Cours de Mathématiques — 3è

Harold Erbin

Contact : harold.erbin@gmail.com
Version : 29 novembre 2009

Sommaire

Première partie

Nombres et calculs

Chapitre 1

Rappels

1.1 Symboles

1.1.1 Opérateurs

$+$	addition
$-$	soustraction
$\times$	multiplication
$/$	division

Table 1.1 – Opérateurs

1.1.2 Symboles de relation

Voici un tableau des symboles de relations communs et de leur signification :

$a = b$	a est égal à b
$a \neq b$	a est différent de b
$a < b$	a est inférieur à b
$a \leq b$	a est inférieur ou égal à b
$a > b$	a est supérieur à b
$a \geq b$	a est supérieur ou égal à b

Table 1.2 – Symboles de relation

Définition 1.1. Une déclaration représente la mise en relation de deux expressions au moyen d'un des signes précédents. Elle est soit vraie, soit fausse.

Exemples :

a) La déclaration $1 < 2$ est vraie.

b) La déclaration $4 = 7$ est fausse.

1.2 Règles de calcul

1.2.1 Priorités des opérateurs

Pour calculer une expression ; il est important de respecter la *priorité des opérateurs* :

1. les parenthèses ;
2. les multiplications et divisions ;
3. les additions et soustractions.

En cas de priorité équivalente, les opérations s'exécutent de la gauche vers la droite.
Exemple :

$$\begin{aligned}
&\frac{6+3\times(7-4)\times 2}{4}\\
&=\frac{6+3\times 3\times 2}{4}\\
&=\frac{6+18}{4}\\
&=\frac{24}{4}\\
&\boxed{=6}
\end{aligned}$$

1.2.2 Simplications

Certaines règles permettent de simplifier les parenthèses :
– si une parenthèse est précédée par un signe moins $+$, on garde les mêmes signes, par exemple

$$a+(b-c+d)=a+b-c+d$$
$$x+(-y+z)=x-y+z$$

– si une parenthèse est précédée par un signe moins $-$, on inverse les signes dans la parenthèse, par exemple

$$e-(f-g+h)=e-f+g-h$$

1.3 Exercices

1.3.1 Énoncés

Exercice 1.1. * Remplacer le ... par l'un des symboles suivants =, < ou > :

a) $2 \ldots 4$
b) $11 \ldots 11$
c) $6 \ldots 5$
d) $1 \ldots 9$
e) $6{,}32 \ldots 6{,}35$
f) $-3 \ldots 2$
g) $\pi \ldots \pi$
h) $-4 \ldots -8$
i) $2{,}5 \ldots 3{,}5$
j) $|-4| \ldots 4$
k) $-5 \ldots |5|$

Exercice 1.2. * Dire si les déclarations suivantes sont vraies ou fausses :

a) $3 < 5$
b) $1 = 6$
c) $4{,}5 = 4{,}5$
d) $13 < 19$
e) $-1 \geq 3$
f) $0 > -3$
g) $6 \leq 6$

Exercice 1.3. * Écrire les phrases suivantes sous la forme d'une déclaration mathématique :

a) 3 est plus petit que 7.
b) -2 est plus grand que -5.
c) 9 est différent de 6.
d) 15 est inférieur ou égal à 20.
e) 4 est supérieur à -1.

Exercice 1.4. ** Remplacer le ... par l'un des symboles suivants =, < ou > :

a) $|-4| \ldots 4$
b) $|-3| \ldots 2$
c) $6 \ldots |-1|$
d) $-5 \ldots |5|$
e) $\left|\frac{2}{7}\right| \ldots \frac{-2}{7}$

Exercice 1.5. * Effectuer les calculs suivants :

a) $-4 + 7$
b) $-12 + 5$
c) $-3 - (-7)$
d) $2 - 7$
e) $-8 - 3$

Exercice 1.6. * Simplifier les expressions suivantes :

a) $-(+2)$
b) $-(-3)$
c) $+(-6)$
d) $+(+8)$

Exercice 1.7. * Effectuer les calculs suivants :

a) -5×-6
b) $3 \times (-4)$
c) $(-7) \times 8$
d) $(-3) \times (-2)$

Exercice 1.8. * Quel est le signe des expressions suivantes :

a) $\dfrac{(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)}{(-1)}$
b) $\dfrac{(-1) \times (-1) \times (-1)}{(-1) \times (-1)}$
c) $-3 \times 4 \times (-7) \times 8$
d) $\dfrac{2 \times (-4) \times 9}{(-3)}$

Exercice 1.9. ** Calculer les expressions suivantes :

a) $-3 \times 4 + 5 \times 2$

b) $7 \times (-2) + (-3) \times 4$

c) $2 \times 3 + 7 \times (-3)$

d) $(-4) \times (-8) + (-5) \times (-9)$

Exercice 1.10. ** Calculer les expressions suivantes :

a) $2 \times (7 - 3) + 9$

b) $(1 - 5) \times 3 - 6$

c) $-4 - 8 \times (-6 + 2)$

Exercice 1.11. *** Calculer les expressions suivantes :

a)
$$\frac{-3 \times (-7 - 2 \times (3 - 8))}{-2}$$

b)
$$\frac{(10 + 2 \times (-2)) \times 2 + 6}{3 \times -2}$$

Exercice 1.12. * Placer des parenthèses de sorte que les égalités suivantes soient vraies :

a) $2 - 4 \times 3 = -6$ b) $5 \times 2 - 4 \times 3 = 18$ c) $12 - 3 + 4 = 13$

1.3.2 Conseils

1.5 Pensez à remplacer deux signes moins $-$ qui se suivent par un signe plus $+$.

1.7 Pour déterminer le signe du résultat d'une multiplication, la règle est la suivante :
– le résultat sera positif si les deux signes identiques (ex. : $-2 \times -3 > 0$ ou encore $2 \times 3 > 0$) ;
– le résultat sera négatif si les deux signes sont différents (ex. : $-3 \times 5 < 0$).

1.8 Dans cet exercice, seul le signe est demandé (il ne faut donc surtout pas chercher à calculer la valeur de l'expression). Pour trouver le signe, il suffit d'une multiplication comportant plusieurs signes, il suffit de compter le nombre de signes moins $-$ (ou encore de chiffres négatifs), et :
– si le nombre de signes moins est pair, le résultat sera positif ;
– si le nombre de signes moins est impair, le résultat sera négatif.

1.10 Le plus simple ici est de procéder par étape, en faisant attention à l'ordre de priorité des opérateurs : d'abord les expressions entre parenthèses, puis les multiplications/divisions, et enfin les additions/soustractions.

1.3.3 Corrections

Exercice 1.1

a) $2 < 4$

b) $11 = 11$

c) $6 > 5$

d) $1 < 9$

e) $6{,}32 < 6{,}35$

f) $-3 < 2$

g) $\pi = \pi$

h) $-4 > -8$

i) $2{,}5 < 3{,}5$

j) $|-4| = 4$

k) $-5 < |5|$

Exercice 1.2

a) Vrai.
b) Faux.
c) Vrai.
d) Vrai.
e) Faux.
f) Vrai.
g) Vrai.

Exercice 1.3

a) $3 < 7$.
b) $-2 > -5$.
c) $9 \neq 6$.
d) $15 \leq 20$.
e) $4 > -1$.

Exercice 1.4

a) $|-4| = 4$
b) $-5 < |5|$

Exercice 1.5

a) $-4 + 7 = 3$
b) $-12 + 5 = -7$
c) $-3 - (-7) = 4$
d) $2 - 7 = -5$
e) $-8 - 3 = -11$

Exercice 1.6

a) $-(+2) = -2$
b) $-(-3) = 3$
c) $+(-6) = -6$
d) $+(+8) = 8$

Exercice 1.7

a) $-5 \times -6 = 30$
b) $3 \times (-4) = -12$
c) $(-7) \times 8 = -56$
d) $(-3) \times (-2) = 6$

Exercice 1.8

a) $\dfrac{(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)}{(-1)} < 0$
b) $\dfrac{(-1) \times (-1) \times (-1)}{(-1) \times (-1)} < 0$
c) $-3 \times 4 \times (-7) \times 8 > 0$
d) $\dfrac{2 \times 9 \times (-4)}{(-3)} > 0$

Exercice 1.9

a)
$$\begin{aligned} &-3 \times 4 + 5 \times 2 \\ &= -12 + 10 \\ &\boxed{= -2} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &7 \times (-2) + (-3) \times 4 \\ &= -14 - 12 \\ &\boxed{= -26} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} &2 \times 3 + 7 \times (-3) \\ &= 6 - 21 \\ &\boxed{= -15} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} &(-4) \times (-8) + (-5) \times (-9) \\ &= 24 + 45 \\ &\boxed{= 69} \end{aligned}$$

Exercice 1.10

a)

$$
\begin{aligned}
&2 \times (7-3) + 9 \\
&= 2 \times 4 + 9 \\
&= 8 + 9 \\
&\boxed{= 17}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&2(1-5) \times 3 - 6 \\
&= (-4) \times 3 - 6 \\
&= -12 - 6 \\
&\boxed{= -18}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&-4 - 8 \times (-6+2) \\
&= -4 - 8 \times (-4) \\
&= -4 + 32 \\
&\boxed{= 28}
\end{aligned}
$$

Exercice 1.11

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{-3 \times (-7 - 2 \times (3-8))}{-2} \\
&= \frac{-3 \times (-7+10)}{-2} \\
&\boxed{= -4,5}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{(10 + 2 \times (-2)) \times 2 + 6}{3 \times -2} \\
&= \frac{(10-4) \times 2 + 6}{-6} \\
&= \frac{18}{-6} \\
&\boxed{= -3}
\end{aligned}
$$

Chapitre 2

Ensembles

2.1 Définitions

Définition 2.1. Un *ensemble* est une liste non ordonnée et sans répétitions d'objets. Ces objets sont appelés *éléments* de l'ensemble.
On note les éléments d'un ensemble entre accolades.

Remarques :

1. « non ordonnée » signifie que l'on a $\{a, b\} = \{b, a\}$;
2. « sans répétitions » signifie que l'on a $\{a, a\} = \{a\}$.

Exemples :

a) L'ensemble des jours de la semaine est

$$\{\text{lundi}, \text{mardi}, \text{mercredi}, \text{jeudi}, \text{vendredi}, \text{samedi}, \text{dimanche}\}$$

b) Voici un ensemble de nombres : $\{3, 1, 7, -4\}$.

Définition 2.2. Si a est un élément de E, alors on dit que a appartient à E et on note $a \in E$. Dans le cas contraire, on dit que a n'appartient pas à E et on note $a \notin E$.

Remarque : On peut dire que E possède (respectivement ne possède pas) a, et on notera $E \ni a$ (resp. $E \not\ni a$).

Proposition 2.1. Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments, c'est à dire

$$x \in E \Longleftrightarrow x \in F$$

On notera $E = F$.

Remarque : On définira, pour chaque ensemble E, une version étoilée E^* : cela revient simplement à retirer 0 de cet ensemble.

Proposition 2.2. Tout ensemble E est stable par addition et multiplication par un nombre positif. C'est à dire

1. $a, b \in E \Longrightarrow a + b \in E$
2. $a \in E, n > 0 \Longrightarrow n \times a \in E$

2.2 Ensembles courants

Définition 2.3. L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, correspond à l'ensemble des nombres entiers positifs. On a donc

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}} \tag{2.1}$$

Définition 2.4. L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, correspond à l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs. On a donc

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}} \tag{2.2}$$

Définition 2.5. L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, correspond à l'ensemble des nombres qui sont le quotient de deux entiers, c'est à dire

$$\boxed{Q = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}} \tag{2.3}$$

Remarque : En base 10, le nombre de chiffres après la virgule est fini ou, s'il est infini, périodique.
Exemples :

a) $\dfrac{1}{2} = 0,5 \in \mathbb{Q}$

b) $\dfrac{1}{3} = 0,33\underline{3} \cdots \in \mathbb{Q}$

Mais certains nombres ne peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux réels.
Exemples :

a) $\sqrt{2} \simeq 1,4142136\dots$

b) $\pi \simeq 3,14159\dots$

Définition 2.6. L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, correspond à l'ensemble des nombres ayant une représentation décimale finie ou infinie.

Remarque : On parle aussi de corps des réels pour désigner $\mathbb{R}$. C'est d'ailleurs cette dénomination qui sera choisie dans la suite.

Définition 2.7. L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres réels mais non rationnels, c'est à dire

$$\boxed{\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}} \tag{2.4}$$

Proposition 2.3. On a

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}} \tag{2.5}$$

2.3 Les rationnels

Définition 2.8. On appelle inverse de a le nombre qui vaut $\frac{1}{a}$.
On le note aussi a^{-1}.

Exemples :

1. $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ est l'inverse de 3.
2. De la même manière, 4 est l'inverse de $\frac{1}{4}$, car
$$\frac{1}{1/4} = 4$$

Proposition 2.4. Diviser a par b revient à multiplier a par l'inverse de b, c'est à dire
$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} = a \times b^{-1} \tag{2.6}$$
Exemple :
$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = 2 \times 3^{-1}$$

Définition 2.9. On définit l'opposé de a comme étant $-a$.

2.4 Les réels

On définit deux opérations dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:
– l'addition $+$;
– la multiplication $\times$.

Proposition 2.5. Soit $*$ une opération[1] dans l'ensemble $\mathbb{R}$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. stabilité :
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \boxed{a * b \in \mathbb{R}} \tag{2.7}$$
2. commutativité :
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \boxed{a * b = b * a} \tag{2.8}$$
3. associativité :
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \qquad \boxed{(a * b) * c = a * (b * c)} \tag{2.9}$$

$*$ admet un élément neutre, noté e, tel que
$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \boxed{a * e = e * a = a} \tag{2.10}$$

Remarques :

1. Pour l'addition, $e = 0$ car $a + 0 = 0 + a = a$.
2. Pour la multiplication, $e = 1$ car $a \times 1 = 1 \times a = a$.

Exemples :

1. C'est à dire que $*$ peut désigner soit l'addition, soit la multiplication.

a) $3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$ b) $4 + 0 = 0 + 4 = 4$

Remarque : On étend de plus les notions d'inverse et d'opposé étudiées dans $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$:
– on définit l'opposé de a par $-a$. On a $a + (-a) = 0$.
– on définit l'inverse, noté a^{-1} par :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

et on a

$$a \times a^{-1} = 1$$

Proposition 2.6. La multiplication est distributive sur l'addition, c'est à dire

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \qquad \boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c} \tag{2.11}$$

Définition 2.10. La valeur absolue représente la distance d'un nombre à l'origine.
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors sa valeur absolue est notée $|x|$ et on a $|x| \geq 0$.

Remarque : Si $x < 0$, alors on a $|x| = -x$ (d'une certaine manière, il "suffit" de retirer le signe moins).
Exemples :

a) $|4| = 4$
b) $|-9| = 9$
c) $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$
d) $|\pi| = \pi$

Proposition 2.7. On a les relations suivantes
– $|a \times b| = |a| \times |b|$
– $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Remarque : Par contre, $|a + b| \neq |a| + |b|$. Il s'agit d'une erreur fréquente, à laquelle il faut faire attention [2].

2. En réalité, nous avons la relation $|a+b| \leq |a|+|b|$. Elle est appelée *inégalité triangulaire*.

2.5 Exercices

2.5.1 Énoncés

Exercice 2.1. * Transformer les nombres suivants en fractions irréductibles :

a) 3,5 b) 0,7 c) $-1{,}2$ d) 2,3 e) 12,6

Exercice 2.2. * Remplacer ... par $\in$ ou $\notin$:

a) $3{,}4 \ldots \mathbb{N}$
b) $0 \ldots \mathbb{Q}$
c) $-2{,}9 \ldots \mathbb{Z}$
d) $1 \ldots \mathbb{R}$
e) $\pi \ldots \mathbb{R}$
f) $\dfrac{1}{7} \ldots \mathbb{Q}$
g) $\dfrac{-6}{3} \ldots \mathbb{Z}$
h) $\sqrt{25} \ldots \mathbb{N}$

Exercice 2.3. ** Trouver cinq nombres irrationnels.

Exercice 2.4. *
– Quel est l'inverse de $1/3$?
– Quel est l'opposé de l'inverse de -4 ?
– Quel est le carré de l'inverse de $1/2$?

2.5.2 Conseils

2.5.3 Corrections

Chapitre 3

Écritures littérales

3.1 Calcul littéral

3.1.1 Rappels

Définition 3.1. Le *calcul littéral* consiste à utiliser des lettres pour symboliser un nombre arbitraire (c'est à dire dont l'on ne connait pas la valeur).

Remarque : on choisit souvent la lettre x pour désigner le nombre inconnu.

Proposition 3.1. Il est possible d'additionner et soustraire normalement les lettres identiques, comme s'il s'agissait de nombres "normaux".

Exemples :

a) $2x + 4x = 6x$

b) $5x - 3x = 2x$

c) $x - 8x = -7x$

d) $2y + 4x - 5y + 7x = 11x - 3y$

3.2 Puissances

3.2.1 Propriétés

Définition 3.2. x puissance n (avec n un nombre relatif) correspond au nombre noté x^n. Il vaut x multiplié par lui-même n fois, c'est à dire

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}} \tag{3.1}$$

Remarques :

1. La deuxième puissance d'un nombre s'appelle le *carré*.
2. La troisième puissance d'un nombre s'appelle le *cube*.

Exemples :

a) $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
b) $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
c) $(-2)^5 = -2 \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$
d) $10^{132} = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{132 \text{ fois}}$

Proposition 3.2. Soit x et y deux nombres (avec y non nul), et n, m deux entiers relatifs. Alors on a les propriétés suivantes

$$\boxed{\begin{gathered} x^0 = 1 \\ x^n \times x^m = x^{n+m} \\ \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \\ (x^n)^m = x^{n \times m} \\ (x \times y)^n = x^n \times y^n \\ \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \end{gathered}} \tag{3.2}$$

Remarques :

1. Attention : il ne faut **surtout** pas écrire 0^0 : cela n'a aucun sens.
2. Dans la deuxième formule, si $n = 0$, alors on obtient la formule extrêmement pratique
$$\boxed{x^n = \frac{1}{x^{-n}}}$$

Exemples :

a) $3^2 + 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
c) $(7^4)^6 = 7^{4\times 6} = 7^{24}$
d) $3^0 = 1$
e) $3^{-1} = \frac{1}{3}$
f) $\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25$
g) $\pi^0 = 1$
h) $(3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2$

3.2.2 Puissances de 10

On remarque que :
– $10^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}}$
– $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{0\ldots01}_{n \text{ chiffres}}$

3.3 Monômes et polynômes

3.3.1 Monômes

Introduction

Définition 3.3 (Monôme)**.** Un *monôme* est une expression s'exprimant sous la forme d'un produit d'inconnues, chacune élevée à une puissance positive quelconque, multipliée par un nombre réel quelconque.

Exemple : Voici une liste d'exemples de monômes :

a) 12 b) $-3z^2$ c) x d) $-xy^3$ e) $\frac{1}{2}a^2bc^5$

12 est bien un monôme, car il peut être vu comme un nombre multiplié par un nombre quelconque d'inconnues à la puissance zéro : $12x^0 = 12 \times 1 = 12$.

Remarque : Les expressions du type $\frac{1}{x^a}$ ne sont pas des monômes, car la puissance de x est négative.

Définition 3.4. Le nombre devant le monôme s'appelle le *coefficient*. Le produit des variables est la *partie littérale*.

Exemple : Prenons le monôme $-xy^3$. Alors le coefficient est -1 et la partie littérale est xy^3.

Définition 3.5. Le *degré* d'un monôme est la somme des puissances des inconnues.

Remarque : Soit P un monôme. Alors on notera son degré $\deg P$.
Exemple : Le degré de $3a^2bc^3$ est $2 + 1 + 3 = 6$.

Opérations

Méthode 3.1 (Multiplier deux monômes)**.**

Multiplier les coefficients entre eux.

Multiplier les parties littérales entre elles.

Simplifier les puissances.

Exemple :

$$\begin{aligned}(3a^2b^3) \times (-2a^4b) &= (-2 \times 3)(a^2b^2 \times a^4b)\\ &= -6(a^2a^4)(b^3b)\\ &\boxed{= -6a^6b^3}\end{aligned}$$

Définition 3.6. Deux monômes sont dits semblables s'ils ont la même partie littérale.

Proposition 3.3. Il est possible d'additionner uniquement des monômes semblables.

Remarque : En réalité, cela revient à factoriser la partie littérale, et à additionner les coefficients.
Exemple :

$$5x^2y - 3x^2y = x^2y(5-3) \boxed{= 2x^2y}$$

Pour élever un monôme à une puissance, il suffit d'élever chacun de ses termes à cette puissance.
Exemple :

$$(2xy^2)^3 = 2^3x^3(y^2)^3 \boxed{= 8x^3y^6}$$

Pour écrire le quotient de deux monômes, l'on procédera de la même manière que pour la multiplication.
Remarques :

1. Le quotient de deux monômes n'est pas forcément un monôme.
2. Si l'on remplace une variable par une valeur, il faut prendre garde à ce que le dénominateur reste différent de zéro.

Exemple :

$$\frac{4xy}{2xy^2} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{x} \times \cancel{y}}{\cancel{2} \times \cancel{x} \times \cancel{y} \times y} \boxed{= \frac{2}{y}}$$

qui n'est pas un monôme. De plus, y doit forcément être différent de zéro.

Réduire consiste à simplifier au maximum un monôme, en regroupant les puissances identiques (par exemple $a^2 \times a = a^3$) ou en additionnant les monômes semblables. L'on a fini de réduire un monôme lorsque l'on a obtenu l'écriture la plus simple possible.
Exemple :

$$4 \times x \times x + 3x^2 - 2x^2 = 4x^2 + 3x^2 - 2x^2 = x^2(4+3-2) \boxed{= 5x^2}$$

3.3.2 Polynômes

Définition 3.7 (Polynôme)**.** Un polynôme est une somme de monômes qui ne sont pas semblables.

Exemples : Voici une liste de polynômes :

a) $x^2 + 3x + 5$ b) $-5xy + 3x - 4$ c) $4xy$

Définition 3.8. On appelle *monôme dominant* le monôme de plus haut degré.

Définition 3.9. On appelle *coefficient dominant* le coefficient du monôme dominant.

Méthode 3.2 (Addition de deux polynômes)**.**
Regrouper ensemble les monômes semblables.
Réduire les monômes semblables avec les règles ci-dessus.

Exemple :

$$\begin{aligned}(x^2+4x-5)+(-2x+2) &= x^2+(4x-2x)+(-5+2)\\ &\boxed{=x^2+2x-3}\end{aligned}$$

Méthode 3.3 (Multiplication de deux polynômes)**.**
On développe le produit en utilisant la distributivité de la multiplication.
On regroupe les monômes semblables et on les simplifie.

Exemple :

$$\begin{aligned}(2x+3)(-x^2+6x+3) &= 2x(-x^2+6x+3)+3(-x^2+6x+3)\\ &= -2x^3+12x^2+6x-3x^2+18x+9\\ &= -2x^3+(12x^2-3x^2)+(6x+18x)+9\\ &\boxed{=-2x^3+9x^2+24x+9}\end{aligned}$$

3.4 Identités remarquables

3.4.1 Définitions

Proposition 3.4. Les identités remarquables permettent de calculer plus rapidement. Elles sont au nombre de trois :

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab\\ (a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}} \tag{3.3}$$

Démonstration.

1. On a

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a\times a+a\times b+b\times a+b\times b\end{aligned}$$

   en distribuant les termes, et l'on obtient, en les regroupant :

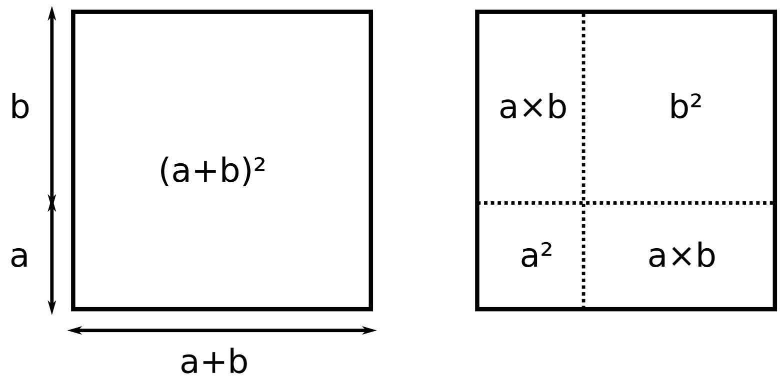
$$\begin{aligned}a\times a+a\times b+b\times a+b\times b &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+b^2+2ab\end{aligned}$$

2. De même, on montre
$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a\times a + a\times(-b) - b\times a + (-b)\times(-b)\\ &= a^2+b^2-2ab\end{aligned}$$
3. Enfin, l'on procède d'une manière similaire pour la troisième identité
$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ba-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

□

Remarque : On peut aussi prouver ces formules par une approche géométrique (figure 3.1).

Figure 3.1 – Identité remarquable — approche géométrique



Exemples :
1. $(x+3)^2 = x^2+6x+9$
2. $(2x-5)^2 = 4x^2-20x+25$
3. $(x+5)(x-5) = x^2-25$
4. $(11-4x)^2 = 16x^2-88x+121$

Au début, l'on peut continuer à développer le carré comme s'il s'agissait d'un produit "classique", si l'on a encore du mal avec la formule. Mais très vite il faudra apprendre à appliquer directement les identités remarquables.
Il peut être aussi intéressant de procéder dans l'autre sens (à savoir transformer la somme en un produit) : cela pourra permettre de factoriser notre expression (nous verrons cela par la suite).
Exemples :
1. $x^2-8x+16 = (x-4)^2$
2. $4x^2-9 = (2x+3)(2x-3)$

Il est très important de s'entrainer à reconnaitre ces identités, car elles permettent de simplifier grandement les calculs.

3.4.2 Applications

Dans cette section nous ne verrons aucune définition, juste des exemples un peu plus complets.
Exemples :

a)

$$\begin{aligned}&(2x-3)-(x+4)^2\\&=2x-3-(x^2+16+8x)\\&=2x-3-x^2-16-8x\\&\boxed{=-x^2-6x-19}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&(5x-1)(7+x)+(x-3)(x+3)\\&=(35x+5x^2-7-x)+(x^2-9)\\&=34x+5x^2-7+x^2-9\\&\boxed{=6x^2+34x-16}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&(4x-3)^2+(3x+5)^2\\&=(16x^2-24x+9)+(9x^2+30x+25)\\&\boxed{=25x^2+6x+34}\end{aligned}$$

Il est aussi possible d'utiliser les identités remarquables pour calculer certains nombres avec aisance, par exemple des carrés ou bien certains produits.
Exemples :

a) $13^2=(10+3)^2=10^2+3^2+2\times3\times10=100+9+60\boxed{=169}$

b) $27^2=(20+7)^2=20^2+7^2+2\times7\times20=400+49+280\boxed{=729}$

c) $98^2=(100-2)^2=100^2+2^2-2\times2\times100=9604$

d) $33\times27=(30-3)\times(30+3)=30^2-3^2=891$

3.5 Factorisation et développement

3.5.1 Développement

Définition 3.10. Développer consiste à transformer un produit en somme. Pour cela, on utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition, c'est à dire

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c \tag{3.4}$$

où a,b,c sont trois nombres.

3.5.2 Factorisation

La factorisation consiste à faire l'inverse du développement.

Définition 3.11. Factoriser revient à déterminer un facteur commun à deux expressions, afin de transformer une somme en multiplication. Cela revient à écrire

$$\boxed{a \times b + a \times c = a \times (b + c)} \tag{3.5}$$

On dit que a est le facteur commun.

Exemples :

a) $at + bt = t(a + b)$
b) $5x + 5y = 5(x + y)$
c) $4x + 6y = 2(2x + 3y)$ car $4x = 2 \times (2x)$ et $6y = 2 \times (3y)$
d) $ab - a^2 = a(b - a)$
e) $36x - 12 = 6(6x - 2)$
f) $ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b)$

Jusqu'ici, nous nous sommes contentés de factoriser par seulement un nombre, ou une lettre. Or il existe des situations plus complexes où l'on peut être amené une expression de la forme (nombre + lettre × nombre). Il est très important de comprendre les exemples qui suivent.
Exemples :

a)

$$\begin{aligned}
&(x + 2)(2x - 3) + (6 - 5x)(x + 2) \\
&= (x + 2) \times \Big((2x - 3) + (6x - 5)\Big) \\
&= (x + 2)(8x - 8) \\
&\boxed{= 8(x + 2)(x - 1)}
\end{aligned}$$

Pour passer de l'avant-dernière à la dernière étape, nous avons simplement mis en facteur le 8 qui est apparu.

b)

$$\begin{aligned}
&(2x + 5)^2 - (2x + 5)(3x - 1) \\
&= (2x + 5)\Big((2x + 5) - (3x - 1)\Big) \\
&\boxed{= (2x + 5)(-x + 6)}
\end{aligned}$$

Nous voyons dans cet exemple l'intérêt des identités remarquables : imaginons que l'énoncé demandât de factoriser l'expression $(4x^2 + 20x + 25) - (2x+5)(3x-1)$. Il est probable que nous aurions mis beaucoup de temps, si nous ne voyions pas l'identité remarquable. En l'utilisant, nous retombons sur la forme précédente $((2x + 5)^2 - (2x + 5)(3x - 1))$ et pouvons ainsi facilement factoriser.

---

c)

$$\begin{aligned}&6(2x+1)-(2x+1)^2\\&=(2x+1)\Big(6-(2x+1)\Big)\\&\boxed{=(2x+1)(-2x+5)}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}&x^2+6x+(x+3)(7x+2)+9\\&=(x^2+2\times 3x+3^2)+(x+3)(7x+2)\\&=(x+3)^2+(x+3)(7x+2)\\&=(x+3)(x+3+7x+2)\\&\boxed{=(x+3)(8x+5)}\end{aligned}$$

Nous utilisons ici "l'astuce" décrite dans la deuxième question : nous remarquons que x^2+6x+9 est une identité remarquable. Après l'avoir mise sous la forme d'un carré, nous découvrons un facteur commun aux deux expressions.

e)

$$\begin{aligned}&4x^2-25+(2x+5)(x+1)\\&=(2x+5)(2x-5)+(2x+5)(x+1)\\&=(2x+5)(2x-5+x+1)\\&\boxed{=(2x+5)(3x-4)}\end{aligned}$$

Nous utilisons encore une fois une identité remarquable pour faire apparaitre un facteur commun.

3.6 Fractions rationnelles

Définition 3.12. Une fraction rationnelle est un quotient de polynômes.

Méthode 3.4 (Simplifier une fraction rationnelle)**.**

1. Factoriser le numérateur et le dénominateur.
2. Simplifier les facteurs communs.

Exemples :

a)

$$\frac{10x^3y^2}{6x^2y^4}=\frac{\cancel{2}\times 5\times \cancel{x}\times \cancel{x}\times x\times \cancel{y}\times \cancel{y}}{\cancel{2}\times 3\times \cancel{x}\times \cancel{x}\times \cancel{y}\times \cancel{y}\times y\times y}=\frac{5x}{3y^2}$$

b)

$$\frac{2(x^2+3x)}{x}=\frac{2\cancel{x}(x+3)}{\cancel{x}}=2(x+3)$$

c)

$$\frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b$$

d)

$$\frac{2(x-y)}{y-x} = -\frac{2(y-x)}{y-x} = -2$$

Méthode 3.5 (Multiplication de fractions rationnelles)**.**

1. Factoriser les numérateurs et dénominateurs.
2. Multiplier les numérateurs.
3. Multiplier les dénominateurs.
4. Simplifier les facteurs communs.

Méthode 3.6 (Division de fractions rationnelles)**.**

1. Multiplier la fraction dividende par l'inverse de la fraction diviseur.
2. Appliquer la méthode précédente (3.5).

Proposition 3.5. Deux fractions sont égales si l'on obtient l'une en multipliant le numérateur et le dénominateur de l'autre par un même polynôme.

Démonstration.
Cette proposition découle directement du fait que

$$a \times a^{-1} = 1$$

que a soit un nombre ou un polynôme. □

Exemple : Soit $\frac{x^2-4}{2(x-2)}$ et $\frac{x+2}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{2} &= \frac{x+2}{2} \times \frac{x-2}{x-2}\\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)}\\ &= \frac{x^2-4}{2(x-2)}\end{aligned}$$

donc les deux fractions sont égales.

Soient deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. Alors leur dénominateur est différent. Toutefois, dans de nombreux cas, il peut être utile de se ramener à un dénominateur commun (par exemple pour additionner les deux fractions). Ici, le plus petit dénominateur commun est $b \times d$. On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \times \frac{d}{d} = \frac{ad}{bd}\\ \frac{c}{d} &= \frac{c}{d} \times \frac{b}{b} = \frac{bc}{bd}\end{aligned}$$

Exemples : Soient $\dfrac{3x+1}{2x}$ et $\dfrac{4}{x^2}$. Alors on a

$$\frac{3x+1}{2x} = \frac{(3x+1)\times x}{2x \times x} = \frac{3x^2+x}{2x^2}$$
$$\frac{4}{x^2} = \frac{4\times 2}{x^2\times 2} = \frac{8}{2x^2}$$

On a alors mis $\dfrac{3x+1}{2x}$ et $\dfrac{4}{x^2}$ au même dénominateur.

Méthode 3.7 (Trouver le dénominateur commun de deux fractions rationnelles)**.**

1. Factoriser les dénominateurs.
2. Trouver le plus petit commun multiple des deux dénominateurs.
3. Multiplier dénominateur **et** numérateur par les mêmes polynômes pour obtenir ce plus petit commun multiple à chaque dénominateur.

Méthode 3.8 (Addition et soustraction de fractions rationnelles)**.**

1. Simplifier les fractions.
2. Chercher un dénominateur commun.
3. Mettre les fractions au même dénominateur.
4. Additionner (soustraire) les numérateurs.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{20}{4(x+1)} + \frac{2x^2-18}{(x+3)^2} &= \frac{4\times 5}{4(x+1)} + \frac{2(x^2-9)}{(x+3)^2} \\
&= \frac{5}{x+1} + \frac{2(x+3)(x-3)}{(x+3)^2} \\
&= \frac{5}{x+1} + \frac{2(x-3)}{x+3} \\
&= \frac{5}{x+1}\times\frac{x+3}{x+3} + \frac{2(x-3)}{x+3}\times\frac{x+1}{x+1} \\
&= \frac{5(x+3)}{(x+1)(x+3)} + \frac{2(x-3)(x+1)}{(x+1)(x+3)} \\
&= \frac{5(x+3)+2(x-3)(x+1)}{(x+1)(x+3)} \\
&= \frac{5x+15+2(x^2+x-3x-3)}{(x+1)(x+3)} \\
&\boxed{= \frac{2x^2+3x+12}{(x+1)(x+3)}}
\end{aligned}$$

3.7 Exercices

3.7.1 Énoncés

Exercice 3.1. * Calculer :

a) $$\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

b) $$\left(\frac{4}{8}\right)^2$$

c) $$\left(\frac{-3}{7}\right)^4$$

Exercice 3.2. * Simplifier les notations en utilisant des puissances :

a) $3^2 \times 3 \times 3^7$ b) $(5^4 \times 5^2)^3$ c) $\left((4^2)^6 \times 7^5\right)^3$

Exercice 3.3. * Simplifier les notations en utilisant des puissances :

a) $$\frac{5^4 \times 5 \times 5^3}{5^2 \times 5^9}$$

b) $$\frac{(3^4)^5}{3^8 \times 3^3}$$

Exercice 3.4. ** Compléter le tableau

	Inverse	Opposé	Double	Carré
$2x$				$4x^2$
	$-1/3$			
				$25/36$
			$5/7$	
		4		

3.7.2 Conseils

3.7.3 Corrections

Chapitre 4

Nombres entiers, relatifs et rationnels

4.1 Nombres entiers

4.1.1 Nombres premiers

Définition 4.1. Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts, entiers et positifs. Il s'agit alors de 1 et de lui-même.

Définition 4.2. Un nombre composé est un entier non nul qui est le produit de deux ou plus nombres premiers.

Remarque : Selon cette définition, 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur (lui-même). 0 n'en est pas un non plus.
Exemples :

a) 5 est un nombre premier car il ne peut être divisé que par 5 et par 1.

b) 14 n'est pas un nombre premier car ses diviseurs sont : 1, 2, 7 et 14 (car $14 = 2 \times 7$). Il s'agit donc d'un nombre composé.

Définition 4.3. La décomposition en nombres premiers consiste à écrire un nombre sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples :

a) $15 = 3 \times 5$

b) $24 = 4 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

c) $9 = 3 \times 3 = 3^2$

d) $46 = 2 \times 23$

e) $99 = 11 \times 9 = 3^2 \times 11$

Remarque : Il est primordial de savoir décomposer rapidement un nombre en ses facteurs premiers : cela est utiliser à de nombreuses occasions, surtout lors de la simplication de fractions.

4.1.2 Diviseurs communs

Définition 4.4. On dit que c est un *diviseur commun* à a et b si c divise à la fois a et b.

Remarque : Il est possible d'utiliser la décomposition en facteurs premiers de deux nombres afin de repérer les diviseurs communs.
Exemples : 2, 5 et 10 sont les seuls diviseurs communs à 20 et 30.

Définition 4.5. On appelle *plus grand commun diviseur* (abrégé PGCD) de a et b le plus grand nombre qui divise à la fois a et b.

Exemples : 10 est le plus grand diviseur commun à 20 et 30 (car $20/10 = 2$ et $30/10 = 3$, qui sont premiers entre eux).

Définition 4.6. On dit que deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun diviseur commun.

Théorème 4.1 (Algorithme d'Euclide)**.** L'algorithme d'Euclide permet de trouver le PGCD de deux nombres. Soit deux nombres a et b (avec $a < b$), alors l'algorithme est défini comme suit

$$\begin{aligned} b &= a \times q_1 + r_1 \\ a &= r_1 \times q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \times q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \times q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n \times q_{n+1} + 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Alors r_n est le PGCD de a et b.
En fait, à chaque étape, nous effectuons la division euclidienne du diviseur de l'étape précédente par le reste de l'étape précédente, en commençant par b et a. Puis nous nous arrêtons dès que le reste de la division euclidienne vaut 0.

Remarque : La décomposition en facteurs premiers est une méthode plus rapide et moins mécanique que l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de deux nombres.
Exemple : Cherchons le PGCD de 42 et 315.

1. Effectuons la division euclidienne de 315 par 42. Nous avons
$$315 = 42 \times 7 + 21$$
2. Effectuons maintenant la division euclidienne de 42 par 21. Nous avons
$$42 = 21 \times 2 + 0$$

Ainsi, le PGCD de 42 et 315 est 21.

Exemple : 21 et 16 sont premiers entre eux car ils ne possèdent aucun diviseur commun : on a $16 = 2^4$ et $21 = 3 \times 7$.

4.2 Fractions

4.2.1 Rappels

Définition 4.7. On appelle *quotient* (ou *fraction*) de a par b, noté $\frac{a}{b}$ le nombre qui, multiplié par b, vaut a.

Exemple : $\frac{2}{5}$ est le quotient de 2 par 5, car $\frac{2}{\cancel{5}} \times \cancel{5} = 2$

Remarque : On peut aussi utiliser l'opérateur / plutôt que la barre de fraction, mais la lisibilité est alors réduite.
Exemple : $\frac{1}{4} = 1/4$

Définition 4.8. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction, avec a et b deux nombres, avec $b \neq 0$. Alors a est le *numérateur* et b le *dénominateur* du quotient.

Proposition 4.1. Un quotient ne change pas lorsque l'on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre, c'est à dire

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}} \tag{4.2}$$

Exemples :

a)
$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$$

b)
$$\frac{12}{15} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{4}{5}$$

4.2.2 Fraction irréductible

Définition 4.9. Une fraction est dite irréductible lorsqu'elle ne peut plus être simplifiée, c'est à dire que le numérateur et le dénominateur n'ont plus aucun facteur commun.

Exemples :

a)
$$\frac{25}{15} = \frac{5 \times \cancel{5}}{3 \times \cancel{5}} = \frac{5}{3}$$

b)
$$\frac{70}{84} = \frac{5 \times \cancel{7} \times \cancel{2}}{2^{\cancel{2}} \times 3 \times \cancel{7}} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

4.2.3 Calculs avec les fractions

Proposition 4.2. Pour additionner (respectivement soustraire) deux fractions, il est nécessaire que leur dénominateur soit identique. À ce moment-là, il suffira d'additionner (respectivement soustraire) les numérateurs, c'est à dire

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}} \tag{4.3}$$

où a, b et c et d sont trois nombres quelconques, avec $c \neq 0$.
Lorsque les dénominateurs sont différents, nous utiliserons la propriété 4.1 afin de les rendre égaux, en recherchant le plus petit multiplicateur commun.

Exemples :

a)

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

b)

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7}$$

c)

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6+5}{8} = \frac{11}{8}$$

d)

$$\frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} - \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{10}{6} - \frac{3}{6} = \frac{10-3}{6} = \frac{7}{6}$$

Nous voyons que nous avons dû, dans les deux derniers exemples, changer les dénominateurs pour les rendre égaux. Mais afin de conserver l'égalité des des fractions, nous avons multiplié le numérateur de la même manière.

Proposition 4.3. Pour multiplier deux fractions entre elles, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, c'est à dire

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}} \tag{4.4}$$

où a, b, c et d sont quatre nombres quelconques, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Exemple :

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Proposition 4.4. Diviser deux fractions entre elles revient à multiplier la première par l'inverse de la seconde.

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}} \tag{4.5}$$

où a, b, c et d sont quatre nombres quelconques, avec $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Exemple :

$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$$

4.3 Radicaux

Définition 4.10. Soit a un nombre positif. Alors on appelle *racine carrée* (ou simplement racine) de a, notée $\sqrt{a}$, le nombre qui, élevé au carré, vaut a. C'est à dire

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a} \tag{4.6}$$

Remarques :

1. On a les égalités $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$.
2. La racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie. Il est **hors de question** d'écrire quelque chose comme $\sqrt{-2}$. Ceci est dû au fait que $a^2 > 0$, quelque soit a. Or si $a = -2$, on a $a^2 = (\sqrt{-2})^2 = -2 < 0$, ce qui est impossible.

Exemples :

a) $\sqrt{2}$ est la racine de 2.

b) 3 est la racine de 9, car $3^2 = 9$.

c) $\sqrt{100} = 10$

d) $\sqrt{36} = 6$

Proposition 4.5. Soient a et b deux nombres (avec b non nul). Alors on a les propriétés suivantes

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{array}} \tag{4.7}$$

Ces propriétés peuvent permettre de factoriser une expression composée de racines.
Exemples :

a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{400} = \sqrt{100} \times \sqrt{4} = 10\sqrt{4}$

c)

$$\begin{aligned} &\sqrt{8} + 4\sqrt{2} \\ &= \sqrt{(4 \times 2)} + 4\sqrt{2} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}(2 + 4) \\ &\boxed{= 6\sqrt{2}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{28} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{63} \\
&= \sqrt{4 \times 7} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{9 \times 7} \\
&= 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 2 \times 3\sqrt{7} \\
&= -\sqrt{7} + 6\sqrt{7} \\
&\boxed{= 5\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

Attention :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

4.4 Exercices

4.4.1 Énoncés

Exercice 4.1. * Simplifier les fractions suivantes :

a) $\dfrac{3}{15}$ c) $\dfrac{11}{15}$ e) $\dfrac{1}{7}$ g) $\dfrac{26}{28}$

b) $\dfrac{24}{72}$ d) $\dfrac{27}{63}$ f) $\dfrac{8}{18}$

Exercice 4.2. * Simplifier les fractions suivantes :

a) $\dfrac{12}{4}$ c) $\dfrac{71}{11}$ e) $\dfrac{125}{25}$ g) $\dfrac{15}{3}$ i) $\dfrac{121}{11}$

b) $\dfrac{42}{36}$ d) $\dfrac{63}{18}$ f) $\dfrac{34}{14}$ h) $\dfrac{99}{33}$

Exercice 4.3. * Écrire les produits suivants sous forme de fractions irréductibles :

a) $3 \times \dfrac{5}{3}$ b) $\dfrac{3}{2} \times 4$ c) $6 \times \dfrac{7}{11}$ d) $1 \times \dfrac{2}{5}$ e) $3 \times \dfrac{4}{16}$

Exercice 4.4. * Calculer :

a)
$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{-5}{3} \times \frac{1}{4}$$

b)
$$\frac{11}{15} \times \frac{-6}{7} \times 0 \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$$

c)
$$\frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{6}{5}$$

d)
$$-2 \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{5}$$

Exercice 4.5. * Calculer :

a)
$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{-5}{7} + \frac{5}{7}\right)$$

b)
$$5 \times \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right)$$

Exercice 4.6. ** Écrire sous forme de fraction irréductible :

a)
$$\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\right)^2$$

b)
$$\left(-2 + \frac{1}{3}\right)^2$$

4.4.2 Conseils

4.4.3 Corrections

Chapitre 5

Équations et inéquations

5.1 Équations

5.1.1 Définition

Définition 5.1. Une équation est une égalité comprenant une ou plusieurs variables (les inconnues).

Exemples : Voici une liste d'équations :

a) $x = 5$

b) $2x - 1 = 5$

c) $x^2 + 3 = 2x^2 - x - 3$

d) $x + 3 = 4y - 6$

Résoudre une équation consiste à rechercher les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie. Ces valeurs sont appelées *solutions* de l'équation.
Remarques :

1. On notera souvent S l'ensemble des solutions.
2. Il se peut que l'équation n'admette aucune solution. Dans ce cas, on notera $S = \emptyset$.

Définition 5.2. Soit $a = b$ une équation, où a et b sont deux expressions quelconques. Alors on dit que a est le membre de gauche et b le membre de droite.

Proposition 5.1. Pour trouver les solutions, on peut utiliser les propriétés suivantes :
– Ajouter (ou retrancher) un même nombre à chaque membre d'une équation ne change pas les solutions de l'équation.
– Mutliplier (ou diviser) chaque membre d'une équation par un même nombre ne change pas les solutions de l'équation.

Ces deux propriétés sont fondamentales.

5.1.2 Équation du premier degré à une inconnue

Méthode 5.1 (Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue)**.**

Développer chaque membre et réduire les termes semblables.

En utilisant les deux propriétés ci-dessus, regrouper dans un membre tous les termes contenant l'inconnue, et regrouper dans l'autre membre toutes les constantes.

Écrire l'ensemble des solutions.

Vérifier la cohérence du résultat en substituant la solution dans l'équation de départ.

Exemple : Nous proposons de résoudre l'équation $3x + 1 = x - 7$. On a donc

$$\begin{aligned}3x + 1 &= x - 7\\ 3x + 1 - 1 &= x - 7 - 1\\ 3x &= x - 8\\ 3x - x &= x - 8 - x\\ 2x &= -8\\ x &= \frac{-8}{2} = -4x & &= -4\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{S = \{-4\}}$. Vérifions maintenant si la solution est cohérente en insérant cette valeur

$$3 \times -4 + 1 = -12 + 1 = -11$$
$$-4 - 7 = -11$$

Les deux membres sont bien égaux, donc nous n'avons pas fait d'erreur.

5.1.3 Équations sous forme de produit

Définition 5.3. Une équation-produit est une équation de la forme

$$\boxed{(ax + b)(cx + d) = 0} \tag{5.1}$$

où a, b, c, d sont quatres nombres fixés (et donc connus), et x est notre inconnue.

Proposition 5.2. L'équation (5.1) admet deux solutions, que l'on peut déterminer en résolvant les deux équations

$$\boxed{\begin{aligned}ax + b &= 0\\ cx + d &= 0\end{aligned}} \tag{5.2}$$

Démonstration.
En effet, si $y \times z = 0$, alors $y = 0$ ou $z = 0$.
Ici, $y = ax + b$ et $z = cx + d$. □

Exemples : Nous nous proposons de résoudre l'équation $(x-5)(3x+4)=0$. Alors

$$
\begin{array}{rcr}
x-5=0 & \text{ou} & 3x+4=0 \\
x=5 & \text{ou} & 3x=-4 \\
x=5 & \text{ou} & x=-\dfrac{4}{3}
\end{array}
$$

L'ensemble des solutions est donc $S=\left\{5,-\dfrac{4}{3}\right\}$.

5.1.4 Équations avec une puissance

Proposition 5.3. Soit l'équation

$$x^2=a$$

alors l'équation
- n'admet pas de solution si $a<0$;
- admet $x=0$ comme unique solution si $a=0$;
- admet deux solutions si $a>0$ qui sont

$$\boxed{S=\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\}} \tag{5.3}$$

Démonstration.
- Si $a<0$ l'équation n'admet pas de solution car un nombre élevé au carré est toujours positif.
- Si $a=0$, alors il n'existe qu'un seul nombre qui élevé au carré vaut 0 : il s'agit de 0 lui-même.
- Si $a>0$, on a en effet

$$
\begin{aligned}
x=\sqrt{a} &\Longrightarrow (\sqrt{a})^2=a \\
x=-\sqrt{a} &\Longrightarrow (-\sqrt{a})^2=(-1)^2(\sqrt{a})^2=(\sqrt{a})^2=a
\end{aligned}
$$

$-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ sont donc bien solutions de l'équation, et ce sont les seules.

□

Exemples : Déterminer les solutions des équations, où x est l'inconnue :

a) $x^2+4=0$. Alors

$$
\begin{aligned}
&x^2+4=0 \\
\Longleftrightarrow\ &x^2=-4
\end{aligned}
$$

ce qui est impossible. Donc l'équation n'admet aucune solution et $\boxed{S=\emptyset}$.

b) $x^2=9$, alors les solutions sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$, et $\boxed{S=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}}$.

5.2 Inéquations

Définition 5.4. Une inéquation est une expression qui traduit l'inégalité de deux termes comportant des inconnues.

Remarque : L'on peut voir une inéquation comme une équation où l'on aurait remplacer le signe égal = par l'un des signes de comparaisons < ou >. La différence étant que l'on n'obtiendra pas une unique solution, mais une infinité.

Définition 5.5. Il est possible de représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation au moyen d'une droite.

Proposition 5.4. Soient a et b tels que $a < b$, alors on a

$$\boxed{-b < -a} \tag{5.4}$$

Exemple : Si $4 < 9$ alors $-9 < -4$.

Proposition 5.5. Soient a et b tels que $a < b$, alors on a

$$\boxed{\frac{1}{b} < \frac{1}{a}} \tag{5.5}$$

Exemple : Si $2 < 5$, alors $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ (car $1/2 = 0,5$ et $1/5 = 0.2$).

Proposition 5.6. Soient a, b et c trois nombres tels que $a < b$. Alors on aura les propriétés suivantes :

1. on peut ajouter ou retrancher un même nombre à chaque membre d'une inégalité sans rien changer à sa validité
$$\boxed{a + c < b + c} \tag{5.6}$$
2. on peut multiplier ou diviser par un même nombre positif chaque membre d'une inégalité sans rien changer à sa validité
$$\boxed{a \times c < b \times c} \qquad c > 0 \tag{5.7}$$
3. on peut multiplier ou diviser par un même nombre négatif chaque membre d'une inégalité sans rien changer à sa validité
$$\boxed{b \times c < a \times c} \qquad c < 0 \tag{5.8}$$

Démonstration.
Les deux premières propriétés sont évidentes. Afin de prouver la troisième, il suffit de considérer d'utiliser la proposition 5.4

$$a < b \Longleftrightarrow -b < -a$$

puis la deuxième propriété

$$-b < -a \Longleftrightarrow (-b) \times (-c) < (-a) \times (-c)$$

car $-c > 0$ (puisque $c < 0$).
On a donc bien

$$b \times c < a \times c \Longleftrightarrow (-b) \times (-c) < (-a) \times (-c)$$

□

Exemple : Si $5 < 7$, alors on a

a) $5 + 2 < 7 + 2$, c'est à dire $7 < 9$
b) $5 \times 3 < 7 \times 3$, c'est à dire $15 < 21$
c) $5 \times (-4) > 7 \times (-4)$, c'est à dire $-20 > -28$

Exemples :

a)

$$\begin{aligned} 3x + 2 &> 11 \\ 3x &> 9 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -x - 6 &> 5 \\ -x &> 11 \\ x &< -11 \end{aligned}$$

Il faut penser à bien changer le signe de sens dans la dernière étape.

c)

$$\begin{aligned} 8x + 5 &< 6x - 19 \\ 8x - 6x &< -19 - 5 \\ 2x &< -24 \\ x &< -12 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}x - \frac{2}{7} &< \frac{1}{2}x + \frac{3}{7} \\ \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}x &< \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \\ \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) x &< \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \\ \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{4}\right) x &< \frac{5}{7} \\ \frac{3}{4}x &< \frac{5}{7} \\ x &< \frac{4}{3} \times \frac{5}{7} \\ x &< \frac{20}{21} \end{aligned}$$

---

e)

$$\begin{aligned}2x+3 &< 2x-4\\ 2x-2x &< -4-3\\ 0 &< -7\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Cette inéquation n'a donc aucune solution : $S=\emptyset$.

f)

$$\begin{aligned}x+2 &< x+8\\ x-x &< 8-2\\ 0 &< 6\end{aligned}$$

qui vaut toujours vrai. On a donc $S=\mathbb{R}$.

5.3 Systèmes d'équations

Définition 5.6. On appelle *système d'équations* un couple de deux solutions à deux inconnues. Il s'écrira sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by &=& c\\ dx+ey &=& f\end{array}\right. \tag{5.9}$$

avec a, b, c, d, e, f des nombres, et x et y nos inconnues.

Exemples : Voici un exemple concret de système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &+& 5y &=& 6\\ -2x &+& 3y &=& 14\end{array}\right. \tag{5.10}$$

Toutefois, nous ne chercherons pas à le résoudre tout de suite.

Il existe deux manières pour résoudre un système d'équations :
- la méthode par substitution ;
- la méthode par combinaison linéaire (ou encore pivot de Gauss).

On choisira la méthode qui permettra de résoudre le plus rapidement possible l'énoncé. Il y aura toujours plusieurs possibilités pour appliquer chacune des méthodes. Certaines sont plus simples que d'autres.

Définition 5.7. La méthode par substitution consiste à isoler une des inconnues dans une des équations, avant de remplacer la valeur obtenue pour cette inconnue dans la seconde équation.

Exemples : Reprenons le système précédent (5.10) et essayons de le résoudre par substitution

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &+& 5y &=& 6\\ -2x &+& 3y &=& 14\end{array}\right.$$

L'on voit qu'il y a un x sans coefficient dans la première équation. Il sera donc simple de l'isoler

$$x+5y=6 \iff x=6-5y$$

Nous injectons alors la valeur de x dans la seconde équation

$$\begin{aligned}
-2x + 3y &= 14 \\
-2(6 - 5y) + 3y &= 14 \\
-12 + 10y + 3y &= 14 \\
13y &= 14 + 12 \\
10y &= 26 \\
y &= 2
\end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à reporter la valeur de y dans une des équations pour obtenir la valeur de x (car il s'agira alors d'une équation à une inconnue). Nous choisirons la première équation qui est la plus simple

$$\begin{aligned}
x + 5y &= 6 \\
x + 5 \times 2 &= 6 \\
x + 10 &= 6 \\
x &= -4
\end{aligned}$$

La solution du système est donc $S = \{-4, 2\}$.

Définition 5.8. Le pivot de Gauss consiste à multiplier chaque ligne par un nombre afin d'obtenir le même coefficient devant l'une des inconnues dans chaque équation. Ensuite, l'on soustrait les deux équations afin d'obtenir plus qu'une équation à une inconnue.

Exemples : Nous reprenons encore une fois le même système (5.10) et allons le résoudre cette fois avec le pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 5y & = & 6 & \times & 2 \\ -2x & + & 3y & = & 14 & \times & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 10y & = & 12 \\ 2x & - & 3y & = & -14 \end{array}\right.$$

Maintenant, soustrayons la deuxième équation à la première (car nous aurons ainsi des nombres positifs). Nous obtenons

$$\begin{aligned}
10y - (-3y) &= 12 - (-14) \\
13y &= 26 \\
y &= 2
\end{aligned}$$

Ceci fait, nous pouvons retrouver x soit à partir d'un second pivot de Gauss, soit par substitution. Ici, le plus simple est d'utiliser une subsitution, comme tout à l'heure. Et nous retrouvons logiquement $x = -4$ (il s'agit du même calcul).

5.4 Exercices

5.4.1 Énoncés

Exercice 5.1. * Montrer que 4 est solution des équations suivantes :

a) $2x + 3 = x + 7$

b) $-x + 7 = x^2 - 13$

Exercice 5.2. ** Quelle doit être la valeur de a pour que l'équation

$$2a + x = 2x + 4$$

admette 2 comme solution ?

Exercice 5.3. ** Résoudre les équations :

a) $x - 3 = 3x + 7$

b) $14 - 2x = -3x + 5$

c) $2x + 4 = 10$

5.4.2 Conseils

5.4.3 Corrections

Deuxième partie

Organisation et gestion de données, fonctions

Chapitre 6

Fonctions

6.1 Notions

Définition 6.1. Une *fonction* f est un objet qui à un nombre x, appelé antécédent de f, associe un autre nombre y, appelé image de f.
Il existe différentes manière de noter une fonction : $f(x) = y$, $f : x \mapsto f(x) = y$.

Remarque : On parle parfois d'*application.*
Exemples :

a) $f(x) = 2x + 5$ ou encore $f : x \longmapsto 2x + 5$

b) $f(x) = x^2 + 3x + 8$

c) $f(x) = 3 + \dfrac{2x}{x^3 + 1}$

Définition 6.2. Soit $f(x) = y$, une fonction qui à x associe y. Alors
– x est l'*antécédent* de y par f ;
– y est l'*image* de x par f.

Remarques :

1. un élément peut avoir plusieurs antécédents ;
2. un élément ne peut avoir qu'une image.

Pour calculer l'image d'une valeur, il suffit de remplacer la variable par la valeur dans l'expression de la fonction.
Exemples : Soit la fonction $f(x) = 4x + 3$.
Alors
– $f(2) = 4 \times 2 + 3 = 8 + 3 = 11$
  On peut donc dire que 2 a pour image 11, et que 2 est un antécédent de 11.
– $f(-3) = 4 \times (-3) + 3 = -12 + 3 = -9$
– $f(-1) = 4 \times (-1) + 3 = -4 + 3 = -1$
  Il peut arriver, comme ici, qu'un élément soit lui-même son image.

Certains fonctions peuvent être très compliquées à étudier. Par la suite, nous nous limiterons à certains catégories de fonctions.

6.2 Fonctions particulières

6.2.1 Fonctions linéaires

Définition 6.3. Une *fonction linéaire* est de la forme

$$f(x) = ax \tag{6.1}$$

avec a un nombre fixé.

Définition 6.4. On dit que a est la *pente* de la fonction (ou encore le *coefficient directeur*).
Il peut être interprété comme le nombre d'unité que l'on "monte" sur l'axe des y lorsque l'on avance d'une unité sur l'axe des x.

Exemples : Soit $f(x) = 3x$.
La pente de f vaut 3.

L'on peut utiliser une fonction linéaire pour représenter l'évolution d'un prix en fonction d'un pourcentage. Soit x un prix quelconque, que l'on va augmenter de 10%. Alors le nouveau prix, que l'on notera y, sera

$$y = x + 0,1 \times x = x \times (1 + 0,1) = 1,1 \times x$$

L'on reconnait une fonction affine de coefficient directeur $a = 1,1$. Ainsi, pour connaitre le prix d'un objet après une augmentation de 10%, il suffit de remplacer x par le prix de départ. L'on peut aussi traceer la courbe afin de déterminer graphiquement les prix après augmentation, ou bien encore pour déduire les prix de départ si l'on connait le prix après augmentation.
Exemples :

a) Si $x = 10$€, alors le nouveau prix sera $1,1 \times 10 = 11$€.
b) Si $x = 25$€, alors le nouveau prix sera $1,1 \times 25 = 27,5$€.

6.2.2 Fonctions affines

Définition 6.5. Une *fonction affine* est de la forme

$$f(x) = ax + b \tag{6.2}$$

avec a et b deux nombres fixés.

Définition 6.6. On dit que :
– a est la *pente* de la fonction (ou encore le *coefficient directeur*) ;
– b est l'*ordonnée à l'origine*.

Exemples : Soit $f(x) = 2x + 5$.
La pente de f vaut 2 et son ordonnée à l'origine vaut 5.

Proposition 6.1. L'ordonnée à l'origine correspond à la valeur de la fonction pour $x = 0$. On a donc

$$f(0) = b \tag{6.3}$$

Il est ainsi possible de déterminer graphiquement la valeur de l'ordonnée à l'origine d'une droite en lisant les coordonnées du point où elle coupe l'axe des y.

Remarque : Les fonctions linéaires sont en fait un cas particulier de fonctions affines : on a $b = 0$ et donc $f(0) = 0$: leur droite passe par l'origine.

Proposition 6.2. Soit (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées des points A et B. Alors le coefficient directeur de la droite qui passe par A et B vaut

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{6.4}$$

Exemples : Soit $A(2, 5)$ et $B(4, 9)$ deux points. Déterminons l'expression de la fonction définissant la droite passant par A et B.

– Calculons le coefficient directeur

$$a = \frac{9 - 5}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

– Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, il ne reste plus qu'à résoudre une équation au choix entre

$$f(2) = 5 = 2 \times 2 + b$$
$$f(4) = 9 = 2 \times 4 + b$$

Nous trouvons $b = 1$.

6.3 Exercices

6.3.1 Énoncés

Exercice 6.1. * À l'aide d'un graphique, déterminer l'équation des fonctions passant par les points des coordonnées :
- $(0, 0)$ et $(1, 2)$
- $(1, 1)$ et $(5, 1)$

Exercice 6.2. * Déterminer les équations des droites de pente -2 et passant par les points :
- $(2, 0)$
- $(6, 3)$
- $(4, 4)$

Exercice 6.3. * Tracer les courbes suivantes :

a) $y = 2x + 1$

b) $y = -x$

c) $y = -4x + 9$

6.3.2 Conseils

6.3.3 Corrections

Chapitre 7

Statistiques

7.1 Vocabulaire

Définition 7.1. La moyenne d'un ensemble désigne la valeur qu'aurait chaque membre de cet ensemble s'ils étaient tous égaux, et ce sans changer leur somme.

Proposition 7.1. Soit un ensemble de n éléments, noté $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors la moyenne est donnée par la formule

$$\boxed{m = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}} \tag{7.1}$$

Exemple : Soit l'ensemble $\{6, 1, 8, 3\}$. La moyenne est

$$\frac{6+1+8+3}{4} = \frac{18}{4} = 9$$

Définition 7.2. On dit que la moyenne est dite pondérée lorsque chaque élément est affecté d'un coefficient.

Remarque : La moyenne scolaire est (généralement) une moyenne pondérée.

Proposition 7.2. Soit un ensemble de n éléments, noté $\{x_1, \ldots, x_n\}$, affecté des poids $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Alors la moyenne est donnée par la formule

$$\boxed{m = \frac{\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \cdots + \omega_n}} \tag{7.2}$$

Exemple : Pendant le premier trimestre, le professeur de mathématiques a effectué trois DS (coefficient 4), un DM (coefficient 1) et un contrôle de connaissance (coefficient 2). Un élève a eu les notes suivantes :
– DS : 12, 15, 7 ;
– DM : 14 ;
– contrôle : 11.

Sa moyenne sera alors

$$\begin{aligned} m &= \frac{12 \times 3 + 15 \times 3 + 7 \times 3 + 14 \times 1 + 11 \times 2}{3 + 3 + 3 + 1 + 2} \\ &= \frac{36 + 45 + 21 + 14 + 22}{12} \\ &= \frac{138}{12} \\ &\boxed{= 11.5} \end{aligned}$$

Définition 7.3. L'étendue d'une série correspond à la différence entre le plus grand et le plus petit élément.

Exemple : Soit la série $\{2, 3, 5, 9, 10, 11, 17, 19\}$. Alors l'étendue vaut 17.

Définition 7.4. La valeur médiane permet de partager une série numérique ordonnée en deux parties comportant autant d'éléments.

Exemple : Soit la série $\{1, 2, 5, 6, 9, 14, 19\}$. Alors sa médiane est 6.

Remarque : Lorsque la série comporte un nombre pair d'éléments, alors la médiane est la moyenne des deux éléments du milieu.
Exemple : Soit la série $\{2, 5, 7, 13\}$. Alors sa médiane est 6.

7.2 Exercices

7.2.1 Énoncés

7.2.2 Conseils

7.2.3 Corrections

Chapitre 8

Notions de probabilités

8.1 Définitions

Définition 8.1. Une expérience est dite *aléatoire* si elle ne donne pas toujours le même résultat lorsqu'on la répète plusieurs fois dans les mêmes conditions.

Définition 8.2. Les *issues* sont les résultats observables d'une expérience aléatoire.

Proposition 8.1. Il doit être possible de faire la liste des toutes les issues possibles.

Définition 8.3. Un *événement* désigne un énoncé (une phrase) concernant les issues de l'expérience aléatoire, dont on peut dire — seulement après avoir réalisé l'expérience — s'il est vrai ou faux.
Un événement se représente par la liste des issues qui rendent l'énoncé vrai. Ces issues sont dites *favorables* à l'événement.

Définition 8.4. Un événement dont l'énoncé n'est vrai que pour une seule issue est dit *élémentaire*.

Définition 8.5. Un événement est dit :
– *certain* s'il est réalisé quelque soit l'issue de l'expérience ;
– *impossible* s'il n'est jamais réalisé quelque soit l'issue de l'expérience.

Définition 8.6. Deux événements sont *incompatibles* si on ne peut pas trouver une même issue de l'expérience aléatoire qui les réalise.

Définition 8.7. La *probabilité*, notée p, d'un événement correspond à la chance que celui advienne parmi d'autres. On a

$$\boxed{0 \leq p \leq 1} \tag{8.1}$$

Proposition 8.2. La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.

Proposition 8.3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Proposition 8.4. Si la réalisation d'un événement entraine la réalisation d'un autre événement, la probabilité du premier est inférieure ou égale à celle du second.

8.2 Situations

8.2.1 Lancer d'une pièce

Si nous lançons une pièce en l'air, alors il y a autant de chances d'obtenir face que pile. La probabilité de chaque événement est donc 0,5.

8.2.2 Lancer de dé

Prenons un dé à six faces, non truqué, et lançons-le. Nous avons six possibilités pour le résultat, et chaque possibilité a autant de chances que les autres d'advenir. Ainsi, la probabilité de chaque événement est 1/6.
C'est à dire que l'on a une chance sur six d'obtenir 1, une chance sur six d'obtenir 2, etc.

8.3 Exercices

8.3.1 Énoncés

8.3.2 Conseils

8.3.3 Corrections

Troisième partie

Géométrie

Chapitre 9

Rappels

9.1 Définitions

Dans tout ce chapitre, A et B désignent deux points du plan.

Définition 9.1. On note $[AB]$ le segment allant de A à B.

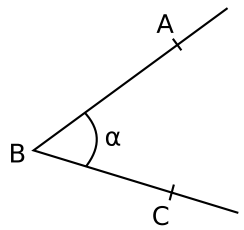
Définition 9.2. On note (AB) la droite passant par A et B.

Définition 9.3. On note $[AB)$ la demie-droite commençant en A et passant par B.

9.2 Angles

9.2.1 Définitions

FIGURE 9.1 – Angle



Définition 9.4. Un *angle* est une figure formée par deux demi-droites issues d'un même point.
Il existe deux types de notations :
- Une lettre désignant l'angle lui-même (au même titre qu'un sommet).
- Trois lettres désignant trois points : le sommet et deux points appartenant aux demies-droites (un chacune). Le sommet se place au milieu, et on surmonte le tout d'un chapeau.

Remarque : On utilise souvent des lettres grecs pour nommer les angles. On choisit très souvent α ou θ.
Exemple : Sur la figure 9.1, on notera l'angle α ou $\widehat{ABC}$.

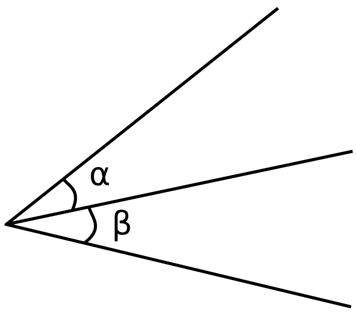
Définition 9.5. Le point dont sont issues les deux demi-droites est le *sommet* de l'angle.

Exemple : Sur la figure 9.1, le sommet est B.

Définition 9.6. Deux angles sont dits *adjacents* s'ils ont le même sommet et une demie-droite en commun.

Exemple :

Figure 9.2 – Angles adjacents

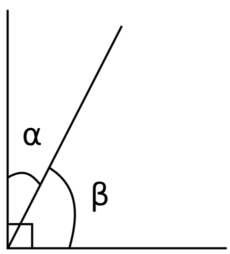


Sur la figure 9.2, les angles α et β sont adjacents.

Définition 9.7. Deux angles sont dits *complémentaires* si leur somme est un angle droit.

Exemple :

Figure 9.3 – Angles complémentaires

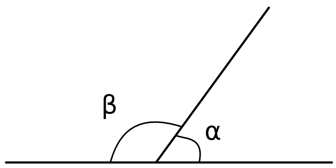


Sur la figure 9.3, les angles α et β sont complémentaires.

Définition 9.8. Deux angles sont dits *supplémentaires* si leur somme est un angle plat.

Exemple :

Figure 9.4 – Angles supplémentaires



Sur la figure 9.4, les angles α et β sont supplémentaires.

9.2.2 Angles formés par l'intersection de deux droites et d'une sécante

Dans la suite, nous considérerons deux droites coupés par une sécante (figure 9.5), et étudierons les angles formés aux intersections.

Définition 9.9. Deux angles sont dits *alternes-externes* si :
- ils sont situés de part et d'autre de la sécante ;
- ils sont situés à l'extérieur des deux droites ;
- ils ne sont pas adjacents.

Définition 9.10. Deux angles sont dits *alternes-internes* si :
- ils sont situés de part et d'autre de la sécante ;
- ils sont situés à l'intérieur des deux droites ;
- ils ne sont pas adjacents.

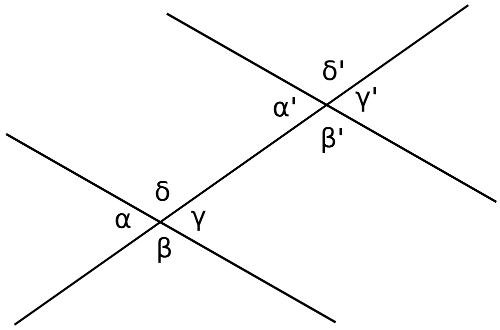
Définition 9.11. Deux angles sont dits *opposés par le sommet* si :
- ils ont le même sommet ;
- les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Définition 9.12. Deux angles sont dits *correspondants* si :
- ils sont situés du même côté de la sécante ;
- ils sont situés du même côté de chaque droite.

Exemple :

Soit la figure 9.5.
- Les angles correspondants sont :
  - α et α',
  - β et β',
  - γ et γ',
  - δ et δ' ;
- Les angles alternes-externes sont :
  - α et γ',

FIGURE 9.5 – Angles alternes, correspondants et opposés



  - β et δ' ;
- Les angles alternes-internes sont :
  - γ et α',
  - δ et β' ;
- Les angles opposés par le sommet sont :
  - α et γ,
  - β et δ,
  - α' et γ',
  - β' et δ'.

Proposition 9.1. Deux angles sont égaux dans les cas suivants :
- ils sont alternes-externes ;
- ils sont alternes-internes ;
- ils sont opposés par le sommet ;
- ils sont correspondants.

9.3 Exercices

9.3.1 Énoncés

9.3.2 Conseils

9.3.3 Corrections

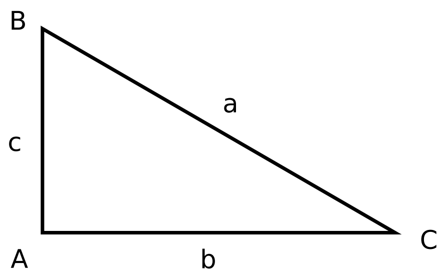
Chapitre 10

Les triangles

10.1 Triangle rectangle

Soit un triangle ABC rectangle en A. Alors il est possible de déduire différentes propriétés en connaissant certains angles et côtés.

Figure 10.1 – Un triangle rectangle ABC



10.1.1 Théorème de Pythagore

Théorème 10.1 (Théorème de Pythagore)**.** Soit un triangle ABC rectangle en A. Alors

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2} \tag{10.1}$$

10.1.2 Trigonométrie

Proposition 10.1. On définit le sinus de l'angle $\hat{B}$, noté $\sin \hat{B}$ comme le rapport du côté opposé à l'angle $\hat{B}$ sur l'hypothénuse, c'est à dire

$$\boxed{\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}} \tag{10.2}$$

Proposition 10.2. On définit le cosinus de l'angle $\hat{B}$, noté $\cos \hat{B}$ comme le rapport du côté adjacent à l'angle $\hat{B}$ sur l'hypothénuse, c'est à dire

$$\boxed{\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}} \tag{10.3}$$

Proposition 10.3. On définit la tangente de l'angle $\hat{B}$, noté $\tan \hat{B}$ comme le rapport du côté opposé sur le côté adjacent à l'angle $\hat{B}$, c'est à dire

$$\boxed{\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}} \tag{10.4}$$

Proposition 10.4. On a la relation suivante entre la tangente, le sinus et le cosinus d'un angle

$$\boxed{\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}} \tag{10.5}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} &= \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} \\ &= \frac{AC}{AB} \\ &\boxed{= \tan \hat{B}} \end{aligned}$$

□

Remarque : L'hypothénuse est le plus grand des côtés. Le rapport d'un autre côté sur l'hypothénuse est donc compris entre 0 et 1. On a donc

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin x \leq 1 \\ 0 \leq \cos x \leq 1 \end{aligned}$$

10.2 Le théorème de Thalès

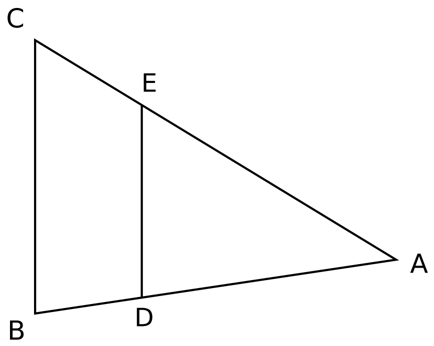
10.2.1 Énoncé

Prenons un triangle ABC et traçons un segment DE parallèle à un de ses côtés, disons BC (figure 10.2). Il est alors possible d'établir un rapport de proportionnalité entre les différents segments de cette figure grâce au théorème de Thalès.

Théorème 10.2 (Théorème de Thalès)**.** Soit un triangle ABC, avec (AB) et (DE) deux droites parallèles, où D et E appartiennent aux segments $[AB]$ et $[AC]$. Alors on a

$$\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}} \tag{10.6}$$

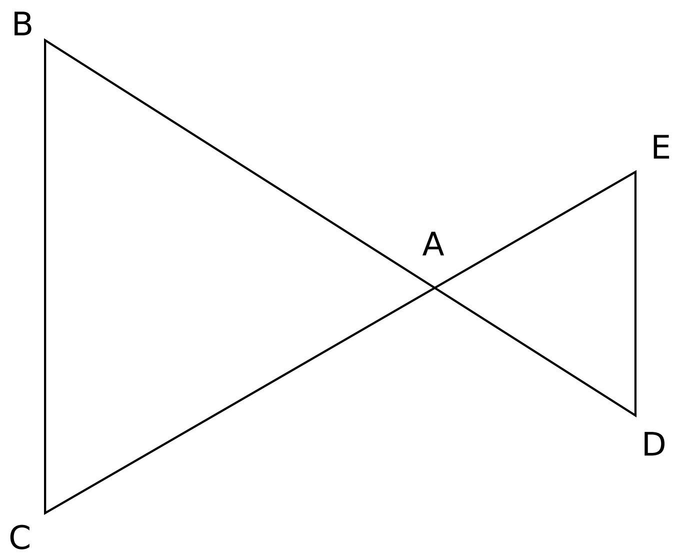
FIGURE 10.2 – Théorème de Thalès



10.2.2 Autre formulation

Remarque : Il est aussi possible d'appliquer le théorème de Thalès dans une figure du type 10.3, où BC et DE sont parallèles.

FIGURE 10.3 – Théorème de Thalès



Exemple : Soient $AB = 4\,\text{cm}$, $AD = 3\,\text{cm}$ et $AE = 9\,\text{cm}$. Et donc

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Longleftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{9}{AC} \Longrightarrow AC = \frac{9 \times 4}{3} = 12\,\text{cm}$$

10.2.3 Réciproque

Théorème 10.3 (Réciproque du théorème de Thalès)**.** Soit un triangle ABC et deux points D et E appartenant aux segments $[AB]$ et $[AC]$. Alors

$$\boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Longrightarrow (BC) \parallel (DE)} \tag{10.7}$$

Exemple : Soient $AB = 10\,\text{cm}$, $AD = 5\,\text{cm}$, $AE = 2\,\text{cm}$ et $AC = 4\,\text{cm}$. On a

$$\frac{AD}{AB} = \frac{10}{5} = 2$$
$$\frac{AE}{AC} = \frac{4}{2} = 2$$

Les rapports étant égaux, on peut conclure que (BC) et (DE) sont parallèles.

10.2.4 Triangles semblables

Définition 10.1. Deux triangles sont *semblables* si leurs angles correspondants sont égaux.

Proposition 10.5. Les côtés correspondants de deux triangles semblables sont proportionnels.

Démonstration.
Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème de Thalès (10.2). □

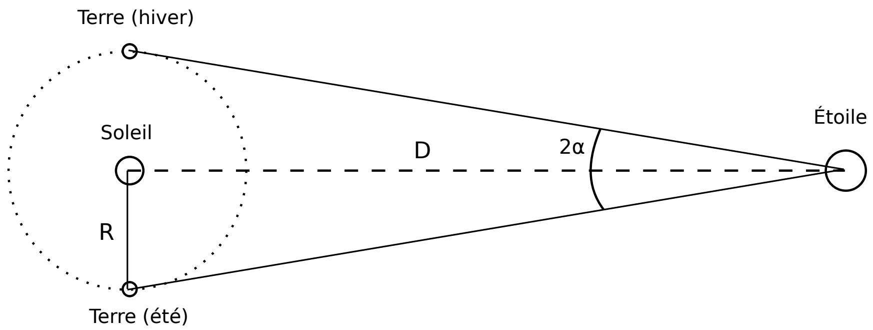
10.3 Exercices

10.3.1 Énoncés

Exercice 10.1. *** **Méthode de la parallaxe**
Les astronomes utilisent diverses méthodes pour calculer les distances entre les étoiles et le Soleil. L'une d'elle — une des plus anciennes — est celle de la parallaxe.
Imaginons que la trajectoire de la Terre autour du Soleil soit un cercle de rayon R (en réalité, il s'agit d'une ellipse, mais très proche du cercle). Maintenant, observons une étoile dans le ciel (à l'aide d'instruments de pointe) à six mois d'intervalle. Alors l'étoile paraitra être dans deux directions différentes. Nous pouvons mesurer l'angle entre ces deux directions avec notre instrument, et on le notera 2α.
En astronomie, on utilise souvent l'*unité astronomique*, notée ua, pour mesurer des distances (dans le système solaire). Il s'agit de la distance entre la Terre et le Soleil (notée R sur notre figure). On a donc

$$R = 1\,\text{ua} \approx 150\,000\,000\,\text{km}$$

Figure 10.4 – Méthode de la parallaxe



Calculer la distance pour une étoile quand $2\alpha = 2°$.

10.3.2 Conseils

10.1 Il faut rechercher une relation trigonométrique entre l'angle α, la distance R (Terre–Soleil) et entre la distance D (Soleil–étoile). R correspond au côté opposé à l'angle α, et D au côté adjacent.
La droite passant par le Soleil et l'étoile est la bissectrice de l'angle 2α.

10.3.3 Corrections

Exercice 10.1 Dans le triangle rectangle formé par la Terre, le Soleil et l'étoile, on utilise la relation

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{R}{D}}$$

Puisque $2\alpha = 2\,°$, on a $\alpha = 1\,°$, d'où

$$\begin{aligned} D &= \frac{R}{\tan\alpha} \\ &= \frac{1}{\tan 1\,°} \\ &\boxed{\approx 57{,}29\,\text{ua}} \end{aligned}$$

ou encore $D \approx 8{,}59 \times 10^9\,\text{km}$.

Remarque : En réalité, les angles sont beaucoup plus petits : pour l'étoile la plus proche (Alpha du Centaure), on a $2\alpha = 0{,}000\,21\,°$.

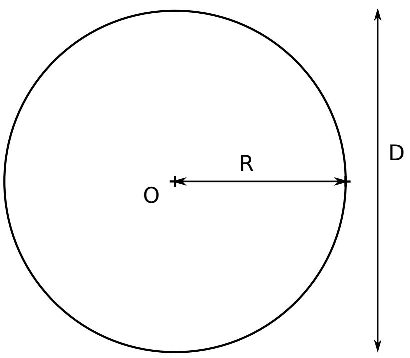
Pour donner une idée de comparaison, Neptune, la dernière planète de notre système, se trouve à 30 ua du Soleil. C'est à dire que s'il existait une étoile telle que $2\alpha = 2\,°$ existait, alors Neptune serait situé à mi-chemin entre elle et le Soleil. De plus, nous la verrions à l'œil nu, surement même en plein jour.

Chapitre 11

Les cercles

11.1 Définitions

Figure 11.1 – Cercle



Définition 11.1. Le *cercle* de *centre* O et de *rayon* R est l'ensemble des points situés à la distance R du point O.

Définition 11.2. Le *disque* de *centre* O et de *rayon* R est l'ensemble des points dont la distance au point O est inférieur ou égale à R.

Définition 11.3. Une *corde* est un segment dont les extrémités appartiennent au cercle.

Définition 11.4. Un *diamètre* est une corde qui passe par le centre du cercle.

Définition 11.5. L'*arc de cercle* $\overset{\frown}{AB}$ est la portion du cercle comprise entre A et B (deux points appartenants au cercle).

Définition 11.6. Une *tangente* à un cercle est une droite qui ne possède qu'un point en commun avec un cercle.

Proposition 11.1. La tangente en un point est perpendiculaire au diamètre passant par ce même point.

11.2 Angles

Définition 11.7. Un angle *au centre* est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

Définition 11.8. Un angle est dit *inscrit* si son sommet appartient au cercle.

Théorème 11.1. Dans un cercle, un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Corrolaire 11.1. Deux angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.

Proposition 11.2. Soit $[AB]$ est un diamètre du cercle et C un point du cercle, alors tout triangle ABC est rectangle en C.

11.3 Exercices

11.3.1 Énoncés

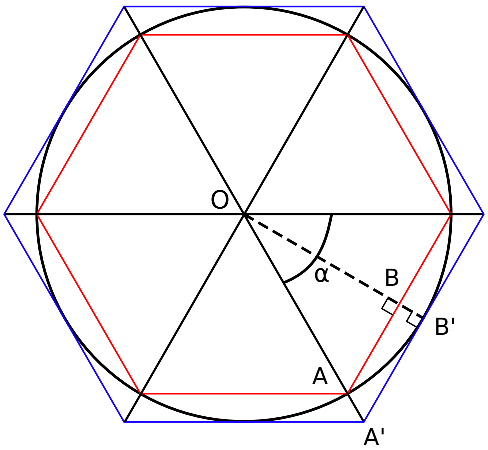
Exercice 11.1. *** **Estimation de pi**

π est un nombre particulier, qui a intéressé et intéresse encore de nombreux mathématiciens. Ainsi, très tôt, on a cherché à déterminé sa valeur. Archimède parvint à déterminer quatre décimales de π au moyen d'une méthode géométrique : il encadra un cercle avec un polygone inscrit et un polygone circonscrit. En déterminant leur périmètre grâce aux formules des triangles et des cercles, il parvint à obtenir la valeur de π à quatre décimales.

Traçons un cercle de rayon $R = 1$. Maintenant, faisons comme si l'on ne connaissait pas π ; nous le considérerons comme une inconnue dans nos calculs.

1. Utilisation de deux hexagones (figure 11.2).
   (a) Déterminer le périmètre de l'hexagone inscrit.
   (b) Déterminer le périmètre de l'hexagone circonscrit.
   (c) Déterminer un encadrement de π.
2. Recommencer à l'aide de deux dodécagones [1].
3. Trouver une formule pour un polygone à n côtés.

FIGURE 11.2 – Encadrement d'un cercle avec deux hexagones



11.3.2 Conseils

11.1 Il faut parvenir à déterminer la longueur d'un côté du polygone (n côtés). Après cela, il suffira de multiplier cette valeur par le nombre de côtés pour obtenir le périmètre.

Pour déterminer la longueur d'un côté, nous utiliserons de la trigonométrie. Nous avons donc besoin de connaitre l'angle α. Pouvons-nous le déterminer

1. Un dodécagone est un polygone qui possède douze côtés.

facilement ? Oui ! Traçons les diamètres passant par les sommets du polygone. Cela divise le cercle en n parties égales, et nous pouvons donc déterminer α. Considérons maintenant le triangle OAB. Nous cherchons AB, qui est le côté opposé à l'angle $\alpha/2$ (car OB est la bissectrice de α). Nous connaissons OA (qui est le rayon du cercle), qui est l'hypothénuse. Il suffit alors de multiplier AB par deux pour obtenir la longueur d'un côté du polygone.
Prenons maintenant le triangle $OA'B'$. Cette fois-ci, nous cherchons le côté $A'B'$, opposé à l'angle $\alpha/2$. OB', le côté adjacent, correspond au rayon du cercle. De même, on obtient la longueur d'un côté du polygone en multipliant $A'B'$ par deux.
Nous pouvons donc déterminer le périmètre du polygone inscrit $\mathcal{P}_i$ et celui du polygone circonscrit $\mathcal{P}_c$. Le périmètre du cercle (qui vaut 2π, comme $R = 1$) est compris entre ces deux périmètres :

$$\mathcal{P}_i < 2\pi < \mathcal{P}_c$$

Vous connaissez la valeur de π (environ $3,1415$). Ainsi, vous devez trouver des périmètres compris entre 6 et 8 : puisque l'on divise par deux ensuite, les demi-périmètres seront compris entre 3 et 4. Si vous trouvez des nombres trop différent, c'est que vous avez fait une erreur.

11.3.3 Corrections

Exercice 11.1

1. L'hexagone possède six côtés. Donc on a

$$\alpha = \frac{360}{6} = 60°$$

d'où $\alpha/2 = 30°$.

(a) Notons c_i la valeur d'un demi-côté de l'hexagone inscrit, alors

$$\sin 30\,° = \frac{c_i}{R} \Longrightarrow \boxed{c_i = \sin 30\,°}$$

car $R = 1$.
Maintenant nous pouvons calculer le périmètre $\mathcal{P}_i$ de l'hexagone inscrit

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_i &= 2 \times 6 \times c_i \\ &= 12 \sin 30\,° \\ &\boxed{= 6}\end{aligned}$$

Notons c_c la valeur d'un demi-côté de l'hexagone circonscrit. Il vaut

$$\tan 30\,° = \frac{c_c}{R} \Longrightarrow \boxed{c_c = \tan 30\,°}$$

(b) Nous obtenons alors la valeur du périmètre $\mathcal{P}_c$ de l'hexagone circonscrit

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_c &= 12 \times c_c \\ &= 12 \tan 30\,° \\ &\boxed{= 4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(c) Procédons à l'encadrement demandé

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_i < 2\pi < \mathcal{P}_c \\ \iff &\frac{\mathcal{P}_i}{2} < \pi < \frac{\mathcal{P}_c}{2} \\ \iff &\boxed{3 < \pi < 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

On a $2\sqrt{3} \approx 3{,}4641$.
L'encadrement n'est pas terrible, et c'est pour cette raison que l'on recommence avec un dodécagone.

2. La principale différence entre le dodécagone et l'hexagone est la valeur de l'angle α. On a maintenant

$$\alpha = \frac{360}{12} = 30\,°$$

Les formules pour les côtés ne changent pas, donc nous allons calculer directement les périmètres

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= 24 \sin 15\,° \approx 6{,}211\,66 \\ \mathcal{P}_c &= 24 \tan 15\,° \approx 6{,}430\,78 \end{aligned}$$

et finalement, en divisant par deux puis en encadrant :

$$\boxed{3{,}1058 < \pi < 3{,}2153}$$

Nous nous sommes rapprochés de la valeur 3,14, même si ce n'est pas encore ça. Pour cette raison, Archimède a recommencé avec des polygones à 24, 48 et enfin 96 côtés. Il a ainsi obtenu l'encadrement suivant

$$3{,}141\,03 < \pi < 3{,}142\,86$$

3. Nous essayons maintenant de trouver une formule générale ne pas avoir à refaire sans cesse les dessins.
Nous remarquons que
– l'angle α vaut

$$\alpha = \frac{360\,°}{n}$$

– les périmètres valent

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= 2n \sin(\alpha/2) = 2n \sin\left(\frac{360\,°}{2n}\right) \\ \mathcal{P}_c &= 2n \tan(\alpha/2) = 2n \tan\left(\frac{360\,°}{2n}\right) \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\boxed{n \sin\left(\frac{360\,°}{2n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{360\,°}{2n}\right)}$$

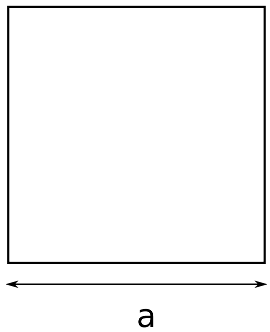
Archimède n'aurait pu aller plus loin que l'encadrement que nous avons vu plus haut, même s'il avait connu cette formule : il faut garder à l'esprit que, dans le temps, ils ne possédaient aucune machine à calculer pour obtenir les valeurs des sinus et tangentes.

Chapitre 12

Surfaces

12.1 Carré

Figure 12.1 – Carré



Proposition 12.1. Le périmètre d'un carré (figure 12.1) est

$$\boxed{\mathcal{P} = 4a} \tag{12.1}$$

et son aire est

$$\boxed{\mathcal{A} = a^2} \tag{12.2}$$

12.2 Rectangle

Proposition 12.2. Le périmètre d'un rectangle (figure 12.2) est

$$\boxed{\mathcal{P} = 2(L + \ell)} \tag{12.3}$$

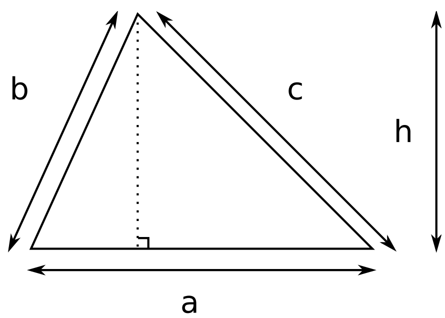
et son aire est

$$\boxed{\mathcal{A} = L \times \ell} \tag{12.4}$$

FIGURE 12.2 – Rectangle

12.3 Triangle

FIGURE 12.3 – Triangle



Proposition 12.3. Le périmètre d'un triangle (figure 12.3) est

$$\boxed{\mathcal{P} = a + b + c} \tag{12.5}$$

et son aire est

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{ah}{2}} \tag{12.6}$$

12.4 Disque

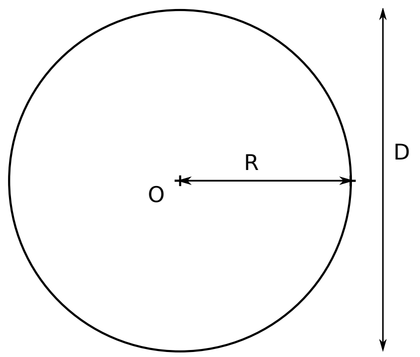
Proposition 12.4. Le périmètre d'un disque (figure 12.4) est

$$\boxed{\mathcal{P} = 2\pi R} \tag{12.7}$$

et son aire est

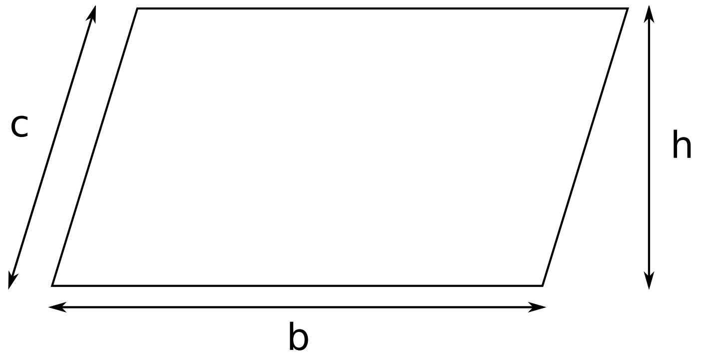
$$\boxed{\mathcal{A} = \pi R^2} \tag{12.8}$$

FIGURE 12.4 – Disque



12.5 Parallélogramme

FIGURE 12.5 – Parrallélogramme



Proposition 12.5. Le périmètre d'un parallélogramme (figure 12.5) est

$$\boxed{\mathcal{P} = 2(b+c)} \tag{12.9}$$

et son aire est

$$\boxed{\mathcal{A} = bh} \tag{12.10}$$

12.6 Losange

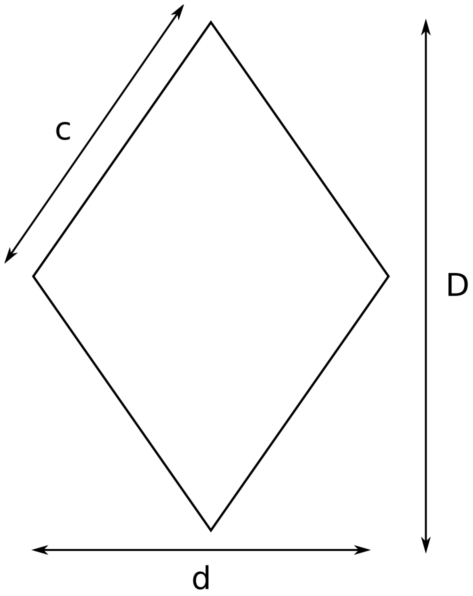
Proposition 12.6. Le périmètre d'un losange (figure 12.6) est

$$\boxed{\mathcal{P} = 4c} \tag{12.11}$$

et son aire est

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{d \times D}{2}} \tag{12.12}$$

Figure 12.6 – Losange



12.7 Trapèze

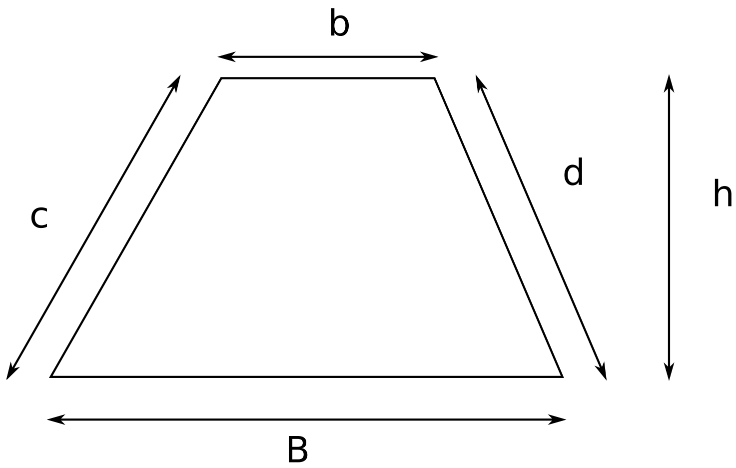
Proposition 12.7. Le périmètre d'un trapèze (figure 12.7) est

$$\boxed{\mathcal{P} = B + c + b + d} \tag{12.13}$$

et son aire est

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{B \times b}{2} \times h} \tag{12.14}$$

Figure 12.7 – Trapèze



12.8 Exercices

12.8.1 Énoncés

12.8.2 Conseils

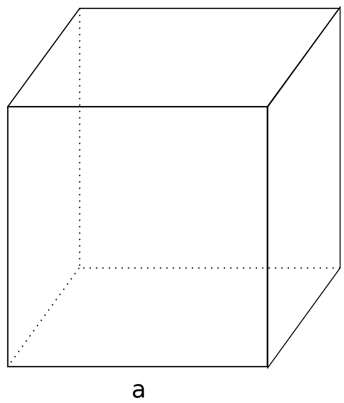
12.8.3 Corrections

Chapitre 13

Volumes

13.1 Cube

Figure 13.1 – Cube



Proposition 13.1. L'aire d'un cube de côté a est

$$\boxed{\mathcal{A} = 6a^2} \tag{13.1}$$

Proposition 13.2. Le volume d'un cube de côté a est

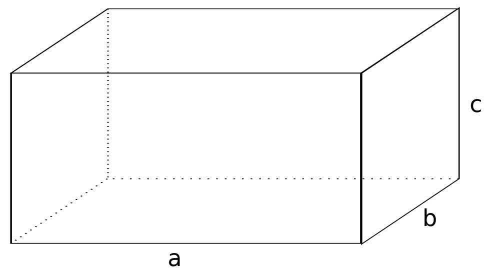
$$\boxed{\mathcal{V} = a^3} \tag{13.2}$$

13.2 Parallélépipède rectangle

Proposition 13.3. L'aire d'un parallélépipède rectangle de côtés a, b et c est

$$\boxed{\mathcal{A} = 2(ab + ac + bc)} \tag{13.3}$$

Figure 13.2 – Parallélépipède rectangle



Proposition 13.4. Le volume d'un parallélépipède rectangle de côtés a, b et c est

$$\boxed{\mathcal{V} = abc} \tag{13.4}$$

13.3 Cylindre

Proposition 13.5. L'aire d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\pi Rh + 2\pi R^2} \tag{13.5}$$

Proposition 13.6. Le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est

$$\boxed{\mathcal{V} = \pi R^2 h} \tag{13.6}$$

13.4 Sphère

Proposition 13.7. L'aire d'une sphère de rayon R est

$$\boxed{\mathcal{A} = 4\pi R^2} \tag{13.7}$$

Proposition 13.8. Le volume d'une sphère de rayon R est

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3} \tag{13.8}$$

13.5 Le cône et la pyramide

Définition 13.1. Le centre de la base est le pied de la hauteur issue du sommet.

Proposition 13.9. Le volume d'une pyramide régulière ou d'un cône vaut

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{Bh}{3}} \tag{13.9}$$

où B est l'aire de la base et h la longueur de la hauteur.

13.5.1 Cône

Proposition 13.10. Le volume d'un cône de rayon R et de hauteur h est

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3}} \tag{13.10}$$

Remarque : Le volume d'un cône vaut un tiers du volume du cylindre de même base et de même ahuteur.

Figure 13.3 – Cylindre

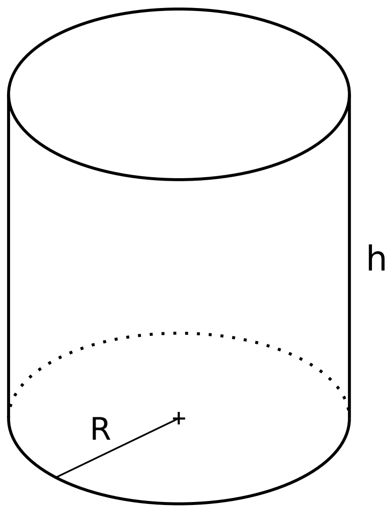


Figure 13.4 – Sphère

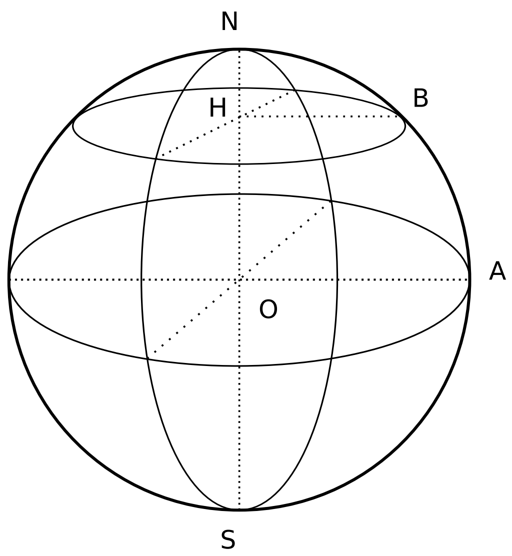
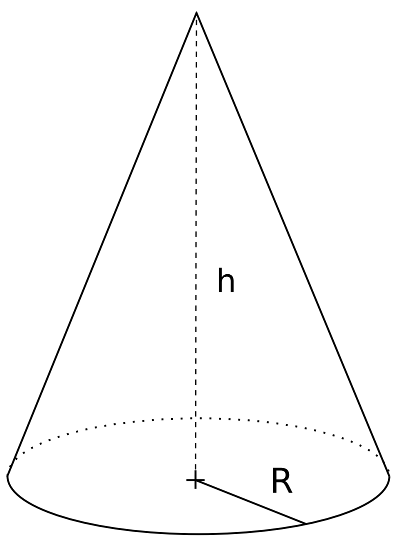


Figure 13.5 – Cône



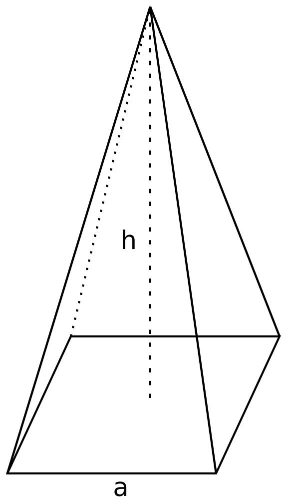
13.5.2 Pyramide

Définition 13.2. Une *pyramide* est une figure ayant pour base un polygone. Ses faces latérales sont des triangles ayant tous un point commun, que l'on appelle le sommet de la pyramide.

Définition 13.3. Une pyramide est dite *régulière* si sa base est un polygone, et ses faces des triangles isocèles.

Exemple :

FIGURE 13.6 – Pyramide



Prenons une pyramide à base carrée, de côté a, et de hauteur h (figure 13.6). Alors son volume sera

$$\mathcal{V} = \frac{a^2 h}{3}$$

car l'aire de la base vaut $B = a^2$.

13.6 Exercices

13.6.1 Énoncés

Exercice 13.1. ** Calculer les rayons des sphères dont le volume est :

a) $\mathcal{V} = 113{,}1$

b) $\mathcal{V} = 14{,}1$

13.6.2 Conseils

13.6.3 Corrections

Chapitre 14

Les vecteurs

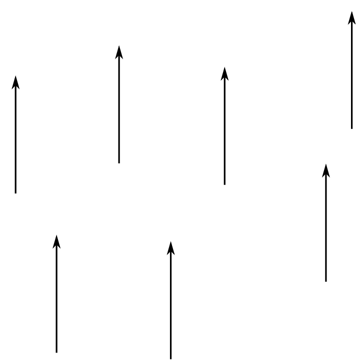
14.1 Vecteurs

14.1.1 Définitions

Définition 14.1. Un vecteur est défini par un segment orienté. Sa position dans le plan n'importe pas. Il est donc défini par :
– une longueur ;
– un sens ;
– une direction.
Il est symbolisé par une flèche et on notera $\overrightarrow{v}$ nommé v.

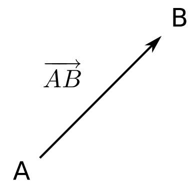
Par exemple, dans la figure 14.1, tous les vecteurs représentés sont égaux : ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.

FIGURE 14.1 – Vecteurs égaux



L'on peut voir le vecteur comme un objet qui donne une information sur un déplacement. Par exemple, si l'on a un point A, auquel on fait subir une translation par un vecteur quelconque, alors le point B qui résulte de la transformation se trouve à l'extrémité du vecteur.
Ainsi, on peut donc définir un vecteur à partir de deux points. Dans ce cas, on notera $\overrightarrow{AB}$, si le vecteur est défini par les points A et B (figure 14.2).

Figure 14.2 – Vecteur AB

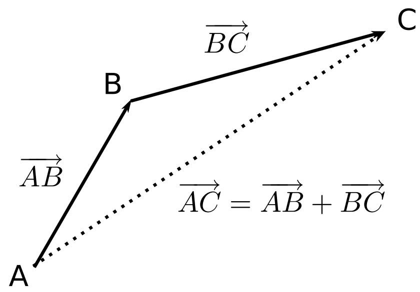


Proposition 14.1. Relation de Chasles Soit trois points A, B et C. Alors on a

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}} \tag{14.1}$$

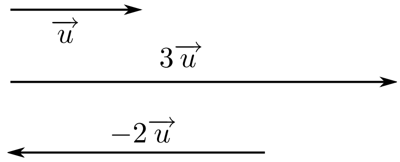
Ainsi, pour additionner deux vecteurs, il suffit de les mettre bout à bout, et de tracer le vecteur défini par l'origine du premier et la fin du second (figure 14.3).

Figure 14.3 – Relation de Chasles : somme de deux vecteurs



Proposition 14.2. Multiplié un vecteur par un nombre :
– positif revient à multiplier la longueur de ce vecteur par ce nombre, sans changer ni son sens ni sa direction ;
– négatif revient à multiplier la longueur de ce vecteur par la valeur absolue de ce nombre, et à inverser son sens, sans modifier sa direction.
Voir la figure 14.4.

Figure 14.4 – Multiplication d'un vecteur par un nombre



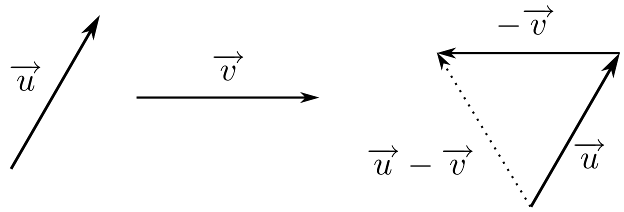
Remarques :

1. Ainsi, $-\overrightarrow{u}$ a la même direction que $\overrightarrow{u}$ et est égal en longueur, mais son sens est opposé.

2. Soustraire un vecteur $\overrightarrow{v}$ à un autre $\overrightarrow{u}$ revient à ajouter $-\overrightarrow{v}$ à $\overrightarrow{u}$ (figure 14.5), c'est à dire

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}) \tag{14.2}$$

FIGURE 14.5 – Soustraction de deux vecteurs



14.1.2 Repérage

Proposition 14.3. Soit un plan muni de deux vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et d'origine O. Alors il est possible d'exprimer la position de tout point P du plan comme somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, chacun éventuellement multiplié par un scalaire.

Exemple : Soit le plan de la figure 14.6.
Alors pour aller de O à A, il faut avancer une fois de $\overrightarrow{u}$ et deux fois de $\overrightarrow{v}$. C'est à dire

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$$

De même, on trouve que

$$\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$$
$$\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

Définition 14.2. Coordonnées d'un point Soit un point M tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. Alors les nombres x et y sont appelés *coordonnées* du point. Afin de simplifier l'écriture, l'on écrit les coordonnées entre parenthèses, sous la forme (abcisse, ordonnée), c'est à dire

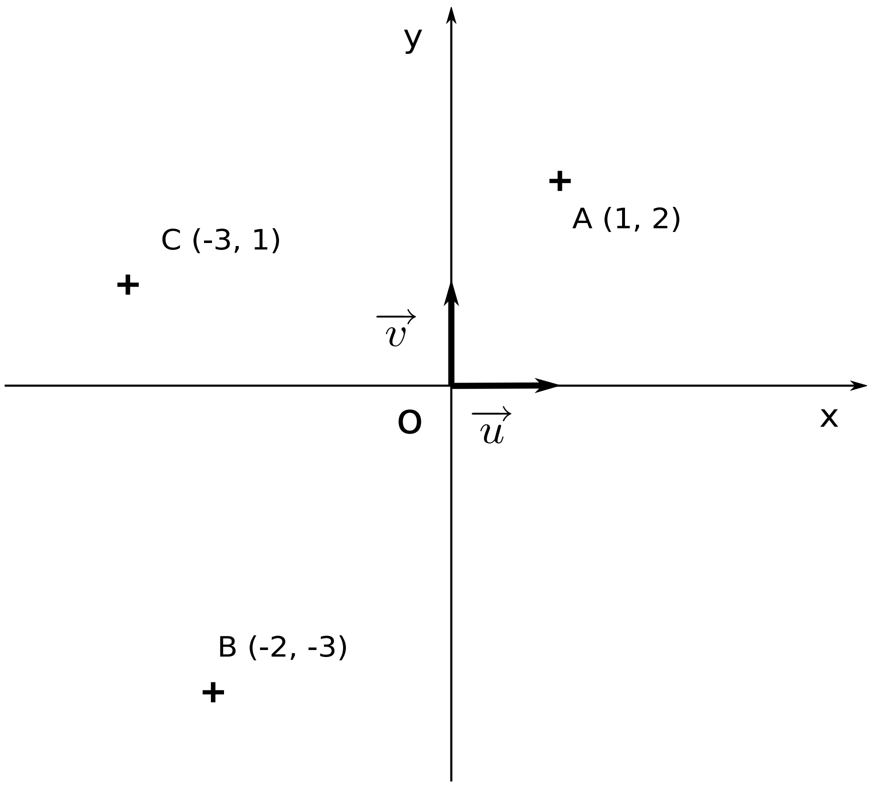
$$A(x, y) \tag{14.3}$$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent (figure 14.6), on notera :
– $A(1, 2)$;
– $B(-2, -3)$;
– $C(-3, 1)$.

Définition 14.3. Coordonnées d'un vecteur Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$, avec $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$. L'abcisse de $\overrightarrow{AB}$ est définie par $x_b - x_a$ et son ordonnée par $y_b - y_a$. On notera

$$\overrightarrow{AB}(x_b - x_a, y_b - y_a) \tag{14.4}$$

Figure 14.6 – Plan défini par des vecteurs



Remarque : Comme on l'a vu dans le chapitre sur les fonctions affines, le nombre $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ correspond au coefficient directeur de la droite passant par A et B. On dit alors que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Proposition 14.4. Distance entre deux points La distance entre deux points $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$, notée AB est

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}} \tag{14.5}$$

Démonstration.
Il s'agit d'une conséquence directe du théorème de Pythagore :
– La longueur du côté horizontal vaut $x_b - x_a$.
– La longueur du côté vertical vaut $x_b - x_a$.
– Pour connaitre la longueur de l'hypothénuse, ou autrement dit la distance en ligne droite entre A et B, on utilise le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2$$

– Il ne reste plus qu'à prendre la racine carrée pour trouver l'expression annoncée

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

□

Remarque : En observant bien, l'on remarque que $(x_b - x_a)$ et $(y_b - y_a)$ correspondent aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

14.2 Exercices

14.2.1 Énoncés

14.2.2 Conseils

14.2.3 Corrections

Quatrième partie

Grandeurs et mesures

Chapitre 15

Transformations

15.1 Transformations du plan

15.1.1 Translations

15.1.2 Rotations

15.2 Homothétie

15.2.1 Effets d'une homothétie

Définition 15.1. Une *homothétie* de *rapport* k correspond à l'agrandissement ou à la diminution d'une figure du facteur k.

Exemples :

1. Si nous avons un carré $ABCD$, et que nous lui appliquons une homothétie de rapport 3, alors la longueur de chacun de ses côtés sera multipliée par 3.
2. Si nous avons un triangle ABC et que nous lui appliquons une homothétie de rapport 1/4, alors la longueur de chacun de ses côtés sera divisée par 4.

Proposition 15.1. Lors d'une homothétie de rapport k
– l'aire est multipliée par k^2 ;
– le volume est multiplié par k^3.

Démonstration.
La démonstration sera faite dans le cadre du carré et du cube, mais elle peut être étnedue à n'importe quel type de figure.

1. Soit un carré de côté a. Alors son aire vaut

$$\mathcal{A} = a \times a = a^2$$

Appliquons maintenant une homothétie de rapport k. Alors chaque côté vaut désormais ka, et l'aire vaut donc

$$\mathcal{A}_k = (ak) \times (ak) = k^2 a^2 = k^2 \mathcal{A}$$

2. Soit un cube de côté a. Alors son volume vaut

$$\mathcal{V} = a \times a \times a = a^3$$

Appliquons maintenant une homothétie de rapport k. Alors chaque côté vaut désormais ka, et le volume vaut donc

$$\mathcal{V}_k = (ak) \times (ak) \times (ak) = k^3 a^3 = k^3 \mathcal{V}$$

$\square$

15.3 Exercices

15.3.1 Énoncés

15.3.2 Conseils

15.3.3 Corrections

Chapitre 16

Unités et mesures

16.1 Notation scientifique

Définition 16.1 (Notation scientifique)**.** La *notation scientifique* est une représentation d'un nombre décimal sous la forme d'un produit de deux nombres :
– un nombre décimal, appelé *significande*, dont la valeur absolue est comprise entre 1 et 9 ;
– une puissance de 10, appelée *exposant*.

Exemples :

a) $28 = 2{,}8 \times 10^1$
b) $123\,400 = 1{,}234 \times 10^5$
c) $0{,}0086 = 8{,}6 \times 10^{-3}$
d) $-7349 = -7{,}349 \times 10^3$
e) $142{,}5 = 1{,}425 \times 10^2$
f) $0{,}0006 = 6 \times 10^{-4}$

Définition 16.2. Soit un nombre $\mathrm{a} \times 10^{\mathrm{n}}$, avec $a \in [1, 9]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors l'*ordre de grandeur* de ce nombre est :
– n si $a < 5$;
– $n + 1$ si $a \geq 5$.

Exemples :

a) L'ordre de grandeur de $2{,}8 \times 10^1$ est 1.
b) L'ordre de grandeur de $1{,}234 \times 10^5$ est 5.
c) L'ordre de grandeur de $8{,}6 \times 10^{-3}$ est -3.

Remarques :

1. Le significande ne possède donc qu'un seul chiffre avant la virgule.
2. Le significande est parfois aussi appelé *mantisse*.
3. Parfois, surtout sur les ordinateurs, on pourra trouver la notation 2.7e3 au lieu de $2{,}7 \times 10^3$.

Cette écriture permet de simplifier la notation des grands et des petits nombres. De plus, elle permet d'avoir immédiatement une idée de la taille du nombre (il s'agit de l'ordre de grandeur).

16.2 Exercices

16.2.1 Énoncés

Exercice 16.1. * Écrire les nombres suivants sous forme d'écriture décimale :

a) 4×10^{-2}
b) -7×10^{3}
c) 13×10^{1}
d) 10×10^{-6}
e) 3×10^{1}
f) -4×10^{0}

Exercice 16.2. ** Écrire les nombres suivants sous forme d'écriture décimale :

a) $2{,}3 \times 10^{5}$
b) $-8{,}1 \times 10^{-2}$
c) $8{,}7 \times 10^{1}$
d) $4{,}5 \times 10^{-3}$

Exercice 16.3. * Compléter l'exposant manquant :

a) $0{,}002 = 2 \times 10^{\cdots}$
b) $432 = 4{,}32 \times 10^{\cdots}$
c) $8{,}7 = 87 \times 10^{\cdots}$
d) $-0{,}37 = -3{,}7 \times 10^{\cdots}$
e) $5700 = 57 \times 10^{\cdots}$
f) $1000 = 10 \times 10^{\cdots}$
g) $32\,000 = 3{,}2 \times 10^{\cdots}$

Exercice 16.4. * Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

a) $24\,000$
b) $0{,}007$
c) $34{,}1$
d) -64
e) $9{,}03$
f) $-0{,}003\,01$
g) $100{,}01$

Exercice 16.5. * Écrire en notation scientifique puis effectuer le calcul :

a) $34 \times 0{,}07$
b) $405 \times -50 \times 0{,}3$
c) $50\,600 \times 0{,}08$
d) $0{,}08 \times 0{,}71 \times 0{,}001 \times 4$

16.2.2 Conseils

16.2.3 Corrections

Annexes

Annexe A

Biographies

Thalès de Milet

Thalès de Milet (ou Thalès) est né à la fin du VII^e siècle avant J.–C. dans la ville de Milet (Asie mineure) et était un philosophe et mathématicien grec. Fils de marchand, il voyagea beaucoup et apprit les mathématiques et la géométrie en Egypte.
Il a fondé une école à Milet et c'est là qu'il aurait prononcé la maxime « Connais-toi toi-même ».

Pythagore

Pythagore était lui aussi un philosophe et mathématicien grec de la fin du VI^e siècle avant J.–C. Il est né sur Samos (une ile de la mer Égée). Il fonda une école en Italie, qui connut un grand succès.
Ses principales contributions sont :
– le théorème de Pythagore ;
– la preuve que la somme des angles d'un triangle vaut 180° ;
– la preuve que $\sqrt{2}$ est irrationnel ;
– une étude de la musique d'un point de vue mathématiques.
Il considérait que la Terre était sphérique.

Archimède

Archimède vécut pendant le III^e siècle avant J.–C.
Il s'intéressa à la physique, aux mathématiques et à l'ingénierie. On lui associe souvent la découverte de la poussée d'Archimède [1], alors qu'il prenait un bain, et il se serait écrier « Eurêka ! ».
Il parvint à donner un bon encadrement de π (voir exercice 11.1) et contribua à divers domaines : les coniques, des formules d'aire et de volume... Il a aussi créé diverses machines de guerre.

1. « Tout corps plongé dans un liquide subit, de la part de celui-ci, une poussée exercée du bas vers le haut et égale, en intensité, au poids du volume de liquide déplacé. »

Il fut tué lors du siège de Syracuse. La légende veut que lors de ce dernier, l'armée grecque parvint à enflammer les navires romains grâce à des miroirs qui réfléchissaient les rayons du soleil.

Euclide

Contemporain d'Archimède, Euclide est né au IV^e siècle avant J.–C. et mort au III^e avant J.–C. Il s'établit à Alexandrie, mais l'on ne connait que peu de détails sur sa vie. Son texte, *Les Éléments*, qui traite essentiellement de géométrie, est considéré comme l'une des œuvres majeures des mathématiques

Index

Bibliographie

[1] Département de l'instruction publique, Genève. *Mathématiques 9è, section S et L*, 1995.
http://wwwedu.ge.ch/co/docarchimath/welcome.html.

[2] Yves Ducel and Bruno Saussereau. Statistique et probabilités. Technical report, IREM, Université de Franche-Comté, October 2008.
http://www-irem.univ-fcomte.fr/documents/Journee_college_Synthese.pdf.

[3] Kim Seward and Jennifer Puckett. Algebra.
http://www.wtamu.edu/academic/anns/mps/math/mathlab/.

Table des figures

Liste des tableaux

Table des matières