \\ &= \frac{k_b T}{\nu_0 a^3} e^{\frac{\Delta H_0}{k_b T}} \end{aligned}$$

On a la relation (phonon)

$$h\nu_0 = k_b T$$

La formule d'Eyring donne

$$\eta = \frac{h}{a^3} e^{\frac{\Delta H_0}{k_b T}} \quad (5.6)$$



### 5.3 Équation de Navier–Stokes

Équation de la dynamique :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.7)$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v d\tau + \int_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} dS$$

On a

$$\int_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \underline{\underline{\sigma}} d\tau$$

La divergence d'un tenseur d'ordre 2 donne un tenseur d'ordre 1 (un vecteur). L'équation précédente devient donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_v d\tau + \int_{\Omega} \nabla \underline{\underline{\sigma}} d\tau \\ \implies \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{f}_v + \nabla \underline{\underline{\sigma}} \end{aligned}$$

et en utilisant (5.1), on obtient

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}_v - \nabla p + \nabla \underline{\underline{\sigma}}' \quad (5.8)$$

Cherchons à exprimer le dernier terme. On a (5.3), donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} &= \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \zeta \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\ &= \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} &= \nabla^2 v_i \end{aligned}$$

donc l'équation (5.8) devient

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}_v - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.9)$$

Si le fluide est incompressible (4.9), on a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}_v - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.10)$$

L'équation de Navier–Stokes (5.9) est donc une équation :

- différentielle du second ordre ;
- non homogène (dérivées spatiales et temporelles) ;
- non linéaire.

Il n'y a donc pas de solution générale, et il faut recourir à des simplifications en considérant des cas particuliers : on est conduit à introduire des nombres sans dimension.

**Exemple 5.4.**

Soient

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\approx \rho \frac{V}{\tau} \\ \eta \nabla^2 \mathbf{v} &\approx \eta \frac{V}{d^2}\end{aligned}$$

alors

$$N = \frac{\frac{\rho V}{\tau}}{\frac{\rho V}{d^2}} = \frac{\rho d^2}{\eta \tau}$$

Si  $N > 1$ , les effets inertiels sont supérieurs aux effets visqueux.

**Exemple 5.5** (Nombre de Reynolds).

On note le nombre de Reynolds  $Re$ , et il correspond au rapport des effets inertiels sur les effets visqueux en régime stationnaire :

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} \tag{5.11}$$

car on a le rapport

$$\frac{\frac{\rho V^2}{L}}{\frac{\eta V}{L^2}}$$

Si  $Re, N \ll 1$ , on obtient l'équation de Stokes :

$$0 = \mathbf{f}_v - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \tag{5.12}$$

Si  $Re \gg 1$ , on pose à la limite  $\eta = 0$  et on obtient l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}_v - \nabla p \tag{5.13}$$

On pose parfois

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{5.14}$$

que l'on appelle viscosité dynamique.

**Exemple 5.6** (Nombre de Froude).

On définit le nombre de Froude par

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}} \tag{5.15}$$

## 5.4 Conditions aux limites

Conditions de non glissement à la paroi :  $v_{\perp} = 0$ . De même, le liquide ne pénètre pas dans le solide, donc  $v_{\parallel} = 0$ .

Dans le cas de deux liquides, la continuité de la contrainte tangentielle impose à l'interface

$$\eta_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$p_2 - p_1 = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Si l'interface est plane  $p_1 = p_2$ .

**Exemple 5.7** (Écoulement de Couette).

La distance entre les deux plaques est  $e$  et la vitesse du cisaillement est  $V\hat{\mathbf{x}}$ .

On a les équations

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Le nombre de Reynolds est

$$Re = \frac{\rho V^2 / e}{\eta V / e^2}$$

On est dans des conditions telles que  $Re \ll 1$  et dans un régime stationnaire. Nous avons donc l'équation de Stokes (5.12), et puisque  $\nabla p = 0$ , les équations à résoudre sont

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Or  $\partial_x v_x = 0$  car le système est infini dans la direction  $x$  donc

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

et de plus on a  $v_y(0) = v_y(e) = 0$ . Finalement de

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$$

on déduit que

$$v_x = ay + b$$

et des conditions  $v_x(0) = 0$  et  $v_x(e) = V$  (non glissement), on obtient

$$v_x = \frac{yV}{e}$$

qui est associé à un temps caractéristique  $e/V$ .

La contrainte exercée sur les parois est

$$\sigma'_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{V}{e}$$

Introduisons la fonction de courant (4.18). On a

$$\psi = \frac{V}{e} \frac{y^2}{2}$$

Le débit  $Q$  par unité de longueur est alors

$$Q = \psi(e) - \psi(0) = \frac{Ve}{2}$$

Dans une cellule de Couette, on note  $e = R_2 - R_1$  l'entrefer (gap en anglais). Si  $e \ll R_1$ , on a un écoulement de Couette.

**Exemple 5.8** (Écoulement de Poiseuille).

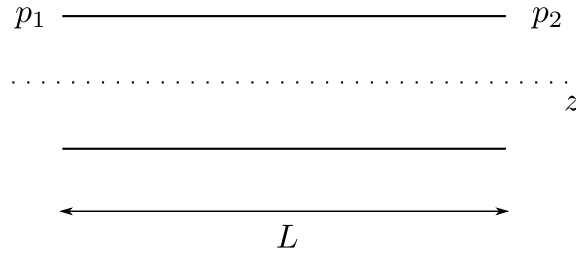


FIGURE 5.1 – Écoulement de Poiseuille.

On a un tube de rayon  $b$  et de longueur  $L \gg b$ , et comme  $p_1 > p_2$ , l'écoulement se fait vers les  $z$  positifs. On se place en coordonnées cylindriques.  $z$  est axe de symétrie donc  $v_\theta = 0$  et  $\partial_\theta = 0$ . À bas nombre de Reynolds,  $Re \ll 1$ , pour un écoulement stationnaire d'un liquide incompressible, on a

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \eta \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

et  $\partial_r p = 0$ . On a

$$\nabla p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_2 - p_1}{L} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{L} \\ \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= \nabla p \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= \frac{\nabla p}{\eta} r \\ r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{\nabla p}{\eta} \frac{r^2}{2} + a \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{\nabla p}{\eta} \frac{r}{2} + \frac{a}{r} \end{aligned}$$

$$v_z = \frac{\nabla p}{\eta} \frac{r^2}{4} + a \ln r + b$$

et les conditions initiales  $v_z(b) = 0$  et en  $r = 0$  donnent

$$v_z = \frac{\nabla p}{\eta} \frac{r^2}{4} + b$$

$a$  étant nulle car la vitesse en  $r = 0$  doit rester finie.

Le profil des vitesses est parabolique.

Le débit est

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{\nabla p}{4\eta} \int_0^b (r^2 - b^2) r dr \\ &= -\frac{\pi}{8\eta} \nabla p b^4 \end{aligned}$$

$p_1 - p_2$  est la perte de charge.

On peut généraliser cette loi aux milieux poreux, avec la loi de Darcy

$$\frac{Q}{S} = \frac{k}{2} \frac{\Delta p}{L} \quad (5.16)$$

où  $k$  est la perméabilité (elle est caractéristique de la roche). La force tangentielle qui s'exerce sur le tube est

$$F = 2\pi b L \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} = 2\pi b L$$

## 5.5 Effet Marangoni

Il s'agit d'effet hydrodynamiques dus à des gradients de tension de surface. Soient  $\gamma$  la tension de surface,  $T$  la température et  $\Gamma$  la concentration de surface, alors

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\gamma}{dT} \frac{dT}{dx} = \frac{d\gamma}{d\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx}$$

donc

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma(T_0) + b(T - T_0) \quad b < 0 \\ &= \gamma_0 \left( \frac{T - T_c}{T_c} \right)^\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{d\gamma}{dx} = \frac{\partial\gamma}{\partial\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}$$

et

$$v_x = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial\gamma}{\partial\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx} y$$

## Chapitre 6

# Conservation de l'énergie

### 6.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.1)$$

et on définit la densité d'énergie cinétique par

$$e_c = \frac{dE_c}{dV} = \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (6.2)$$

en un point fixe (Eulérien)

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

On introduit l'équation de Navier–Stokes (5.9)

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} &= -\nabla p + \nabla \underline{\underline{\sigma'}} + \rho \mathbf{f} \\ \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}\rho v^2 \right) &= \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i f_i \\ &= -\rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{v^2}{2} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma'_{ij}) + \rho v_i f_i \\ &= -\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \rho \frac{v^2}{2} + p \right) + \nabla \sigma' \mathbf{v} - \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \\ &= -\nabla \left( \mathbf{v} \left( \frac{\rho v^2}{2} + p \right) \right) + \underbrace{\left( \frac{\rho v^2}{2} + p \right)}_{=0} \nabla \mathbf{v} + \nabla \sigma' \mathbf{v} - \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \end{aligned}$$

car  $\nabla(u\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla u + u \nabla \mathbf{v}$ , et en intégrant sur un volume fixe  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{v^2}{2} d\tau &= - \underbrace{\int_{\Sigma} \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} n dS}_{\text{énergie emportée}} - \underbrace{\int_{\Sigma} p \mathbf{v} n dS}_{\text{travail des forces de pression}} \\ &+ \underbrace{\int_{\Sigma} \sigma' n \mathbf{v} dS}_{\text{travail des forces visqueuses}} - \underbrace{\int_{\Omega} \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\tau}_{\text{dissipation dans le liquide (il chauffe)}} \\ &+ \underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \mathbf{f} d\tau}_{\text{apport d'énergie par des forces extérieures}} \end{aligned}$$

## 6.2 Équation de Bernoulli

Soit un fluide incompressible, parfait ( $\eta = 0$ ), et  $\mathbf{f} = -\nabla \phi$  et on se place en régime stationnaire :

$$\begin{aligned} -\nabla \left( \frac{\rho v^2}{2} + p \right) + \rho \mathbf{v} \mathbf{f} &= 0 \\ \left( \frac{\rho v^2}{2} + p \right) \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \left( \frac{\rho v^2}{2} + p \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi &= 0 \\ \mathbf{v} \nabla \left( \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho \phi \right) &= 0 \end{aligned}$$

donc, sur une ligne de courant, on a

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho \phi = cste \quad (6.3)$$

Pour un écoulement irrotationnel, c'est à dire tel que  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , on a  $\mathbf{v} = \nabla \phi$  donc (6.3) se réécrit

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho \phi = cste \quad (6.4)$$

**Exemple 6.1** (Vidange d'un réservoir).

$$\begin{aligned} p_0 &= p_0 \frac{\rho v^2}{2} - \rho g z \\ \implies v &= \sqrt{2gz} \end{aligned}$$

## 6.3 Applications de Bernoulli

En soufflant dans un tunnel (en papier), le toit s'affaisse. Très loin du tunnel, on a  $v = 0$  donc

$$p_{\text{tunnel}} = p_0 - \frac{\rho v^2}{2}$$

Dans le cas d'une tempête, si on ouvre une porte la pression sous le toit est supérieure à celle au dessus, donc le toit s'envole.



Le phénomène de cavitation apparait par exemple pour les hélices d'un bateau : la vitesse de rotation va entraîner un avaissement de pression (et éventuellement une vaporisation du liquide).

### 6.3.1 Tube de Pitot

Les tubes de Pitot permettent de mesurer la vitesse d'un avion par rapport à l'air.

$B$  est un point d'arrêt donc  $v(B) = 0$ .  $p$  augmente dans le tube et fait augmenter la différence de hauteur  $h$ .

$$p_B - p_A = \left( p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) - p_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 > 0$$

$$\rho_L g h = \frac{1}{2} \rho v^2$$

On a  $\rho = \rho_{air}$ . Une application numérique donne

$$h = \frac{1 \times 200^2}{2 \times 10^3 \times 10} \approx 2 \text{ m}$$

pour de l'eau, et pour du mercure on aura

$$h = \frac{1 \times 200^2}{2 \times 13.6 \times 10^3 \times 10} \approx 150 \text{ mm}$$

### 6.3.2 Effet Venturi

La conservation du débit donne

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

En appliquant Bernoulli (6.3) sur une ligne de courant, on obtient :

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_A = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_B = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_C$$

avec

$$p_i = p_0 + \rho g h_i$$

donc

$$h_A = h_B + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = h_B + \frac{v_1^2}{2g} \underbrace{\left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)}_{>0}$$

d'où

$$h_A > h_B \tag{6.5}$$

### 6.3.3 Effet Coanda dans les écoulements courbes

Soit  $R$  le rayon de courbure, alors l'accélération lagrangienne est

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{dv}{dt} \mathbf{t} - \rho \frac{v^2}{R} \mathbf{n} = -\nabla p$$

On a  $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$  et

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne. On aura alors

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{t} &= \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p \cdot \mathbf{t} \\ \implies \rho v \frac{dv}{ds} &= -\frac{\partial p}{\partial s} \end{aligned}$$

Selon la direction  $\mathbf{n}$ , on trouve

$$-\rho \frac{v^2}{R} = -\mathbf{n} \cdot \nabla p = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

donc

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{R} > 0$$

donc  $p$  augmente avec  $r$ . De plus, la différence de pression s'accroît quand le rayon de courbure diminue.

On peut observer cet effet avec un sèche-cheveux et une balle de ping pong.

### 6.3.4 Écoulement bouchon (plug flow)

Soit un écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible à deux dimensions (figure 6.1). Quelles sont les forces tangentielle et orthogonale à la plaque ?

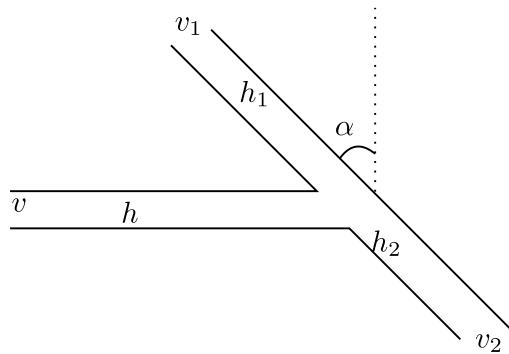


FIGURE 6.1 – Plug flow.

La conservation de la masse s'écrit

$$hv = h_1v_1 + h_2v_2 \quad (6.6)$$

et en écrivant l'équation de Bernoulli (6.3) sur les lignes de courant :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (6.7)$$

donc  $p = p_0 = p_1 = p_2$ ,  $v = v_1^2 = v_2^2$  donc  $h = h_1 + h_2$ .

La force exercée sur le plan inclinée est

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

La quantité de mouvement incidente par unité de longueur est  $mv$  (avec  $v$  constante) donc

$$\frac{dmv}{dt} = v \frac{dm}{dt} = v \frac{d}{dt}(v\rho ht) = \rho v^2 h$$

et donc

$$\begin{aligned} F_x &= \rho v_1^2 h_1 \sin \alpha - \rho v_2^2 h_2 \sin \alpha - \rho v^2 h \\ F_y &= -\rho v_1^2 h_1 \cos \alpha + \rho v_2^2 h_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} F_x &= \rho v^2 (h + (h_2 - h_1) \sin \alpha) \\ F_y &= \rho v^2 (h_1 - h_2) \cos \alpha \end{aligned}$$

Il n'y a pas de frottements visqueux donc le liquide n'entraîne pas la plaque par friction :

$$F_x \sin \alpha - F_y \cos \alpha = 0$$

donc on obtient le système

$$\begin{cases} h \sin \alpha = h_1 - h_2 \\ h = h_1 + h_2 \end{cases}$$

qui se résout en

$$\begin{cases} h_1 = \frac{h}{2}(1 + \sin \alpha) \\ h_2 = \frac{h}{2}(1 - \sin \alpha) \end{cases}$$

La force orthogonale par unité de longueur est

$$F_{\perp} = F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha = \rho v^2 h \cos \alpha$$

La force de poussée est proportionnelle à  $\rho v^2 \times \text{surface}$ . Pour  $Re \gg 1$ , on a

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 \times \text{surface} \times C_x$$

On appelle  $C_x$  le coefficient de traînée, qui dépend de la forme.

## Chapitre 7

# Écoulements potentiels. Équation de la vorticité

### 7.1 Potentiel et vorticité

On considère que le fluide est parfait, donc  $\eta = 0$ . On récrit le terme convectif sous la forme

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \quad (7.1)$$

On introduit la vorticité

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (7.2)$$

qui permet de mettre (7.1) sous la forme

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \quad (7.3)$$

Et, en supposant que  $\mathbf{f}_v = -\nabla \varphi$ , l'équation de Navier–Stokes s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \varphi \quad (7.4)$$

On a la relation

$$\oint \mathbf{v} d\boldsymbol{\ell} = \oint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{v} dS \quad (7.5)$$

ce qui signifie que le rotationnel n'est pas nul si la vitesse tourne autour d'un point.

Prenons le rotationnel de (7.4) :

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \nabla \times (\nabla v^2) = -\frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla p) - \nabla \times (\nabla \varphi)$$

et qui se simplifie en

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (7.6)$$

car  $\nabla \times (\nabla f) = 0$  quelque soit  $f$ . Cette dernière relation est l'équation de vorticité. En faisant l'analogie avec l'electromagn tisme (en stationnaire), elle ressemble à

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{c^2 \varepsilon}\end{aligned}$$

Supposons qu'à un instant  $t_0$  on ait  $\boldsymbol{\omega} = 0$  partout ( coulement irrotationnel). Alors, pour tout  $t > t_0$ , l'écoulement restera irrotationnel et sera déterminé par

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \tag{7.7a}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \tag{7.7b}$$

qui ressemblent formellement aux équations de l'electrostatique en absence de charge.

(7.7b) assure qu'il existe un potentiel  $\phi$  tel que

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \tag{7.8}$$

et alors en combinant avec l'équation (7.7a), on obtient l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{7.9}$$

## 7.2 Exemples d'écoulement potentiel

### 7.2.1  coulement uniforme

Considérons un champ des vitesses

$$\begin{cases} v_x = V = cste \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

On a de plus  $\eta = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = 0$  et  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . Calculons le potentiel à partir de (7.8) :

$$\begin{cases} \partial_x \phi = V \\ \partial_y \phi = 0 \end{cases}$$

donc

$$\phi = v_x + f(y) \tag{7.10}$$

avec  $f(y) = cste$ , que l'on prend nulle.

### 7.2.2 Un tourbillon

On a  $v = \omega r$ . La vitesse est orthoradiale.

On a  $rv(r) = cste$ , donc

$$v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{7.11}$$

avec

$$\int_C \mathbf{v} d\ell = \Gamma$$

qui est constante.

Le potentiel est

$$\phi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$$

et la fonction de courant est calculée par

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

et

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

### 7.2.3 Champ de vitesse autour d'une sphère

On peut aussi considérer le fluide comme étant au repos et la sphère en mouvement.

On a l'équation de Laplace (7.9) ainsi que les deux conditions aux limites :

– le fluide n'entre/ne sort pas dans/de la sphère, donc

$$v_r(r = a) = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial r}(r = a) = 0$$

– Loin de la sphère, on a  $v = V$  selon  $z$ , donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = V \quad r \gg a$$

Sans la sphère, on a  $\phi = Vz$ . On peut faire l'analogie avec l'électrostatique : on aurait

$$\phi_e = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi_e$$

donc

$$\begin{aligned} \phi_e &= \underbrace{-Vz}_{\text{uniforme}} + \underbrace{\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{dipolaire}} \\ &= -Vr \cos \phi + \frac{p \cos \phi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

et pour  $r = a$

$$p = -2\pi\epsilon_0 a^3 V$$

donc

$$\phi = V \cos \phi \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right)$$

et on déduit  $\mathbf{v}$  :

$$\begin{cases} v_r = V \cos \phi \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \\ v_\phi = -V \cos \phi \left( 1 - \frac{a^3}{2r^2} \right) \end{cases}$$

Nous avons choisi le dipôle car il respecte la symétrie du problème.  
La fonction de courant est donnée par

$$\frac{V \sin^2 \phi}{2} \left( r^2 - \frac{a^3}{r} \right)$$

La force de trainée est égale à l'opposé de la force qu'il faut appliquer pour maintenir le cylindre fixe. En appliquant Bernoulli :

$$p_0 = \frac{1}{2} \rho V^2 = p + \frac{1}{2} \rho v_\theta^2(r = a)$$

donc

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho V^2 - \frac{1}{2} \rho V^2 4 \sin^2 \theta$$

et la force est

$$F = \int_0^{2\pi} -pa \cos \theta d\theta = 0$$

pour des raisons de symétrie.

Maintenant le cylindre tourne :

$$\phi = V \left( r + \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

Les points d'arrêts de l'écoulement sont tels que  $v(r = a) = 0$ , donc

$$-2V \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0$$

donc

$$\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi a V}$$

et si  $\Gamma < 4\pi V a$ , il y a deux solutions, sinon, il y a un point d'arrêt pour  $\theta = \pi/2$  (car  $\sin \theta = 1$ , donc  $\cos \theta = 0$ ).

La force est maintenant

$$F = -\rho V \Gamma$$

#### 7.2.4 Monopôle

Dans ce cas la conservation du débit donne

$$Q = 2\pi r v$$

et

$$\psi = \frac{Q\theta}{2\pi}$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

### 7.2.5 Vagues (ondes de surface)

Quelle est la relation  $v(\lambda)$ ? Dimensionnellement, on trouve

$$v \approx \sqrt{g\lambda} \quad (7.12)$$

et la relation de dispersion est

$$\omega = \sqrt{gk} \quad (7.13)$$

en eau profonde.

La capillarité peut aussi servir de force de rappel, et dans ce cas

$$v \approx \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\lambda}} \quad (7.14)$$

et

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3 \quad (7.15)$$



## Chapitre 8

# Écoulements à bas nombre de Reynolds

### 8.1 Équation de Stokes

On rappelle que le nombre de Reynolds est défini par

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} \quad (8.1)$$

On définit la viscosité dynamique  $\nu$  à partir de la viscosité cinématique  $\eta$  par

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (8.2)$$

L'écoulement est considéré comme stationnaire si le rapport de la dérivée temporelle et de la force visqueuse est bas. Le nombre associé est

$$N = \frac{L^2}{\nu \tau} \quad (8.3)$$

où  $\tau$  est un temps caractéristique. Si  $N < 1$ , alors l'écoulement est stationnaire.

Ainsi, l'équation de Navier–Stokes se réduit à

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_v = 0 \quad (8.4)$$

$\mathbf{f}_v$  est équilibrée par un gradient de pression hydrostatique. On obtient donc l'équation de Stokes (5.12) :

$$\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (8.5)$$

avec  $p$  qui a été débarrassé de la pression hydrostatique.

L'équation de Stokes est caractérisée par une :

- indépendance explicite au temps ;
- réversibilité ;
- linéarité.

On peut exprimer l'équation précédente avec la vorticité :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (8.6)$$

et en écrivant

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \underbrace{\nabla(\nabla \mathbf{v})}_{=0} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (8.7)$$

et donc on a

$$\nabla p = -\eta \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (8.8)$$

et en prenant la divergence de cette expression, on obtient

$$\nabla^2 p = 0 \quad (8.9)$$

On peut aussi obtenir l'équation

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (8.10)$$

## 8.2 Formule de Stokes

On souhaite calculer la force de friction visqueuse qu'exerce sur une sphère de rayon  $R$  se déplaçant uniformément à la vitesse  $v$  dans un fluide de viscosité  $\eta$ .

On utilisera les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  dans le repère de la sphère.

Par symétrie,  $v_\theta = 0$  et  $\partial_\theta = 0$ . Le champ de pression  $p$  est une fonction harmonique. Il est donc possible de faire un développement multipolaire :

$$p = \frac{A}{r} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (8.11)$$

Il faut aussi respecter la symétrie du problème : l'axe de symétrie  $Oz$  dirigé selon  $\mathbf{v}$ .

$p \sim V$  donc

$$p = k\eta \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (8.12)$$

où  $k$  est une constante à déterminer :

$$\begin{aligned} p &= -k\eta \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{1}{r} \\ &= -k\eta \nabla \frac{\mathbf{v}}{r} \end{aligned}$$

On a de plus

$$\begin{aligned} \nabla p &= \nabla \left( -k\eta \nabla \frac{\mathbf{v}}{r} \right) \\ &= -k\eta \left( \nabla \times \left( \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{r} \right) + \nabla^2 \frac{\mathbf{v}}{r} \right) \\ &= -k\eta \left( \nabla \times \left( \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{r} \right) \right) \\ &= -\eta \nabla \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{\omega} = k \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{r} + \nabla g \quad (8.13)$$

Or on a  $\boldsymbol{\omega} = \omega_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$  avec

$$\omega_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \quad (8.14)$$

On a de plus

$$\nabla_{\theta} g = \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

donc

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = cste$$

et  $g = 0$ .

Le champ des vitesses est donné par  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . On introduit la fonction de courant  $\psi = f(r) \sin \phi$  :

$$\psi = \sin^2 \phi \left( \frac{a}{r} + br^2 + \frac{kr}{2} \right) \quad (8.15)$$

où le dernier membre est une solution particulière.

On a  $\lim_{r \rightarrow \infty} v_r, v_{\phi} = 0$  donc  $b = 0$ , et  $\lim_{\phi \rightarrow 0} v_r = v$ ,  $\lim_{\phi \rightarrow \pi/2} v_{\theta} = -v$ .

Alors

$$p = \frac{3}{2} \eta R \frac{v \cos \phi}{r^2}$$

$$\omega_{\theta} = \frac{3}{2} R \frac{v \sin \phi}{r^2}$$

et finalement

$$v_r = v \cos \phi \left( \frac{3}{2} \frac{R}{r} - \frac{R^3}{2r^3} \right)$$

$$v_{\phi} = -v \sin \phi \left( \frac{3}{4} \frac{R}{r} + \frac{R^3}{4r^3} \right)$$

La contrainte visqueuse est

$$\sigma_{r\phi} = \frac{3}{2} \eta \frac{v \sin \phi}{R} \quad (8.16)$$

La force sur la sphère est

$$F = \int_0^{\pi} d\phi \left( -\frac{3}{2} \eta \frac{\cos \phi}{R} \times \cos \phi \times 2\pi R^2 \sin \phi \right)$$

$$+ \int_0^{\pi} d\phi \left( -\frac{3}{2} \eta \frac{\sin \phi}{R} \times \sin \phi \times 2\pi R^2 \sin \phi \right)$$

$$= -6\pi \eta R v$$

**Exemple 8.1** (Vitesse de sédimentation).

La somme des forces à l'équilibre est nulle :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 g \Delta \rho - 6\pi \eta R v = 0$$

avec  $\Delta \rho = \rho_s - \rho_{\ell}$ , alors

$$v = \frac{2}{9} \frac{g \Delta \rho}{\eta} R^2 \quad (8.17)$$

**Exemple 8.2** (Limite colloïdale).

Les particules dans la solution sont aussi soumises au mouvement brownien, en plus de sédimenter. On a

$$\langle r^2 \rangle = 6Dt \quad (8.18)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion. Les deux temps caractéristiques sont

$$\begin{aligned} \tau_B &= \frac{R^2}{6D} \\ \tau_S &= \frac{R}{v_S} \end{aligned}$$

donc le mouvement brownien domine si

$$\tau_B < \tau_S \implies R < \left( \frac{k_b T}{g \Delta \rho} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 10^{-6} \text{ m}$$

où on a utilisé la relation

$$D = \frac{k_b T}{6\pi\eta R} \quad (8.19)$$

**Exemple 8.3** (Friction d'un cylindre).

On a  $\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{v}$  et

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp} &= \frac{4\pi\eta}{\ln \frac{L}{2R} + \frac{1}{2}} \\ \lambda_{\parallel} &= \frac{2\pi\eta}{\ln \frac{L}{2R} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et dans la limite  $L/2R \gg 1$  on a

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\parallel}} = 2$$

## Chapitre 9

# Couche limite

Pour une sphère en mouvement uniforme dans un fluide parfait, on était arrivé au paradoxe de d'Alembert. À bas nombre de Reynolds on avait  $\nabla^2 \omega = 0$ .

On ajoute une couche limite, à l'intérieur de laquelle on tient compte de la viscosité. En dehors, l'écoulement est potentiel et  $\omega = 0$ .

L'épaisseur augmente avec le temps :  $L = \sqrt{\nu t}$  ?

# Annexe A

## Correction du partiel

### A.1 Exercice 1 : Capillarité

1. La loi de Jurin est

$$2\pi b\gamma \cos \theta = \pi b^2 \Delta\rho gh \quad (\text{A.1})$$

et donc

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{b\Delta\rho g} \approx 1.44 \text{ m} \quad (\text{A.2})$$

La longueur capillaire est

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\Delta\rho g}} \approx 2.7 \text{ mm} \quad (\text{A.3})$$

qui est obtenue en comparant la gravité à la capillarité.

2. On a l'égalité

$$2(L + 2b)\gamma = h2bL\Delta\rho \quad (\text{A.4})$$

car le périmètre est

$$\mathcal{P} = 2(L + 2b) \quad (\text{A.5})$$

Le liquide est courbé une seule fois donc

$$R = \frac{1}{b} \quad (\text{A.6})$$

et la loi de Laplace donne

$$\frac{\gamma}{b} = \Delta\rho gh \quad (\text{A.7})$$

où le premier terme est la pression capillaire et le second la pression hydrostatique.

3. Le ménisque est beaucoup plus courbé dans une des deux directions : l'écart entre les deux plaques est  $x \tan \alpha \approx x\alpha$  (premier rayon de courbure) donc, en négligeant le second rayon de courbure, on obtient :

$$\frac{\gamma}{\alpha x} = \Delta\rho gy(x) \quad (\text{A.8})$$

ce qui donne

$$y = \frac{\gamma}{\Delta\rho g \alpha} \frac{1}{x} \quad (\text{A.9})$$

On pourrait, grâce à la dernière expression, calculer le second rayon de courbure.

## A.2 Exercice 2 : Cinématique

La fonction de courant est

$$\psi = x^2 y - \frac{y^3}{3} = cste \quad (\text{A.10})$$

et les lignes de courant sont données par

$$y(3x^2 - y^2) = cste \quad (\text{A.11})$$

Si on prend  $cste = 0$ , on a

$$y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0$$

On utilise Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (\text{A.12})$$

et on déduit que la pression est maximale en  $(0, 0)$ .

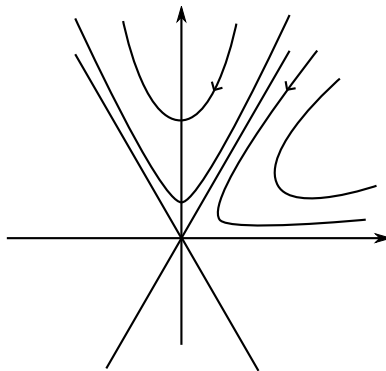


FIGURE A.1 – Lignes de courant.

## A.3 Exercice 3 : Soufflerie

1. On utilise la conservation du débit

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (\text{A.13})$$

ou encore

$$v_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2 \quad (\text{A.14})$$

2. La force qui retient la soufflerie (via les attaches) est

$$F_2 = \rho S_2 v_2 \times v_2 \quad (\text{A.15})$$

Il s'agit de l'impulsion :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_2 \quad (\text{A.16})$$

car  $v = 0$  au début et ensuite  $v_2 = cste$ . Le volume éjecté est

$$V = S_2 v_2 dt \quad (\text{A.17})$$

La force d'arrachement est

$$F = \rho S_1 v_1^2 - \rho S_2 v_2^2 - p_0 S_1 \quad (\text{A.18})$$

et en utilisant Bernoulli on a

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (\text{A.19})$$

donc

$$F = \frac{\rho v_2^2}{2} \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1} \quad (\text{A.20})$$

3. Il n'est pas possible d'utiliser Bernoulli sur une ligne de courant traversant tout le dispositif, car de l'énergie est fournie via l'hélice. Par contre, il est possible de le faire jusque juste avant l'hélice, et à partir de juste après :

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad (\text{A.21})$$

$$p' + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (\text{A.22})$$

donc

$$p' - p = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (\text{A.23})$$

et la force de poussée correspondante est

$$F = (p' - p) S_1 \quad (\text{A.24})$$

et la poussée est

$$P = \frac{1}{2} \rho v_2^2 S_1 v_1 \quad (\text{A.25})$$

## A.4 Exercice 4

Il n'est pas possible d'utiliser la poussée d'Archimède car il n'y a pas de liquide sous la sphère.

Sous la sphère, la pression est  $p_0$ . La pression en fonction de  $x$  est

$$p(x) = \rho g(H - x) \quad (\text{A.26})$$



qu'il faut intégrer. Pour ce faire, on peut utiliser un angle  $\theta$  (l'angle entre la verticale et le point de la sphère en  $x$ ) qui donne les relations

$$h + x = R(1 - \cos \theta) \quad (\text{A.27})$$

$$h + H = R(1 - \cos \theta_1) \quad (\text{A.28})$$

$$h = R(1 - \cos \theta_0) \quad (\text{A.29})$$

où  $\theta_1$  est l'angle correspond à la hauteur  $H$  et  $\theta_0$  l'angle pour  $x = 0$ .

La force est donc (en découpant la sphère en "tranches" horizontales)

$$F = \int_{\theta_0}^{\theta_1} p(x) \cos \theta \times 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \quad (\text{A.30})$$

qui donne

$$F = \begin{cases} \rho g \pi H^2 \left( R - h - \frac{H}{3} \right) & H < 2R - h \\ \rho g \pi (2R - h) \left( (2R - h) \frac{R + h}{3} - Hh \right) & H > 2R - h \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

## A.5 Exercice 5 : Dynamique

Le liquide est incompressible, donc  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . De plus  $v_y = 0$  car l'épaisseur est constante. On considère une solution stationnaire pour la même raison. Finalement les équations sont

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\rho g \sin \theta \quad (\text{A.32})$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta \quad (\text{A.33})$$

En intégrant la seconde équation on trouve

$$p = -\rho g \cos \theta (y - e) + p_0 \quad (\text{A.34})$$

Puisque  $v_x(y = 0)$  (non glissement) et

$$\eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=\ell} = 0 \quad (\text{A.35})$$

comme on a une surface libre, on obtient

$$v_x = \frac{\rho g}{2\eta} \sin \theta (2e - y)y \quad (\text{A.36})$$

et

$$Q = \frac{\rho g \sin \theta}{3\eta} e^3 \quad (\text{A.37})$$

# Index

- Contrainte, [3](#)
- Convention d'Einstein, [5](#)
- Déviateur, [23](#)
- Ecoulement
  - de Couette, [32](#)
  - de Poiseuille, [33](#)
- Equation
  - d'Euler, [31](#)
  - de Navier–Stokes, [30](#)
  - de Stokes, [31](#)
  - hydrostatique, [7](#)
- Fluide, [1](#)
  - incompressible, [22](#)
- Fonction
  - de courant, [26](#)
- Force
  - d'Archimède, [7](#)
  - surfacique, [3](#)
  - volumique, [3](#)
- Formule
  - d'Eyring, [29](#)
- Loi
  - de Darcy, [34](#)
- Modèle
  - d'Eyring, [29](#)
- Nombre
  - de Froude, [31](#)
  - de Reynolds, [31](#)
- Pression
  - capillaire, voir Pression de Laplace
  - de Laplace, [14](#)
- Rhéologie, [28](#)
- Tenseur, [5](#)
  - des taux de déformation, [21](#)
- Tension de surface, [13](#)
- Théorème
  - du gradient, [6](#)
- Vecteur
  - vorticité, [24](#)
- Viscosité
  - dynamique, [31](#)

# Table des figures

1.1	Diagramme de phase . . . . .	1
1.2	Dimensions caractéristiques dans un écoulement de Couette plan . . . . .	2
1.3	Collision de deux particules d'air : libre parcours moyen . . . . .	2
1.4	Forces surfaciques s'exerçant sur un objet quelconque . . . . .	3
1.5	Forces surfaciques s'exerçant sur un cube . . . . .	4
1.6	Triangle subissant des forces de contrainte . . . . .	4
2.1	Force de contrainte sur un cube immergé . . . . .	6
2.2	Force de contrainte sur un cube immergé (deux dimensions). . . . .	7
2.3	Poussée d'Archimède sur un corps immergé. . . . .	8
2.4	Poussée d'Archimède s'exerçant sur un corps entre deux fluides. . . . .	8
2.5	Point d'application de la poussée d'Archimède. . . . .	9
2.6	Poussée d'Archimède sur un sous-marin cylindrique. . . . .	9
2.7	Poussée d'Archimède sur un bateau. . . . .	10
2.8	Moment du bateau en fonction de l'angle de gîte. . . . .	10
2.9	Moment en fonction de l'angle de gîte pour un bateau idéal. . . . .	11
3.1	Matière condensée. . . . .	12
3.2	Gouttes. . . . .	13
3.3	Différences des tensions de surface sur un objet immergé. . . . .	14
3.4	Film de savon et capillarité. . . . .	14
3.5	Pression de Laplace. . . . .	15
3.6	Rayons de courbures d'un cylindre. . . . .	15
3.7	Cercle osculateur. . . . .	16
3.8	Caténoïde. . . . .	17
3.9	Onde capillaire. . . . .	18
3.10	Courbe de $\omega^2(k)$ pour une onde capillaire. . . . .	19
3.11	Mouillage. . . . .	19
4.1	Variation du volume d'une particule de fluide. . . . .	22
4.2	Déformation d'une particule de fluide. . . . .	23
4.3	Rotation d'une particule de fluide. . . . .	24
4.4	Écoulement orthoradial. . . . .	25
4.5	Cisaillement simple dans un écoulement de Couette : déformation + rotation. . . . .	25
4.6	Deux lignes de courant. . . . .	26
5.1	Écoulement de Poiseuille. . . . .	33

6.1 Plug flow. . . . .	39
A.1 Lignes de courant. . . . .	52

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Fluide, liquide . . . . .	1
1.2	Milieux continus . . . . .	2
1.3	Forces . . . . .	3
1.3.1	Forces volumiques . . . . .	3
1.3.2	Forces surfaciques . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Hydrostatique</b>	<b>6</b>
2.1	Un exemple . . . . .	6
2.2	Équation de l'hydrostatique . . . . .	6
2.3	Poussée d'Archimède . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Surfaces et interfaces, capillarité</b>	<b>12</b>
3.1	Tension de surface . . . . .	12
3.1.1	Modèle mécanique . . . . .	12
3.1.2	Autre représentation de la tension de surface. Formule de Laplace . . . . .	13
3.2	Rayons de courbures . . . . .	15
3.2.1	Expressions analytiques . . . . .	16
3.3	Ondes capillaires . . . . .	18
3.3.1	Relation de Young–Dupré . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Cinématique</b>	<b>21</b>
4.1	Eulérien–Lagrangien . . . . .	21
4.2	Tenseur des taux de déformation . . . . .	21
4.2.1	Partie symétrique . . . . .	22
4.2.2	Partie antisymétrique . . . . .	24
4.3	Conservation de la masse . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Dynamique des fluides</b>	<b>27</b>
5.1	Relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformation . . . . .	27
5.2	Origine physique de la viscosité . . . . .	28
5.3	Équation de Navier–Stokes . . . . .	30
5.4	Conditions aux limites . . . . .	32
5.5	Effet Marangoni . . . . .	34

<b>6</b>	<b>Conservation de l'énergie</b>	<b>36</b>
6.1	Énergie cinétique . . . . .	36
6.2	Équation de Bernoulli . . . . .	37
6.3	Applications de Bernoulli . . . . .	37
6.3.1	Tube de Pitot . . . . .	38
6.3.2	Effet Venturi . . . . .	38
6.3.3	Effet Coanda dans les écoulements courbes . . . . .	38
6.3.4	Écoulement bouchon (plug flow) . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Écoulements potentiels. Équation de la vorticité</b>	<b>41</b>
7.1	Potentiel et vorticité . . . . .	41
7.2	Exemples d'écoulement potentiel . . . . .	42
7.2.1	Écoulement uniforme . . . . .	42
7.2.2	Un tourbillon . . . . .	42
7.2.3	Champ de vitesse autour d'une sphère . . . . .	43
7.2.4	Monopôle . . . . .	44
7.2.5	Vagues (ondes de surface) . . . . .	45
<b>8</b>	<b>Écoulements à bas nombre de Reynolds</b>	<b>46</b>
8.1	Équation de Stokes . . . . .	46
8.2	Formule de Stokes . . . . .	47
<b>9</b>	<b>Couche limite</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Correction du partiel</b>	<b>51</b>
A.1	Exercice 1 : Capillarité . . . . .	51
A.2	Exercice 2 : Cinématique . . . . .	52
A.3	Exercice 3 : Soufflerie . . . . .	52
A.4	Exercice 4 . . . . .	53
A.5	Exercice 5 : Dynamique . . . . .	54
	<b>Index</b>	<b>55</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>56</b>
	<b>Table des matières</b>	<b>58</b>